

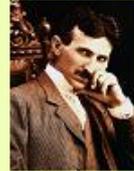
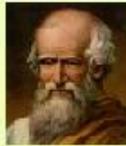


Universidade Federal do ABC

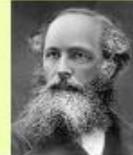
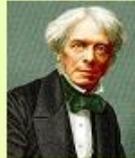
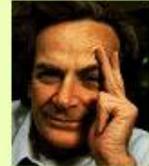
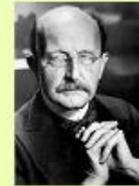
Mecânica Estatística

PEF-112

MNPEF Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física
Polo UFABC



Física



Prof. Dr. Marcelo A. Leigui de Oliveira
Centro de Ciências Naturais e Humanas
leigui@ufabc.edu.br

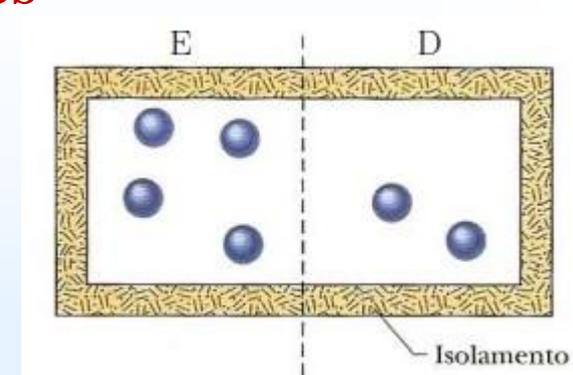
Capítulo 2: A segunda lei

1. Sistema de dois estados
2. Modelo de Einstein de um sólido
3. Sistemas interagentes
4. Grandes sistemas

1) Sistema de dois estados

1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória.
 n_E moléculas ocupam a metade esquerda e
 $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita.



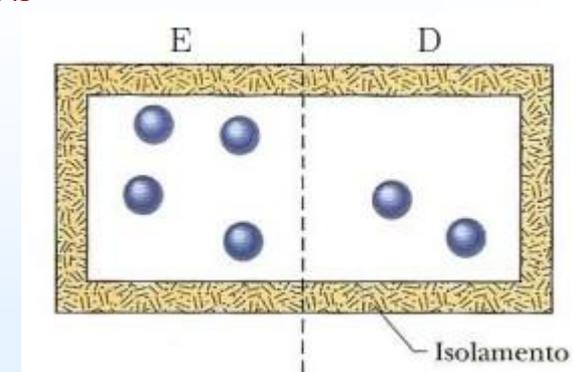
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória.

n_E moléculas ocupam a metade esquerda e

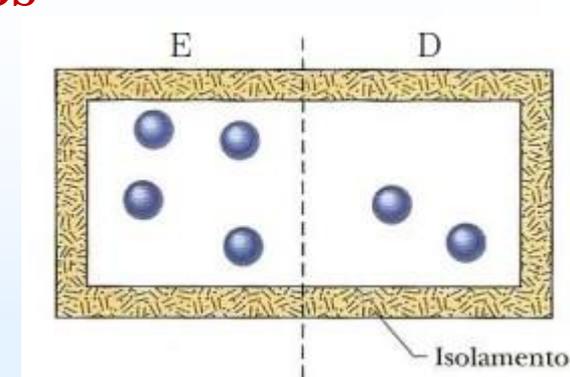
$n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita.

- Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**.



1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória.
 n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita.
- Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**.
- Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa.

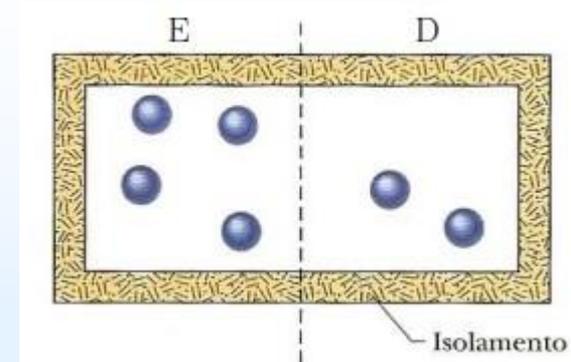


1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória.

n_E moléculas ocupam a metade esquerda e

$n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita.



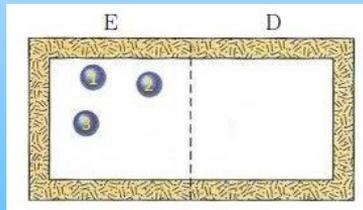
- Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**.
- Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa.
- Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.

1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.

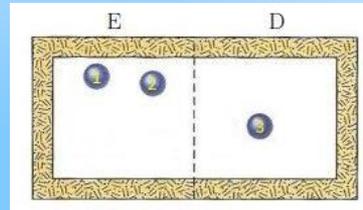
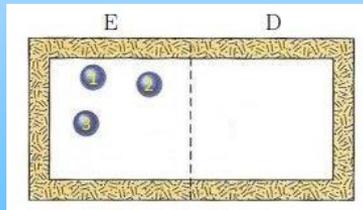
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



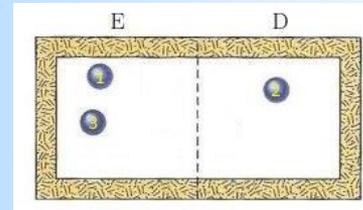
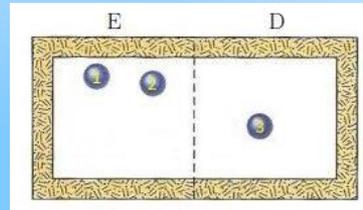
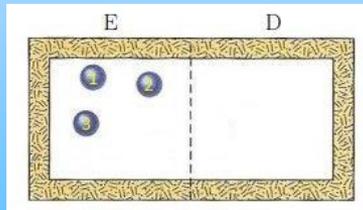
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



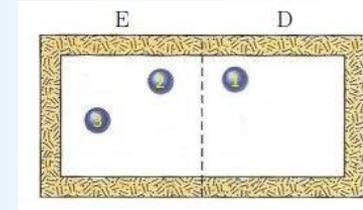
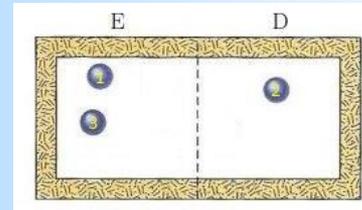
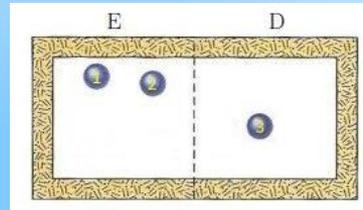
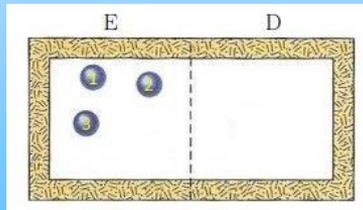
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



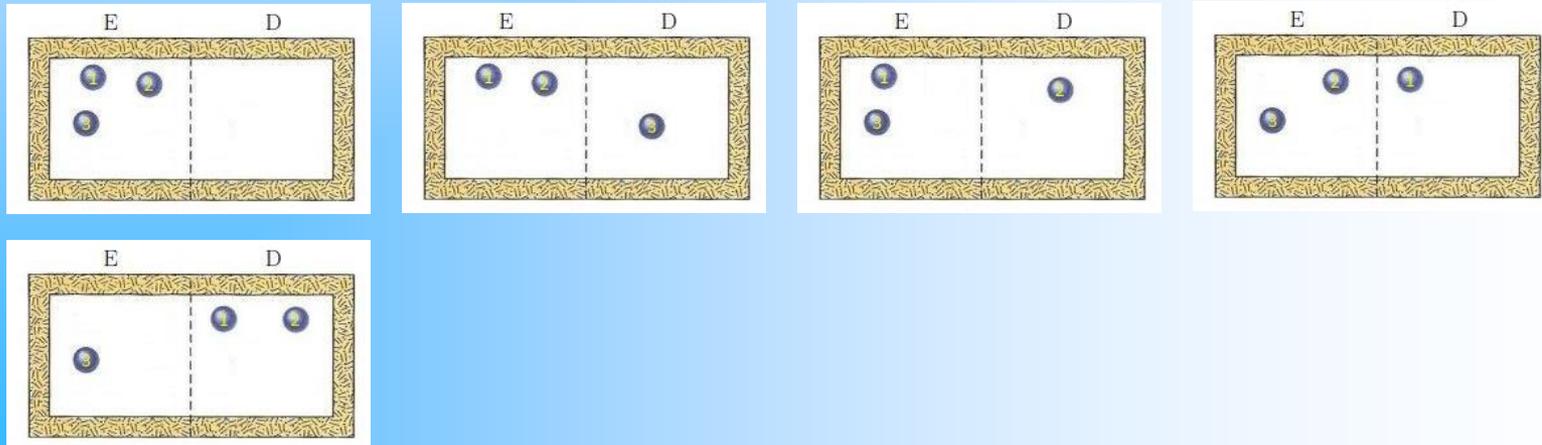
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



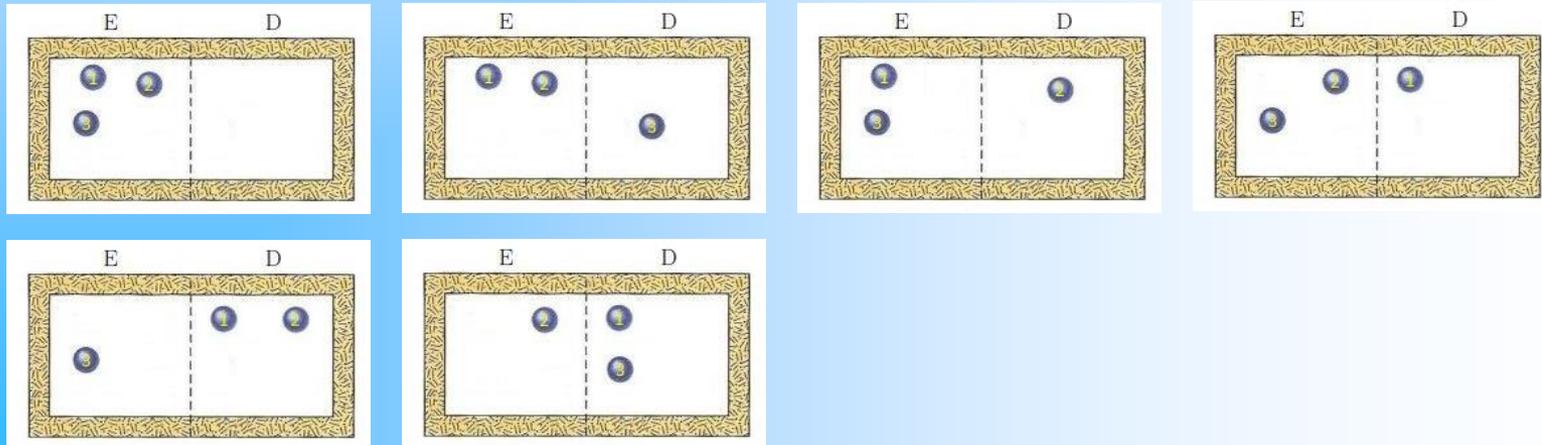
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



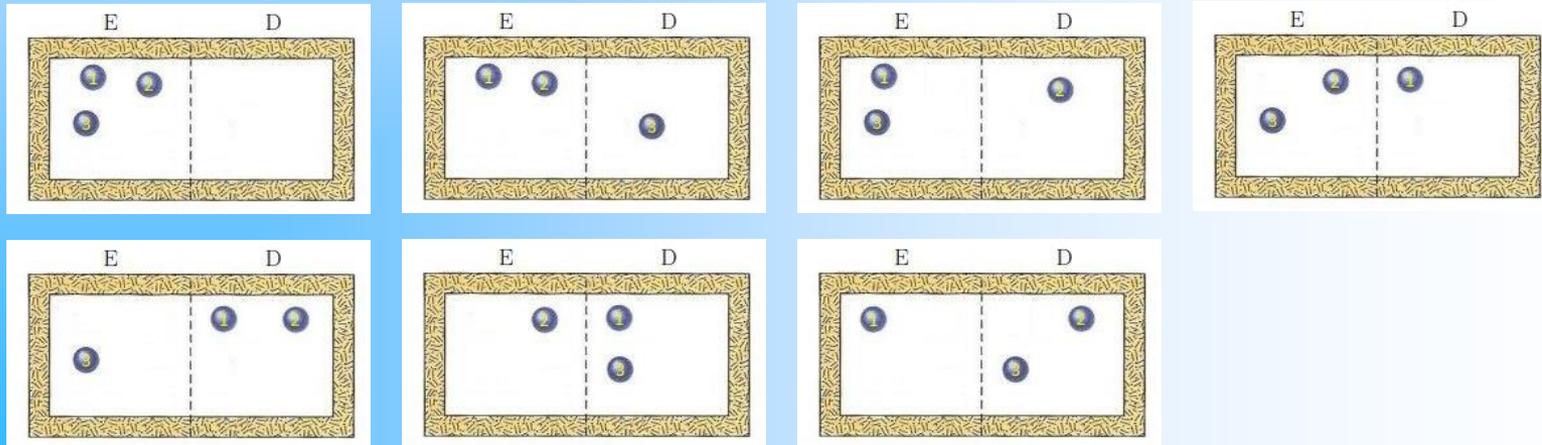
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



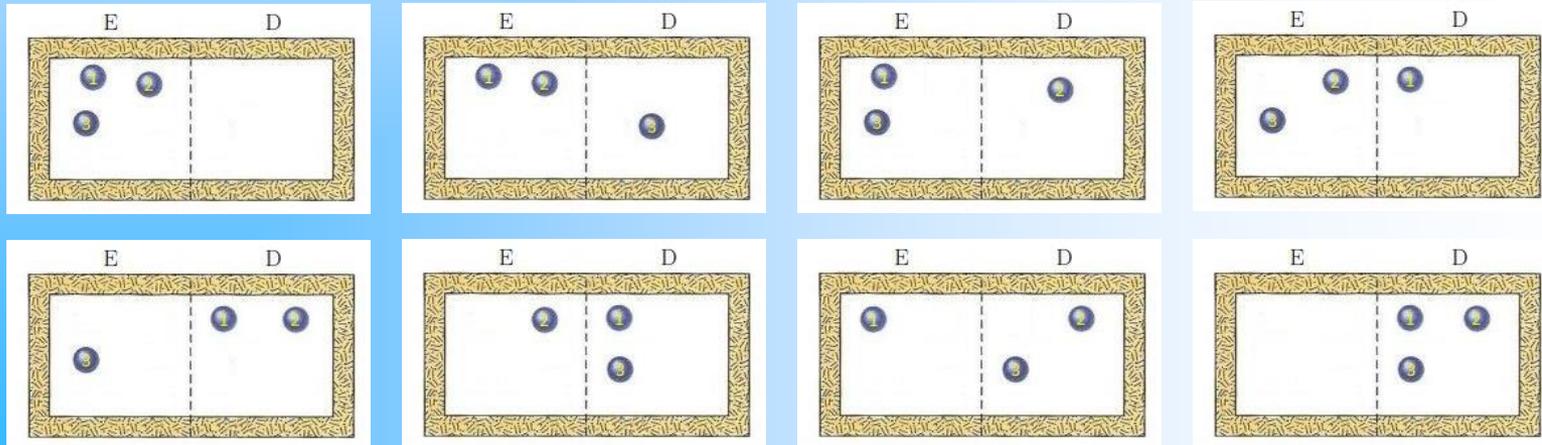
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



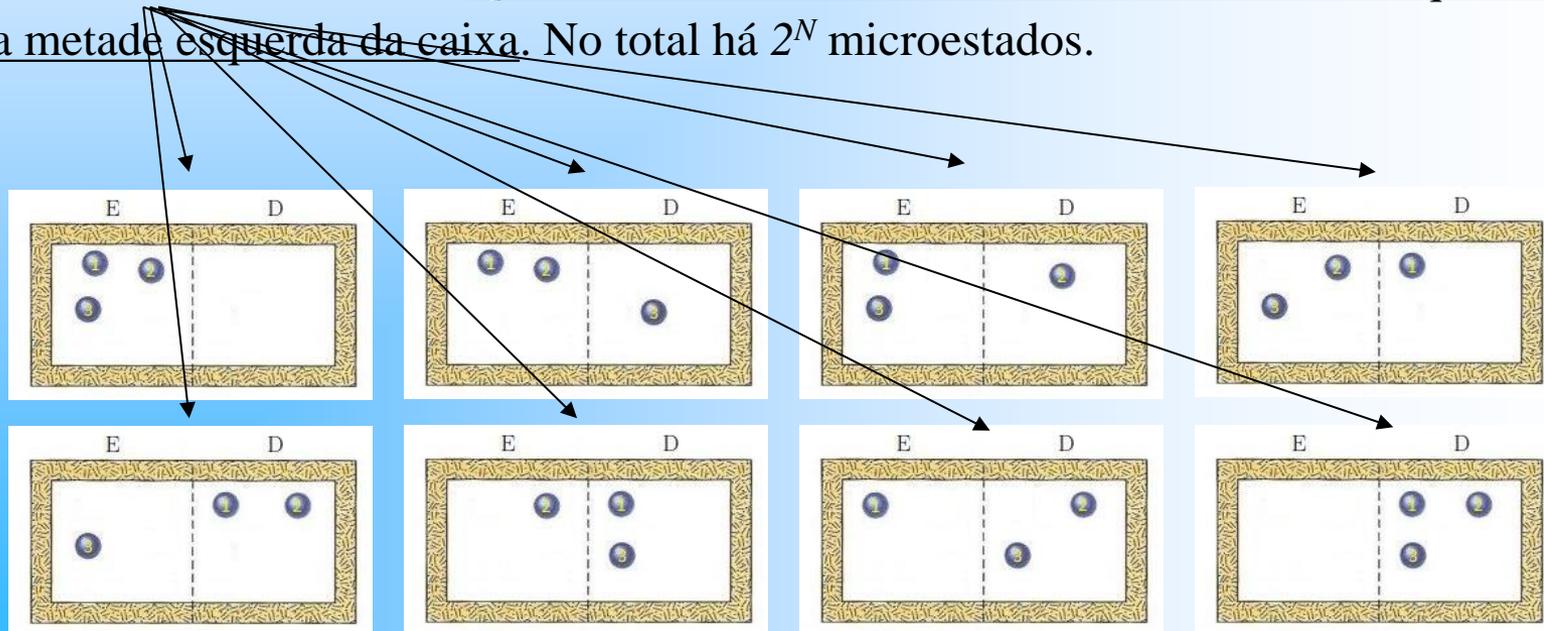
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



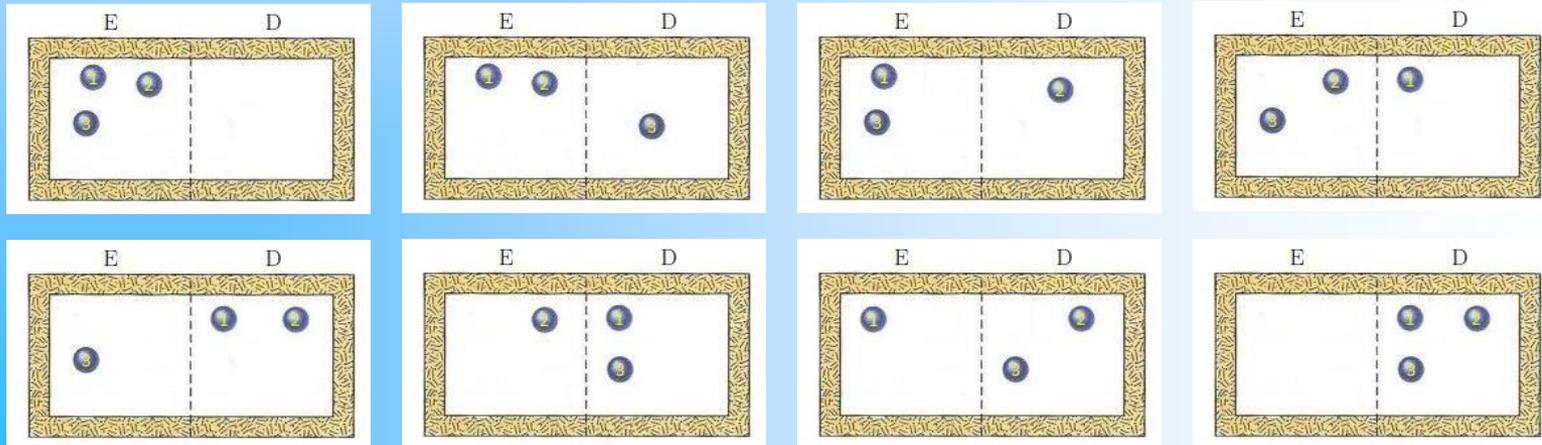
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há 2^N microestados.



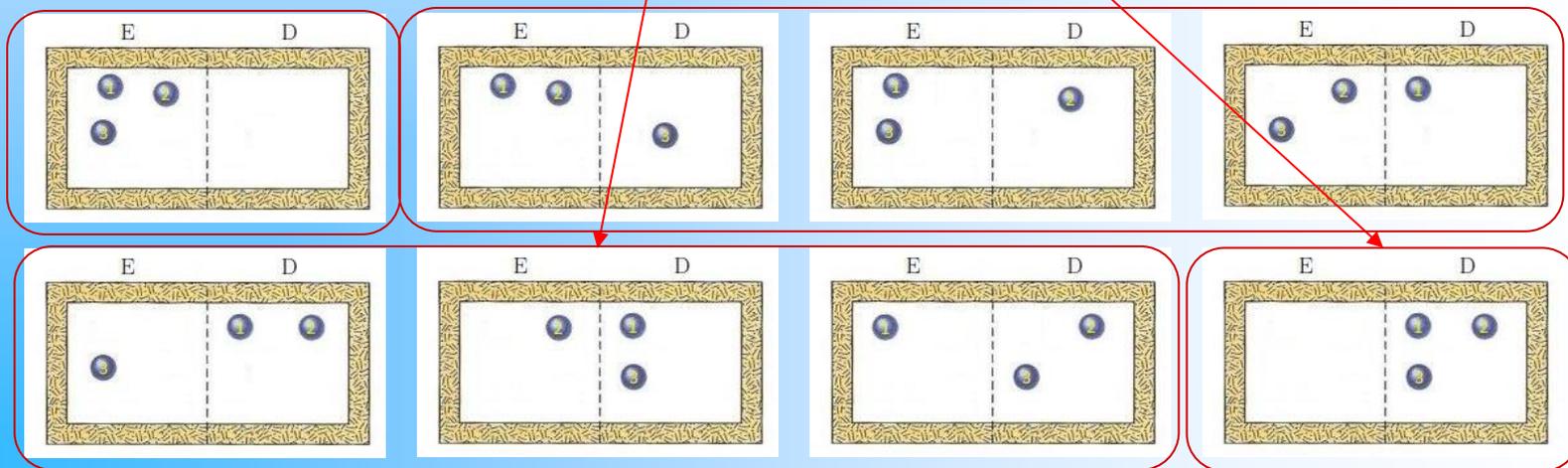
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há $2^N = 2^3 = 8$ **microestados**.



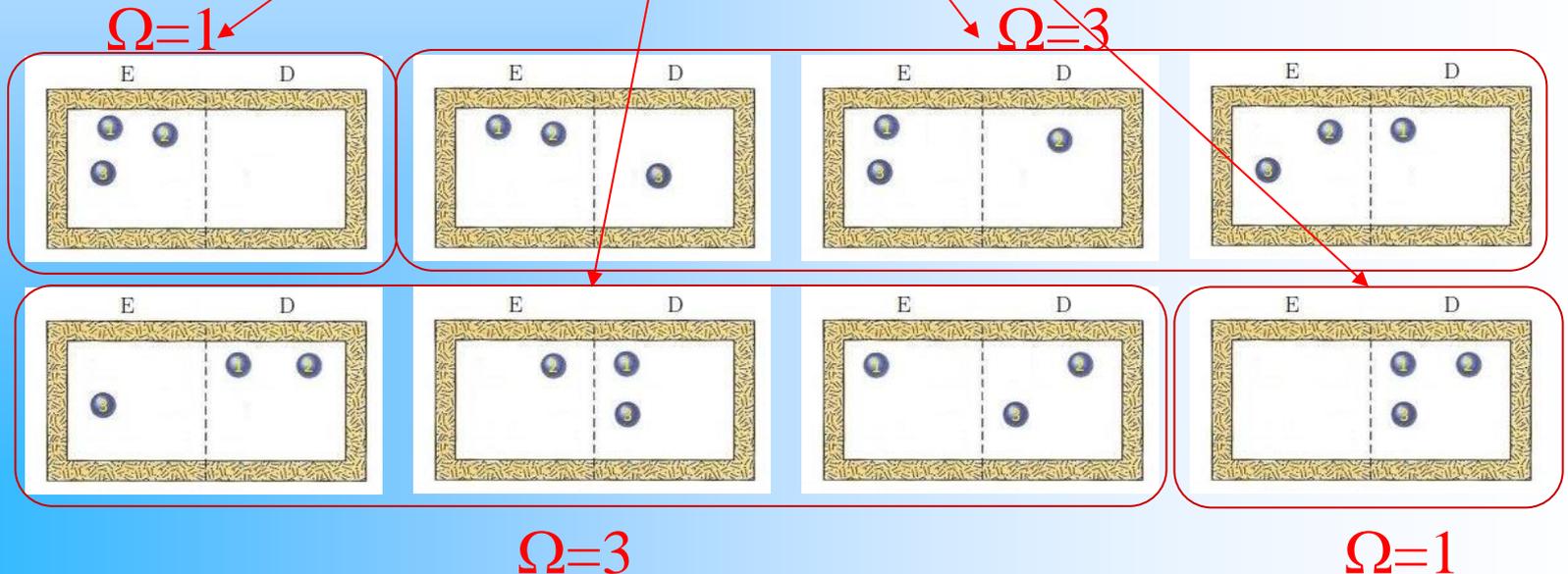
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há $2^N = 2^3 = 8$ **microestados**.



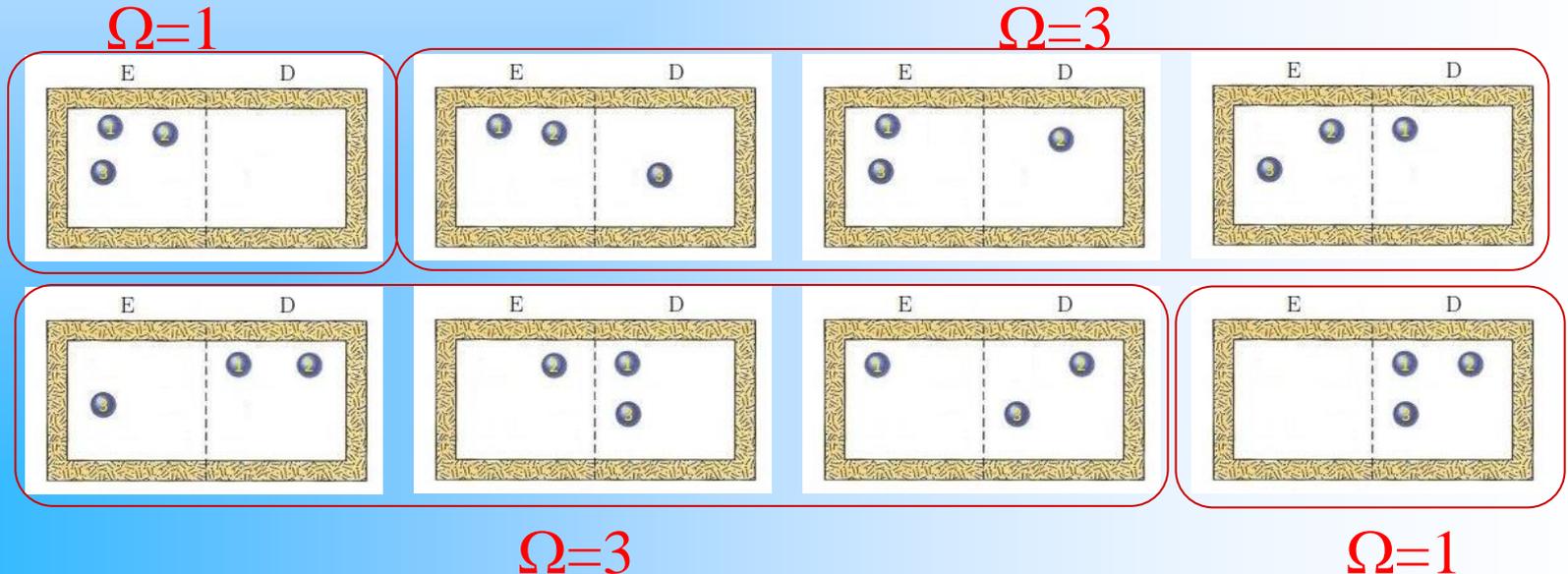
1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há $2^N = 2^3 = 8$ **microestados**.



1) Sistema de dois estados

- Analisemos as possíveis configurações de N moléculas idênticas dentro de uma caixa isolada com divisória. n_E moléculas ocupam a metade esquerda e $n_D = N - n_E$ ocupam a metade direita. Os diferentes pares (n_E, n_D) – que são iguais aos pares (N, n_E) ou (N, n_D) – caracterizam os **macroestados**. Para uma dada configuração do macroestado, não importa quais moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. Para cada macroestado podemos associar diversos **microestados** diferentes. Quais das N moléculas estão na metade direita e quais estão na metade esquerda da caixa. No total há $2^N = 2^3 = \mathbf{8}$ **microestados**. Para cada macroestado há um número correspondente de microestados chamado de **multiplicidade, Ω** .



1) Sistema de dois estados

- Suponhamos um sistema com $N = 4$ moléculas idênticas

Configuração	n_E	n_D	Localização das moléculas				Ω
			1	2	3	4	
<i>I</i>	4	0	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	1
<i>II</i>	3	1	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	4
			<i>E</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	
			<i>E</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	
			<i>E</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	
<i>III</i>	2	2	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	6
			<i>D</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	
			<i>D</i>	<i>E</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	
			<i>E</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	
			<i>E</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	
			<i>E</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	
<i>IV</i>	1	3	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	4
			<i>D</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	
			<i>D</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	
			<i>E</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	
<i>V</i>	0	4	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	1

1) Sistema de dois estados

- Para um sistema com $N = n_E + n_D$ moléculas distintas, temos que o número de microestados para cada macroestado definido pelos números N e n_E (ou n_D) é uma combinação simples de N objetos tomados n_E a n_E . (ou n_D a n_D):

$$\Omega(N, n_E) = \Omega(N, n_D) = \binom{N}{n_E} = \binom{N}{n_D} = \frac{N!}{n_E! n_D!},$$

onde $\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} = \binom{N}{N-n}$

- p.ex.: $N = 3$:

$$\Omega(3,3) = \frac{3!}{3! 0!} = 1$$

$$\Omega(3,1) = \frac{3!}{1! 2!} = 3$$

$$\Omega(3,2) = \frac{3!}{2! 1!} = 3$$

$$\Omega(3,0) = \frac{3!}{0! 3!} = 1$$

1) Sistema de dois estados

- Para um sistema com $N = n_E + n_D$ moléculas distintas, temos que o número de microestados para cada macroestado definido pelos números N e n_E (ou n_D) é uma combinação simples de N objetos tomados n_E a n_E . (ou n_D a n_D):

$$\Omega(N, n_E) = \Omega(N, n_D) = \binom{N}{n_E} = \binom{N}{n_D} = \frac{N!}{n_E! n_D!},$$

onde $\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} = \binom{N}{N-n}$

- Definindo-se, simplesmente, $\Omega(n) \equiv \Omega(N, n)$, probabilidade de se ter um macroestado particular é dada por:

$$p(n) = \frac{\Omega(N, n)}{\Omega(total)},$$

onde $\Omega(total) = 2^N$ é o número total de microestados.

1) Sistema de dois estados

- Para um sistema com $N = n_E + n_D$ moléculas distintas, temos que o número de microestados para cada macroestado definido pelos números N e n_E (ou n_D) é uma combinação simples de N objetos tomados n_E a n_E . (ou n_D a n_D):

$$\Omega(N, n_E) = \Omega(N, n_D) = \binom{N}{n_E} = \binom{N}{n_D} = \frac{N!}{n_E! n_D!},$$

onde $\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} = \binom{N}{N-n}$

- Definindo-se, simplesmente, $\Omega(n) \equiv \Omega(N, n)$, probabilidade de se ter um macroestado particular é dada por:

$$p(n) = \frac{\Omega(N, n)}{\Omega(total)},$$

onde $\Omega(total) = 2^N$ é o número total de microestados.

- p. ex.:

$$p(3) = \frac{\Omega(3,3)}{\Omega(total)} = \frac{1}{8}, p(2) = \frac{\Omega(3,2)}{\Omega(total)} = \frac{3}{8}, p(1) = \frac{\Omega(3,1)}{\Omega(total)} = \frac{3}{8}, p(0) = \frac{\Omega(3,0)}{\Omega(total)} = \frac{1}{8}$$

Exercício

1. Suponha que você lance 20 moedas honestas.

(a) Qual é o número total de microestados que se pode obter?

(b) Qual é a probabilidade de se obter a sequência

HTHHTTTHTHHHTHHHTHT,

onde H é cara e T a coroa, exatamente nessa ordem?

(c) Qual a probabilidade de se obter 12 caras e 8 coroas (em qualquer ordem)?

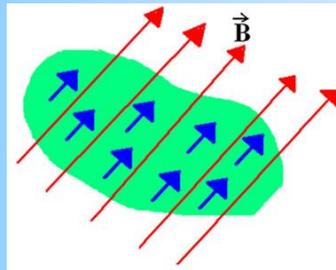
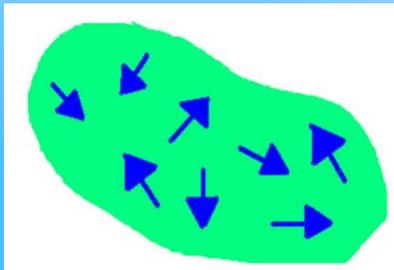
Materiais Paramagnéticos de 2 estados

Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- O que modelo de jogar moedas tem a ver com física? Sim, há sistemas físicos com comportamento semelhante: materiais paramagnéticos de dois estados.

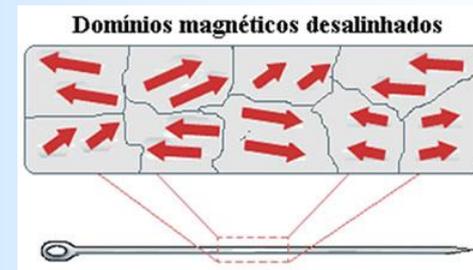
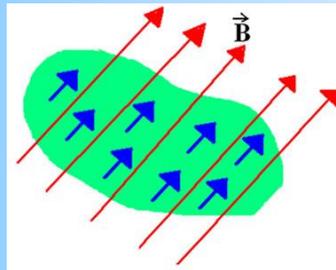
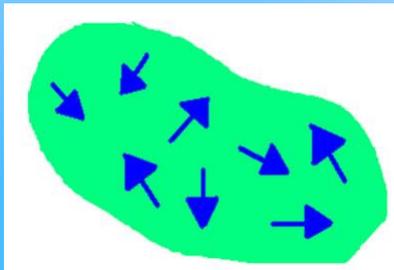
Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- O que modelo de jogar moedas tem a ver com física? Sim, há sistemas físicos com comportamento semelhante: materiais paramagnéticos de dois estados.
- Materiais paramagnéticos, junto com os ferromagnéticos, são materiais cujos átomos comportam-se como pequenas bússolas alinhando-se a um campo magnético aplicado.



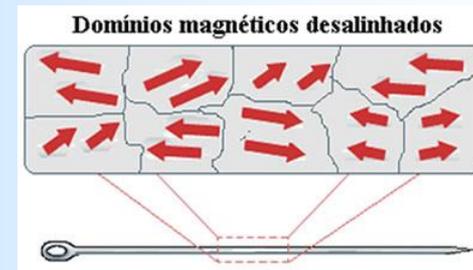
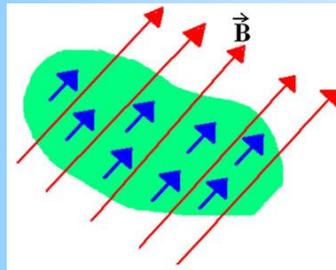
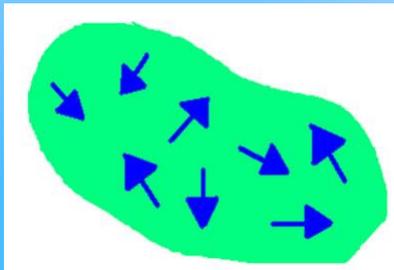
Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- O que modelo de jogar moedas tem a ver com física? Sim, há sistemas físicos com comportamento semelhante: materiais paramagnéticos de dois estados.
- Materiais paramagnéticos, junto com os ferromagnéticos, são materiais cujos átomos comportam-se como pequenas bússolas alinhando-se a um campo magnético aplicado.
- Num ferromagnético as partículas constituintes interagem fortemente mantendo a magnetização mesmo depois de retirado o campo magnético, enquanto que no paramagnético a interação é fraca, e a magnetização cessa assim que se retira o campo externo.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- O que modelo de jogar moedas tem a ver com física? Sim, há sistemas físicos com comportamento semelhante: materiais paramagnéticos de dois estados.
- Materiais paramagnéticos, junto com os ferromagnéticos, são materiais cujos átomos comportam-se como pequenas bússolas alinhando-se a um campo magnético aplicado.
- Num ferromagnético as partículas constituintes interagem fortemente mantendo a magnetização mesmo depois de retirado o campo magnético, enquanto que no paramagnético a interação é fraca, e a magnetização cessa assim que se retira o campo externo.
- Chamamos de **dipolo** cada partícula magnética individual, visto que ela possui um **momento de dipolo magnético**.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.

Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

- Classicamente, para um elétron orbitando em torno do núcleo atômico, a expressão acima resulta

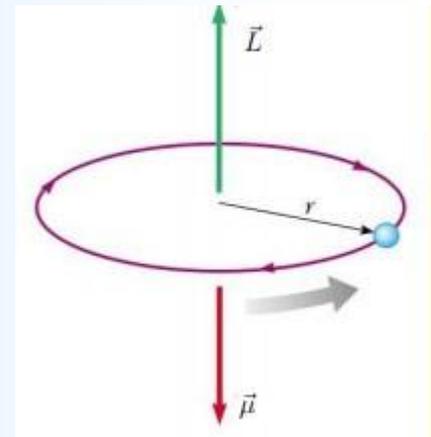
$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

onde e é o modulo da carga do elétron, m a sua massa e \vec{L} o momento angular orbital.

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

- Classicamente, para um elétron orbitando em torno do núcleo atômico, a expressão acima resulta

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

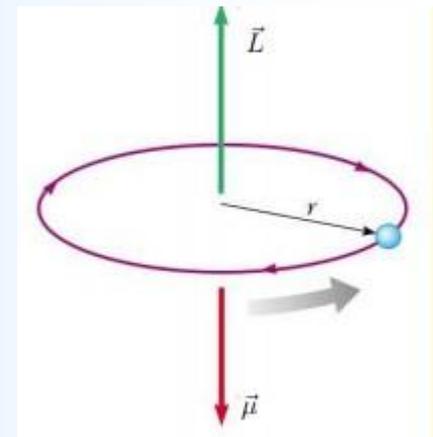
onde e é o modulo da carga do elétron, m a sua massa e \vec{L} o momento angular orbital. Pois:

$$\mu = iA$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

- Classicamente, para um elétron orbitando em torno do núcleo atômico, a expressão acima resulta

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

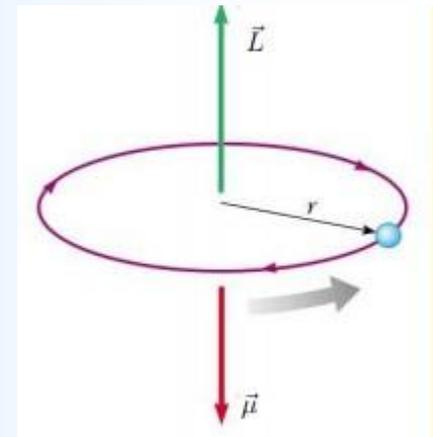
onde e é o modulo da carga do elétron, m a sua massa e \vec{L} o momento angular orbital. Pois:

$$\mu = iA = \frac{q}{\Delta t}\pi r^2$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

- Classicamente, para um elétron orbitando em torno do núcleo atômico, a expressão acima resulta

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

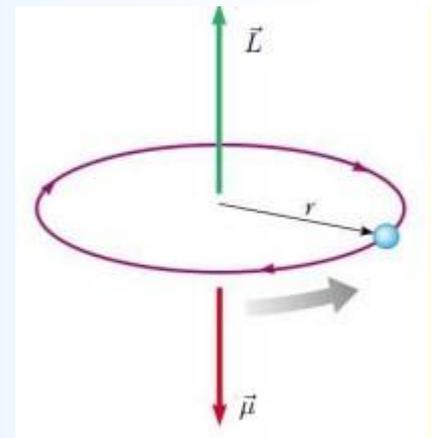
onde e é o modulo da carga do elétron, m a sua massa e \vec{L} o momento angular orbital. Pois:

$$\mu = iA = \frac{q}{\Delta t} \pi r^2 = \frac{q}{2\pi r/v} \pi r^2$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

- Classicamente, para um elétron orbitando em torno do núcleo atômico, a expressão acima resulta

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

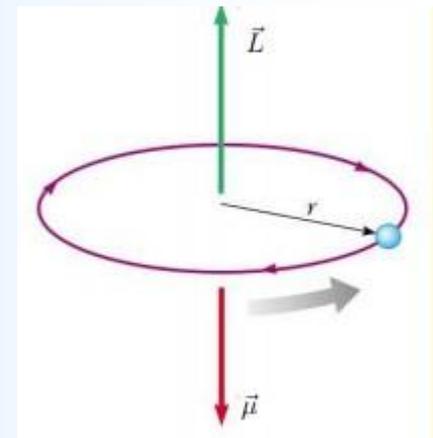
onde e é o modulo da carga do elétron, m a sua massa e \vec{L} o momento angular orbital. Pois:

$$\mu = iA = \frac{q}{\Delta t} \pi r^2 = \frac{q}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{qvr}{2}$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

- Classicamente, para um elétron orbitando em torno do núcleo atômico, a expressão acima resulta

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

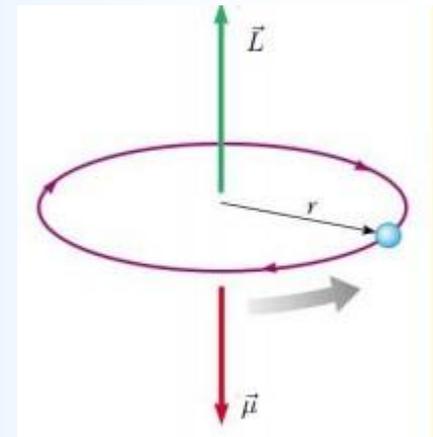
onde e é o modulo da carga do elétron, m a sua massa e \vec{L} o momento angular orbital. Pois:

$$\mu = iA = \frac{q}{\Delta t} \pi r^2 = \frac{q}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{qvr}{2} \frac{m}{m} = \frac{qvr}{2} \frac{m}{m}$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

- Classicamente, para um elétron orbitando em torno do núcleo atômico, a expressão acima resulta

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

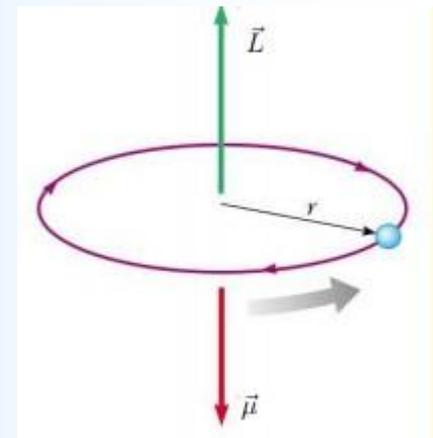
onde e é o modulo da carga do elétron, m a sua massa e \vec{L} o momento angular orbital. Pois:

$$\mu = iA = \frac{q}{\Delta t} \pi r^2 = \frac{q}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{qvr}{2} \frac{m}{m} = \frac{q}{2m} (mvr)$$

Serway/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Para uma espira de área A que conduz uma corrente elétrica i , o **momento de dipolo magnético** é definido

$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

- Classicamente, para um elétron orbitando em torno do núcleo atômico, a expressão acima resulta

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

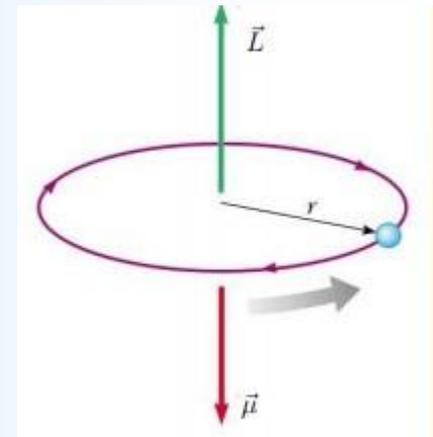
onde e é o modulo da carga do elétron, m a sua massa e \vec{L} o momento angular orbital. Pois:

$$\mu = iA = \frac{q}{\Delta t} \pi r^2 = \frac{q}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{qvr}{2} \frac{m}{m} = \frac{q}{2m} (mvr) = \frac{-e}{2m} L$$

Sevay/Jewett; Principles of Physics, 3/e
Figure 22.21



Harcourt, Inc. items and derived items copyright © 2002 by Harcourt, Inc.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Cada dipolo pode ser apenas um elétron um grupo de elétrons em um átomo ou um núcleo atômico.

Materiais Paramagnéticos de 2 estados

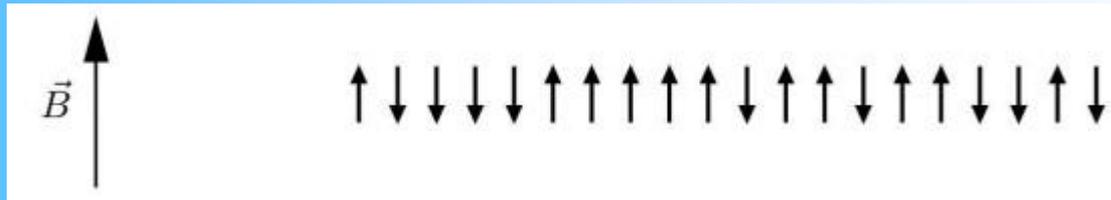
- Cada dipolo pode ser apenas um elétron um grupo de elétrons em um átomo ou um núcleo atômico.
- Na presença de um campo magnético \vec{B} , o dipolo sofre um torque dado por $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, o que faz com que ele tenda a se alinhar com \vec{B} .

Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Cada dipolo pode ser apenas um elétron um grupo de elétrons em um átomo ou um núcleo atômico.
- Na presença de um campo magnético \vec{B} , o dipolo sofre um torque dado por $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, o que faz com que ele tenda a se alinhar com \vec{B} .
- De acordo com a mecânica quântica, o valor do momento de dipolo num eixo qualquer (p.ex., a componente z, μ_z) só pode assumir alguns valores discretos.

Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Cada dipolo pode ser apenas um elétron um grupo de elétrons em um átomo ou um núcleo atômico.
- Na presença de um campo magnético \vec{B} , o dipolo sofre um torque dado por $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, o que faz com que ele tenda a se alinhar com \vec{B} .
- De acordo com a mecânica quântica, o valor do momento de dipolo num eixo qualquer (p.ex., a componente z, μ_z) só pode assumir alguns valores discretos.
 - No caso mais simples, somente dois valores de μ são permitidos – um positivo (paralelo ao campo magnético \vec{B}) e outro negativo (anti-paralelo). A figura abaixo temos caracterizada um sistema de dois estados.



Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Consideremos um sistema com $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$ dipolos elementares, onde $N_{\uparrow}(N_{\downarrow})$ é o número de dipolos paralelos (anti-paralelos) ao campo magnético em um dado instante. O sistema possui um macroestado para cada possível valor de N_{\uparrow} (de 0 a N).

Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Consideremos um sistema com $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$ dipolos elementares, onde $N_{\uparrow}(N_{\downarrow})$ é o número de dipolos paralelos (anti-paralelos) ao campo magnético em um dado instante. O sistema possui um macroestado para cada possível valor de N_{\uparrow} (de 0 a N).
- A multiplicidade de um macroestado é dada de forma semelhante ao caso do lançamento de moedas ou de distribuição de átomos em uma caixa com dois compartimentos:

$$\Omega(N_{\uparrow}) = \binom{N}{N_{\uparrow}} = \frac{N!}{N_{\uparrow}! N_{\downarrow}!}$$

Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Consideremos um sistema com $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$ dipolos elementares, onde $N_{\uparrow}(N_{\downarrow})$ é o número de dipolos paralelos (anti-paralelos) ao campo magnético em um dado instante. O sistema possui um macroestado para cada possível valor de N_{\uparrow} (de 0 a N).

- A multiplicidade de um macroestado é dada de forma semelhante ao caso do lançamento de moedas ou de distribuição de átomos em uma caixa com dois compartimentos:

$$\Omega(N_{\uparrow}) = \binom{N}{N_{\uparrow}} = \frac{N!}{N_{\uparrow}! N_{\downarrow}!}$$

- Lembrando que a energia potencial é $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, os dipolos alinhados em paralelo ao campo magnético externo deverão possuir menor energia do que aqueles alinhados em anti-paralelo.

Materiais Paramagnéticos de 2 estados

- Consideremos um sistema com $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$ dipolos elementares, onde $N_{\uparrow}(N_{\downarrow})$ é o número de dipolos paralelos (anti-paralelos) ao campo magnético em um dado instante. O sistema possui um macroestado para cada possível valor de N_{\uparrow} (de 0 a N).

- A multiplicidade de um macroestado é dada de forma semelhante ao caso do lançamento de moedas ou de distribuição de átomos em uma caixa com dois compartimentos:

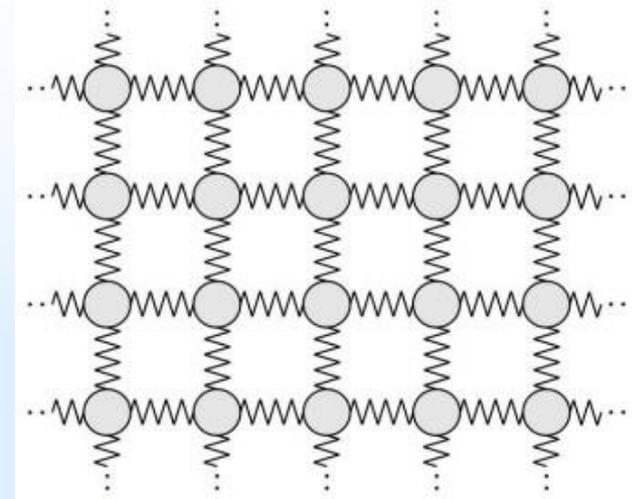
$$\Omega(N_{\uparrow}) = \binom{N}{N_{\uparrow}} = \frac{N!}{N_{\uparrow}! N_{\downarrow}!}$$

- Lembrando que a energia potencial é $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, os dipolos alinhados em paralelo ao campo magnético externo deverão possuir menor energia do que aqueles alinhados em anti-paralelo.
- A energia total do sistema é determinada pelos números de dipolos paralelos e anti-paralelos. Logo se especificarmos o macroestado do sistema, então teremos a energia total do sistema.

2) Modelo de Einstein de um sólido

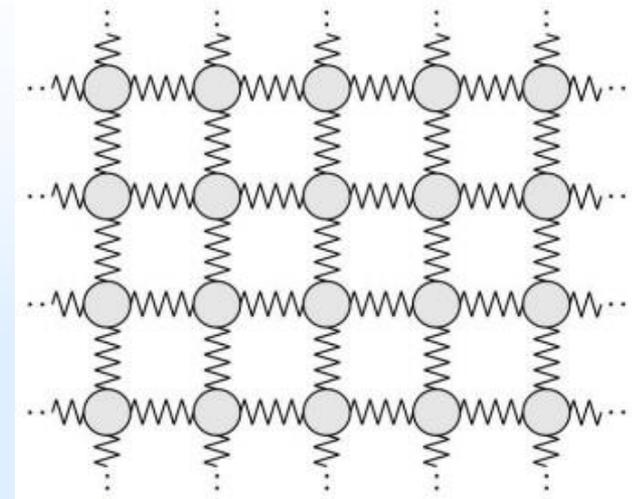
2) Modelo de Einstein de um sólido

- Um sólido é uma coleção de osciladores idênticos em 3 dimensões (foi proposto por Einstein em 1907).



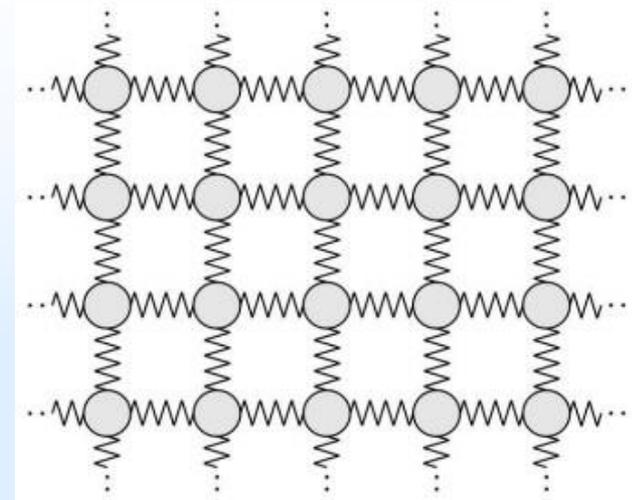
2) Modelo de Einstein de um sólido

- Um sólido é uma coleção de osciladores idênticos em 3 dimensões (foi proposto por Einstein em 1907).
- Existem N osciladores e somente $N/3$ átomos no sólido.



2) Modelo de Einstein de um sólido

- Um sólido é uma coleção de osciladores idênticos em 3 dimensões (foi proposto por Einstein em 1907).
- Existem N osciladores e somente $N/3$ átomos no sólido.
- Como se trata de um sistema na escala atômica, os osciladores harmônicos devem ser tratados quanticamente.



2) Sólido de Einstein

- A energia potencial de um oscilador harmônico simples é:

$$V(x) = \frac{1}{2} k_e x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2,$$

onde k_e é a constante elástica da mola e $\omega = \sqrt{k_e/m}$ é a frequência angular de vibração da partícula de massa m .

2) Sólido de Einstein

- A energia potencial de um oscilador harmônico simples é:

$$V(x) = \frac{1}{2}k_e x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

onde k_e é a constante elástica da mola e $\omega = \sqrt{k_e/m}$ é a frequência angular de vibração da partícula de massa m .

- Aplicando os princípios da mecânica quântica, obtém-se que a energia do sistema é quantizada e:

$$E = E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega,$$

onde $\hbar = h/2\pi$ e $h \approx 6,63 \times 10^{-34} \text{J.s}$ é a constante de Planck.

2) Sólido de Einstein

- A energia potencial de um oscilador harmônico simples é:

$$V(x) = \frac{1}{2} k_e x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2,$$

onde k_e é a constante elástica da mola e $\omega = \sqrt{k_e/m}$ é a frequência angular de vibração da partícula de massa m .

- Aplicando os princípios da mecânica quântica, obtém-se que a energia do sistema é quantizada e:

$$E = E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega,$$

onde $\hbar = h/2\pi$ e $h \approx 6,63 \times 10^{-34} \text{J.s}$ é a constante de Planck.

Para o estado fundamental ($n = 0$) tem-se que $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$.

2) Sólido de Einstein

- A energia potencial de um oscilador harmônico simples é:

$$V(x) = \frac{1}{2} k_e x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2,$$

onde k_e é a constante elástica da mola e $\omega = \sqrt{k_e/m}$ é a frequência angular de vibração da partícula de massa m .

- Aplicando os princípios da mecânica quântica, obtém-se que a energia do sistema é quantizada e:

$$E = E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega,$$

onde $\hbar = h/2\pi$ e $h \approx 6,63 \times 10^{-34} \text{J.s}$ é a constante de Planck.

Para o estado fundamental ($n = 0$) tem-se que $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$.

A diferença entre dois níveis adjacentes é independente de n :

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \hbar \omega$$

2) Sólido de Einstein

Para o estado fundamental ($n = 0$) tem-se que $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$

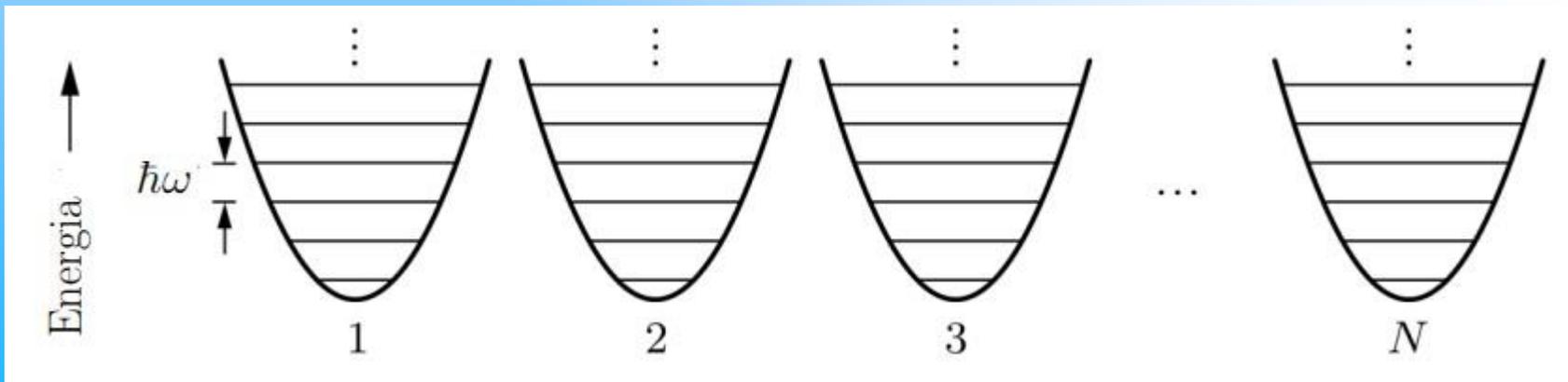
A diferença entre dois níveis adjacentes é independente de n : $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \hbar \omega$

2) Sólido de Einstein

Para o estado fundamental ($n = 0$) tem-se que $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$

A diferença entre dois níveis adjacentes é independente de n : $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \hbar \omega$

A figura abaixo mostra de forma abstrata os N osciladores harmônicos em termos da energia (N osciladores harmônicos constituindo o sólido de Einstein).



2) Sólido de Einstein (ejemplo: $N=3$)

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=3$)

Analisemos um pequeno sólido de Einstein com $N = 3$ osciladores. A unidade de energia se refere a $\hbar\omega$ em relação à energia E_0 do estado fundamental.

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=3$)

Analisemos um pequeno sólido de Einstein com $N = 3$ osciladores. A unidade de energia se refere a $\hbar\omega$ em relação à energia E_0 do estado fundamental.

Para até 3 unidades de energia temos a seguinte tabela de microestados:

Oscilador:	1	2	3
Unidades de energia:	0	0	0
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1
	2	0	0
	0	2	0
	0	0	2
	1	1	0
	1	0	1
	0	1	1

Oscilador:	1	2	3
Unidades de energia:	3	0	0
	0	3	0
	0	0	3
	2	1	0
	2	0	1
	1	2	0
	0	2	1
	1	0	2
	0	1	2
	1	1	1

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=3$)

Analisemos um pequeno sólido de Einstein com $N = 3$ osciladores. A unidade de energia se refere a $\hbar\omega$ em relação à energia E_0 do estado fundamental.

Para até 3 unidades de energia temos a seguinte tabela de microestados:

Oscilador:	1	2	3
Unidades de energia:	0	0	0
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1
	2	0	0
	0	2	0
	0	0	2
	1	1	0
	1	0	1
	0	1	1

Oscilador:	1	2	3
Unidades de energia:	3	0	0
	0	3	0
	0	0	3
	2	1	0
	2	0	1
	1	2	0
	0	2	1
	1	0	2
	0	1	2
	1	1	1

$$\Omega(0) = 1, \quad \Omega(1) = 3, \quad \Omega(2) = 6, \quad \Omega(3) = 10$$

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=3$)

- Observa-se as multiplicidades

$$\Omega(0) = 1, \quad \Omega(1) = 3, \quad \Omega(2) = 6, \quad \Omega(3) = 10$$

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=3$)

- Observa-se as multiplicidades

$$\Omega(0) = 1, \quad \Omega(1) = 3, \quad \Omega(2) = 6, \quad \Omega(3) = 10$$

- A multiplicidade para um sólido de Einstein com N osciladores e q unidades de energia é dada por

$$\Omega(N, q) = \binom{q + N - 1}{q} = \frac{(q + N - 1)!}{q! (N - 1)!}$$

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=4$)

- A multiplicidade para um sólido de Einstein com N osciladores e q unidades de energia:

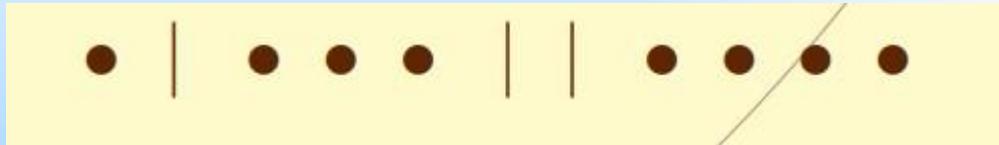
$$\Omega(N, q) = \binom{q + N - 1}{q} = \frac{(q + N - 1)!}{q! (N - 1)!}$$

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=4$)

- A multiplicidade para um sólido de Einstein com N osciladores e q unidades de energia:

$$\Omega(N, q) = \binom{q + N - 1}{q} = \frac{(q + N - 1)!}{q! (N - 1)!}$$

- Prova pela representação gráfica: representemos a unidade de energia com um círculo cheio e uma linha vertical para a divisória entre dois osciladores. Para $N=4$:



temos 4 osciladores, na sequência da esquerda para a direita, com $q = 1, 3, 0$ e 4.

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=4$)

- A multiplicidade para um sólido de Einstein com N osciladores e q unidades de energia:

$$\Omega(N, q) = \binom{q + N - 1}{q} = \frac{(q + N - 1)!}{q! (N - 1)!}$$

- Prova pela representação gráfica: representemos a unidade de energia com um círculo cheio e uma linha vertical para a divisória entre dois osciladores. Para $N=4$:



temos 4 osciladores, na sequência da esquerda para a direita, com $q = 1, 3, 0$ e 4 .

- De forma geral, para um sistema com N osciladores haverá $N - 1$ linhas verticais. Para um dado macroestado com q círculos cheios, haverá sempre $q + (N - 1)$ símbolos.

2) Sólido de Einstein (exemplo: $N=4$)

- A multiplicidade para um sólido de Einstein com N osciladores e q unidades de energia:

$$\Omega(N, q) = \binom{q + N - 1}{q} = \frac{(q + N - 1)!}{q! (N - 1)!}$$

- Prova pela representação gráfica: representemos a unidade de energia com um círculo cheio e uma linha vertical para a divisória entre dois osciladores. Para $N=4$:



temos 4 osciladores, na sequência da esquerda para a direita, com $q=1, 3, 0$ e 4.

- De forma geral, para um sistema com N osciladores haverá $N - 1$ linhas verticais. Para um dado macroestado com q círculos cheios, haverá sempre $q + (N - 1)$ símbolos.
- O número de maneiras de se obter q círculos cheios entre os $q + (N - 1)$ símbolos é

$$\binom{q + N - 1}{q}$$

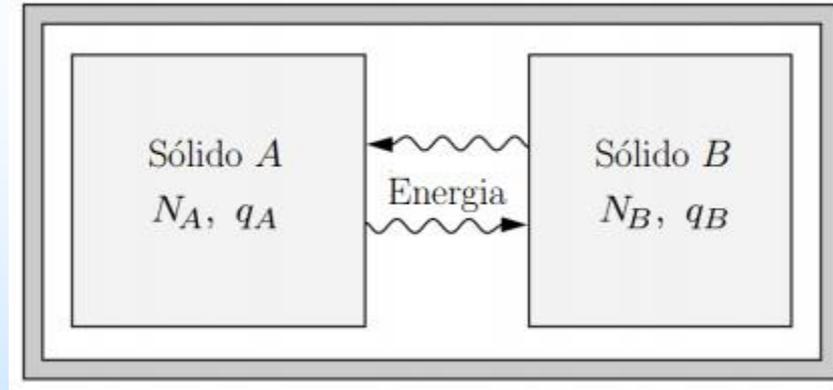
Exercícios

2. Para o sólido de Einstein com três osciladores, liste todos os microestados com quatro unidades de energia, utilizando o formato da tabela da página 59. Qual a multiplicidade desse macroestado?
3. Considere um sistema com dois sólidos de Einstein, A e B , cada um contendo 10 osciladores, compartilhando um total de 20 unidades de energia. Assuma que os sólidos sejam fracamente acoplados e que a energia total seja mantida fixa.
 - (a) Quantos diferentes macroestados estão disponíveis para este sistema?
 - (b) Quantos diferentes microestados estão disponíveis para este sistema?
 - (c) Assumindo que o sistema esteja em equilíbrio térmico, qual a probabilidade de encontrar toda a energia no sólido A ?
 - (d) Qual a probabilidade de encontrar exatamente metade da energia no sólido A ?
 - (e) Sob que circunstâncias este sistema exibiria um comportamento irreversível?

3) Sistemas interagentes

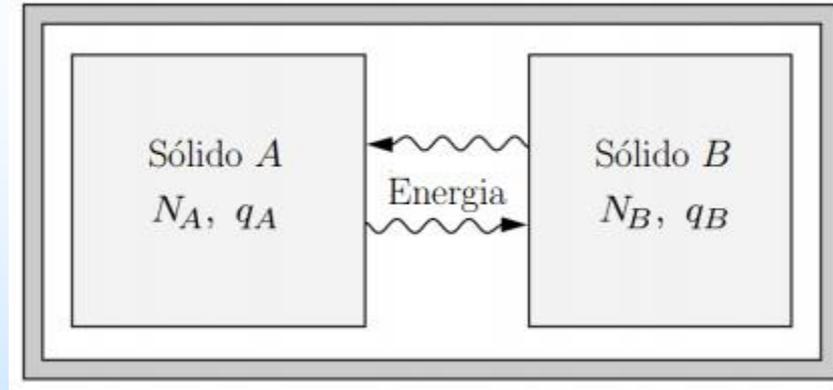
3) Sistemas interagentes

- Com o objetivo de entender o fluxo de calor e processos irreversíveis, vamos considerar um sistema formado por 2 sólidos de Einstein que podem trocar energia entre si.



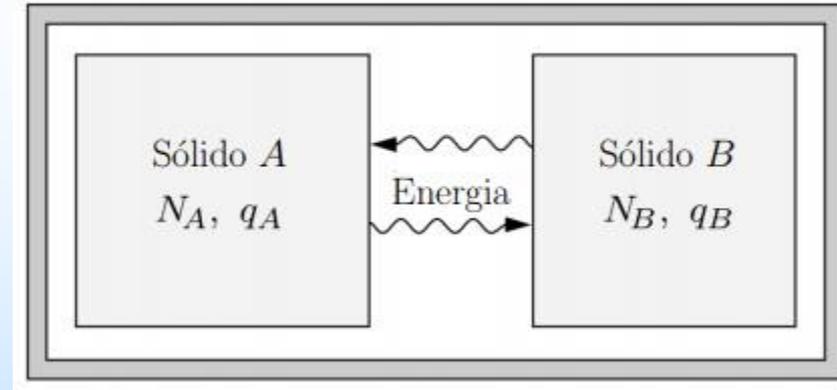
3) Sistemas interagentes

- Com o objetivo de entender o fluxo de calor e processos irreversíveis, vamos considerar um sistema formado por 2 sólidos de Einstein que podem trocar energia entre si.
- Por simplicidade, assumiremos que os dois sólidos estão fracamente acoplados, i.e., a troca de energia entre eles é muito mais lenta do que a troca de energia entre os átomos de um mesmo sólido. (U_A e U_B mudam lentamente).



3) Sistemas interagentes

- Com o objetivo de entender o fluxo de calor e processos irreversíveis, vamos considerar um sistema formado por 2 sólidos de Einstein que podem trocar energia entre si.

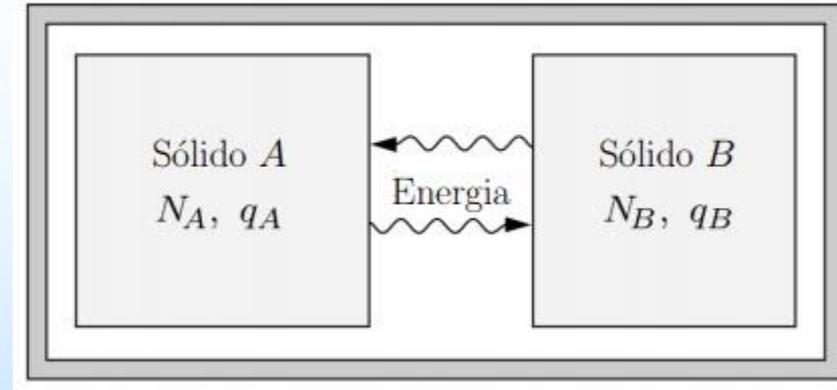


- Por simplicidade, assumiremos que os dois sólidos estão fracamente acoplados, i.e., a troca de energia entre eles é muito mais lenta do que a troca de energia entre os átomos de um mesmo sólido. (U_A e U_B mudam lentamente).
- Contudo, num período longo de tempo, U_A e U_B devem mudar, mas

$$U_{total} = U_A + U_B \text{ é mantida fixa.}$$

3) Sistemas interagentes

- Com o objetivo de entender o fluxo de calor e processos irreversíveis, vamos considerar um sistema formado por 2 sólidos de Einstein que podem trocar energia entre si.



- Por simplicidade, assumiremos que os dois sólidos estão fracamente acoplados, i.e., a troca de energia entre eles é muito mais lenta do que a troca de energia entre os átomos de um mesmo sólido. (U_A e U_B mudam lentamente).
- Contudo, num período longo de tempo, U_A e U_B devem mudar, mas
$$U_{total} = U_A + U_B \text{ é mantida fixa.}$$
- Consideremos – para facilitar a compreensão – 2 sólidos com 3 osciladores cada e uma energia total de 6 unidades ($\hbar\omega$):

$$N_A = N_B = 3; \quad q_{total} = q_A + q_B = 6.$$

3) Sistemas interagentes

- 2 sólidos com 3 osciladores cada e uma energia total de 6 unidades ($\hbar\omega$):

$$N_A = N_B = 3; \quad q_{total} = q_A + q_B = 6$$

3) Sistemas interagentes

- 2 sólidos com 3 osciladores cada e uma energia total de 6 unidades ($\hbar\omega$):

$$N_A = N_B = 3; \quad q_{total} = q_A + q_B = 6$$

- Cada valor q_A (ou q_B) descreve um determinado macroestado do sistema: como $q_A = 0, 1, \dots, 6$, há um total de **7 macroestados** possíveis.

3) Sistemas interagentes

- 2 sólidos com 3 osciladores cada e uma energia total de 6 unidades ($\hbar\omega$):

$$N_A = N_B = 3; \quad q_{total} = q_A + q_B = 6$$

- Cada valor q_A (ou q_B) descreve um determinado macroestado do sistema: como $q_A = 0, 1, \dots, 6$, há um total de **7 macroestados** possíveis. Cada um desses macroestados possui multiplicidades Ω_A e Ω_B , relacionadas ao sólidos A e B, que podem ser calculadas por

$$\Omega_i = \binom{q_i + N - 1}{q_i}$$

3) Sistemas interagentes

- 2 sólidos com 3 osciladores cada e uma energia total de 6 unidades ($\hbar\omega$):

$$N_A = N_B = 3; \quad q_{total} = q_A + q_B = 6$$

- Cada valor q_A (ou q_B) descreve um determinado macroestado do sistema: como $q_A = 0, 1, \dots, 6$, há um total de **7 macroestados** possíveis. Cada um desses macroestados possui multiplicidades Ω_A e Ω_B , relacionadas ao sólidos A e B, que podem ser calculadas por

$$\Omega_i = \binom{q_i + N - 1}{q_i}$$

- A multiplicidade total de qualquer macroestado, Ω_{total} , é dada pelo produto das multiplicidades individuais, visto que os dois sistemas são independentes um do outro:

$$\Omega_{total} = \Omega_A \Omega_B$$

3) Sistemas interagentes

- 2 sólidos com 3 osciladores cada e uma energia total de 6 unidades ($\hbar\omega$):

$$N_A = N_B = 3; \quad q_{total} = q_A + q_B = 6$$

- Cada valor q_A (ou q_B) descreve um determinado macroestado do sistema: como $q_A = 0, 1, \dots, 6$, há um total de **7 macroestados** possíveis. Cada um desses macroestados possui multiplicidades Ω_A e Ω_B , relacionadas ao sólidos A e B, que podem ser calculadas por

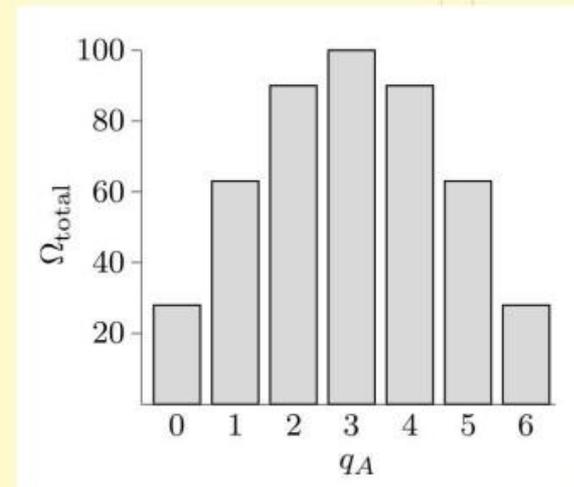
$$\Omega_i = \binom{q_i + N - 1}{q_i}$$

- A multiplicidade total de qualquer macroestado, Ω_{total} , é dada pelo produto das multiplicidades individuais, visto que os dois sistemas são independentes um do outro:

$$\Omega_{total} = \Omega_A \Omega_B$$

q_A	Ω_A	q_B	Ω_B	$\Omega_{total} = \Omega_A \Omega_B$
0	1	6	28	28
1	3	5	21	63
2	6	4	15	90
3	10	3	10	100
4	15	2	6	90
5	21	1	3	63
6	28	0	1	28

$$462 = \binom{6+6-1}{6}$$



3) Sistemas interagentes

- Consideremos uma hipótese ambiciosa:
A energia circula aleatoriamente dentro de uma escala de tempo muito grande, tal que todos os 462 microestados sejam igualmente prováveis.

3) Sistemas interagentes

- Consideremos uma hipótese ambiciosa:
A energia circula aleatoriamente dentro de uma escala de tempo muito grande, tal que todos os 462 microestados sejam igualmente prováveis.
- A hipótese acima, de que todos os microestados de um sistema sejam igualmente prováveis é conhecida como **hipótese fundamental da mecânica estatística**:

“Em um sistema isolado em equilíbrio térmico, todos os microestados acessíveis são igualmente prováveis”

3) Sistemas interagentes

- Consideremos uma hipótese ambiciosa:
A energia circula aleatoriamente dentro de uma escala de tempo muito grande, tal que todos os 462 microestados sejam igualmente prováveis.
- A hipótese acima, de que todos os microestados de um sistema sejam igualmente prováveis é conhecida como **hipótese fundamental da mecânica estatística**:

“Em um sistema isolado em equilíbrio térmico, todos os microestados acessíveis são igualmente prováveis”

- Como todos os microestados são igualmente prováveis, temos que alguns macroestados (aqueles que possuem multiplicidades grandes) são mais prováveis que outros. No caso deste exemplo, com $N_A = N_B = 3$ e $q_{total} = q_A + q_B = 6$, o macroestado mais provável é aquele com $q_A = q_B = 3$.
⇒ A probabilidade de encontrar o sistema nesse macroestado é $100/462$.

3) Sistemas interagentes

- **Outro exemplo:** 2 sólidos de Einstein com algumas centenas de osciladores harmônicos cada e um número dessa ordem de grandeza de unidades de energia.

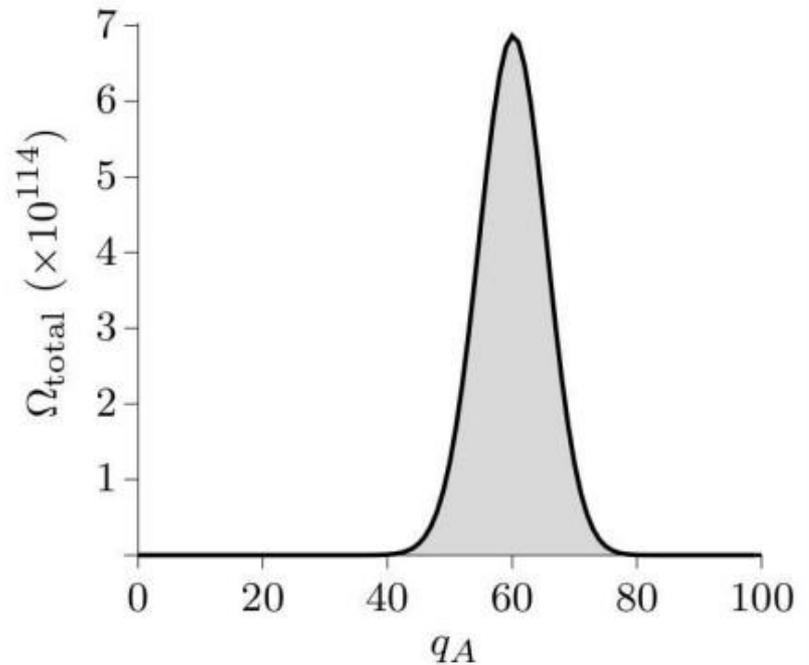
$$N_A = 300, \quad N_B = 200, \quad q_{total} = q_A + q_B = 100.$$

- # de macroestados = 101, visto que $q_A = 0, 1, 2, \dots, 100$.
- Uma rápida inspeção: para N e q da ordem de uma centena, deparamo-nos com números muito grandes.
- Mesmo para o macroestado com menor multiplicidade, como $q_A = 0$ (ou $q_B = 100$), a multiplicidade total é

$$\Omega_{total} = \Omega_A \Omega_B = \binom{300 + 0 - 1}{0} \binom{200 + 100 - 1}{100} = 2,8 \times 10^{81}$$

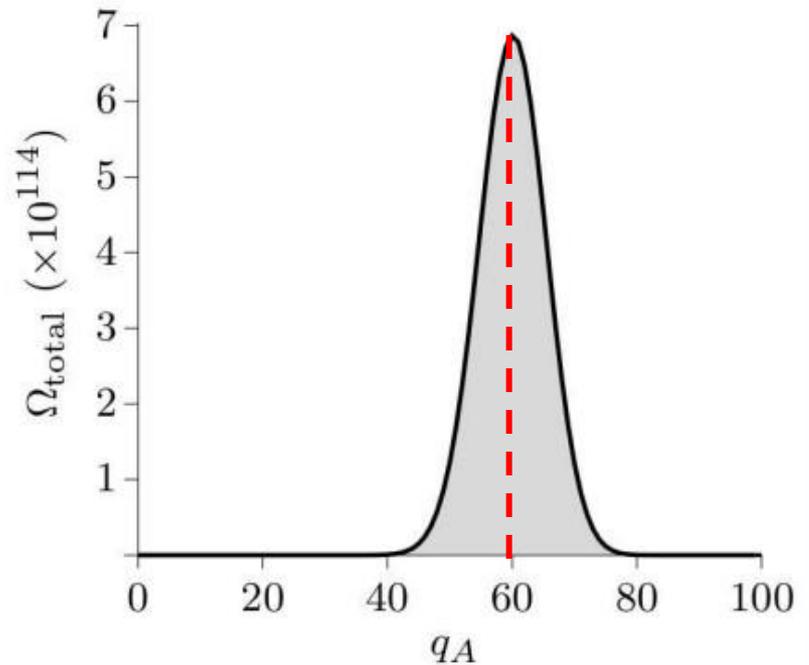
3) Sistemas interagentes

q_A	Ω_A	q_B	Ω_B	Ω_{total}
0	1	100	2.8×10^{81}	2.8×10^{81}
1	300	99	9.3×10^{80}	2.8×10^{83}
2	45150	98	3.1×10^{80}	1.4×10^{85}
3	4545100	97	1.0×10^{80}	4.6×10^{86}
4	3.4×10^8	96	3.3×10^{79}	1.1×10^{88}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
59	2.2×10^{68}	41	3.1×10^{46}	6.8×10^{114}
60	1.3×10^{69}	40	5.3×10^{45}	6.9×10^{114}
61	7.7×10^{69}	39	8.8×10^{44}	6.8×10^{114}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
100	1.7×10^{96}	0	1	1.7×10^{96}
				9.3×10^{115}



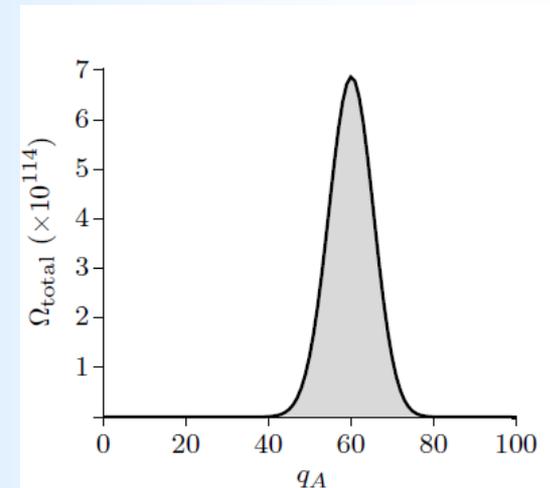
3) Sistemas interagentes

q_A	Ω_A	q_B	Ω_B	Ω_{total}
0	1	100	2.8×10^{81}	2.8×10^{81}
1	300	99	9.3×10^{80}	2.8×10^{83}
2	45150	98	3.1×10^{80}	1.4×10^{85}
3	4545100	97	1.0×10^{80}	4.6×10^{86}
4	3.4×10^8	96	3.3×10^{79}	1.1×10^{88}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
59	2.2×10^{68}	41	3.1×10^{46}	6.8×10^{114}
60	1.3×10^{69}	40	5.3×10^{45}	6.9×10^{114}
61	7.7×10^{69}	39	8.8×10^{44}	6.8×10^{114}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
100	1.7×10^{96}	0	1	1.7×10^{96}
				9.3×10^{115}



3) Sistemas interagentes

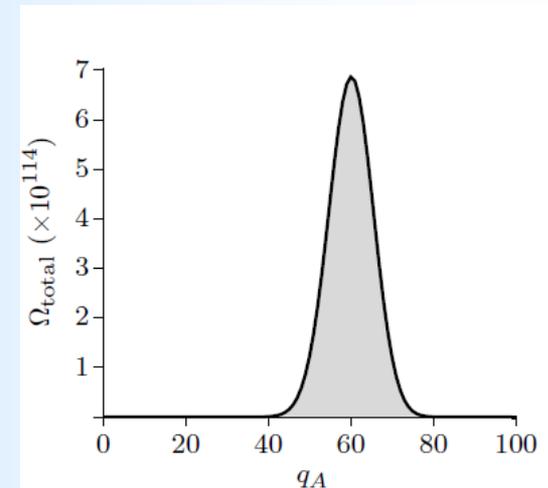
- Observa-se que o macroestado com maior multiplicidade é aquele com $q_A = 60$, cuja multiplicidade total é $\Omega_{total} = 6,9 \times 10^{114}$.



3) Sistemas interagentes

- Observa-se que o macroestado com maior multiplicidade é aquele com $q_A = 60$, cuja multiplicidade total é $\Omega_{total} = 6,9 \times 10^{114}$. Como o número total de microestados é de $9,3 \times 10^{115}$, a probabilidade de encontrar o sistema no macroestado mais provável é

$$\frac{6,9 \times 10^{114}}{9,3 \times 10^{115}} \approx 0,07 = 7\%$$

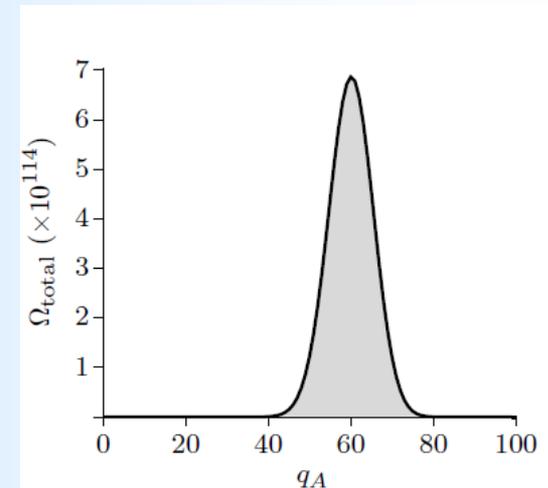


3) Sistemas interagentes

- Observa-se que o macroestado com maior multiplicidade é aquele com $q_A = 60$, cuja multiplicidade total é $\Omega_{total} = 6,9 \times 10^{114}$. Como o número total de microestados é de $9,3 \times 10^{115}$, a probabilidade de encontrar o sistema no macroestado mais provável é

$$\frac{6,9 \times 10^{114}}{9,3 \times 10^{115}} \approx 0,07 = 7\%$$

- Como ilustrado na figura, macroestados em torno de $q_A = 60$ possuem multiplicidade comparável a este, mas decai muito rapidamente à medida que q_A afasta-se desse valor.
 - p.ex.: $q_A < 30$ ou $q_A > 90$ é menor que 10^{-6}
 - $q_A < 10$ é menor que 10^{-20}



3) Sistemas interagentes

- Observa-se que o macroestado com maior multiplicidade é aquele com $q_A = 60$, cuja multiplicidade total é $\Omega_{total} = 6,9 \times 10^{114}$. Como o número total de microestados é de $9,3 \times 10^{115}$, a probabilidade de encontrar o sistema no macroestado mais provável é

$$\frac{6,9 \times 10^{114}}{9,3 \times 10^{115}} \approx 0,07 = 7\%$$

- Como ilustrado na figura, macroestados em torno de $q_A = 60$ possuem multiplicidade comparável a este, mas decai muito rapidamente à medida que q_A afasta-se desse valor.
 - p.ex.: $q_A < 30$ ou $q_A > 90$ é menor que 10^{-6}
 - $q_A < 10$ é menor que 10^{-20}
- Suponha que inicialmente q_A seja muito pequeno, ou seja, quase toda a energia do sistema esteja no sólido B. Com o passar do tempo, o sistema tenderá a atingir o macroestado com maior multiplicidade. Ou seja, a energia flui espontaneamente de B para A e não ao contrário.

3) Sistemas interagentes

- Observa-se que o macroestado com maior multiplicidade é aquele com $q_A = 60$, cuja multiplicidade total é $\Omega_{total} = 6,9 \times 10^{114}$. Como o número total de microestados é de $9,3 \times 10^{115}$, a probabilidade de encontrar o sistema no macroestado mais provável é

$$\frac{6,9 \times 10^{114}}{9,3 \times 10^{115}} \approx 0,07 = 7\%$$

- Como ilustrado na figura, macroestados em torno de $q_A = 60$ possuem multiplicidade comparável a este, mas decai muito rapidamente à medida que q_A afasta-se desse valor.
 - p.ex.: $q_A < 30$ ou $q_A > 90$ é menor que 10^{-6}
 - $q_A < 10$ é menor que 10^{-20}
- Suponha que inicialmente q_A seja muito pequeno, ou seja, quase toda a energia do sistema esteja no sólido B. Com o passar do tempo, o sistema tenderá a atingir o macroestado com maior multiplicidade. Ou seja, a energia flui espontaneamente de B para A e não ao contrário.
- Explicação física: **o calor é um fenômeno probabilístico.**

3) Sistemas interagentes

- O fluxo de energia irá parar quando o sistema atingir o macroestado mais provável (ou chegar bem próximo dele), que é aquele com maior multiplicidade.

3) Sistemas interagentes

- O fluxo de energia irá parar quando o sistema atingir o macroestado mais provável (ou chegar bem próximo dele), que é aquele com maior multiplicidade.
⇒ “Lei do aumento da multiplicidade”: uma das versões da segunda lei da termodinâmica.

3) Sistemas interagentes

- O fluxo de energia irá parar quando o sistema atingir o macroestado mais provável (ou chegar bem próximo dele), que é aquele com maior multiplicidade.
⇒ “Lei do aumento da multiplicidade”: uma das versões da segunda lei da termodinâmica.
- Numa situação realística, onde se observa a validade dessa lei, devemos considerar sistemas não somente com centenas de partículas (osciladores), mas algo em torno de 10^{23} . Isso exige uma manipulação matemática envolvendo o fatorial de um número grande, que é um número muito grande.

4) Sistemas grandes

4) Sistemas grandes

Basicamente há 3 tipos de números que ocorrem em mecânica estatística:

- Números pequenos: São aqueles da ordem de uma dezena ou centena, p.ex., 23.

4) Sistemas grandes

Basicamente há 3 tipos de números que ocorrem em mecânica estatística:

- Números pequenos: São aqueles da ordem de uma dezena ou centena, p.ex., 23.
- Números grandes: São aqueles da ordem do número de Avogadro ($\sim 10^{23}$). Neste caso,

$$10^{23} + 23 \approx 10^{23}$$

- Um número pequeno pode não ser desprezível se envolver uma subtração de números grandes: $10^{23} + 42 - 10^{23} = 42$

4) Sistemas grandes

Basicamente há 3 tipos de números que ocorrem em mecânica estatística:

- Números pequenos: São aqueles da ordem de uma dezena ou centena, p.ex., 23.
- Números grandes: São aqueles da ordem do número de Avogadro ($\sim 10^{23}$). Neste caso,

$$10^{23} + 23 \approx 10^{23}$$

- Um número pequeno pode não ser desprezível se envolver uma subtração de números grandes: $10^{23} + 42 - 10^{23} = 42$

- Números muito grandes: São produzidos a partir da exponenciação de números grandes, p.ex., $10^{10^{23}}$. A seguinte propriedade multiplicativa se observa para esses números

$$10^{10^{23}} \times 10^{23} = 10^{(10^{23}+23)} \approx 10^{10^{23}}$$

4) Sistemas grandes

Basicamente há 3 tipos de números que ocorrem em mecânica estatística:

- Números pequenos: São aqueles da ordem de uma dezena ou centena, p.ex., 23.
- Números grandes: São aqueles da ordem do número de Avogadro ($\sim 10^{23}$). Neste caso,

$$10^{23} + 23 \approx 10^{23}$$

- Um número pequeno pode não ser desprezível se envolver uma subtração de números grandes: $10^{23} + 42 - 10^{23} = 42$

- Números muito grandes: São produzidos a partir da exponenciação de números grandes, p.ex., $10^{10^{23}}$. A seguinte propriedade multiplicativa se observa para esses números

$$10^{10^{23}} \times 10^{23} = 10^{(10^{23}+23)} \approx 10^{10^{23}}$$

Truque para manipular números muito grandes: \Rightarrow tomar o logaritmo

Exercício

4. A função logaritmo natural, \ln , é definida tal que $e^{\ln x} = x$, para x positivo qualquer.

(a) Esboce o gráfico do logaritmo natural.

(b) Prove as identidades $\ln ab = \ln a + \ln b$ e $\ln a^b = b \ln a$.

(c) Prove que $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$.

(d) Derive a aproximação

$$\ln(1 + x) \approx x$$

que é válida quando $|x| \ll 1$. Utilize uma calculadora para checar a precisão desta aproximação para $x = 0,1$ e $x = 0,01$.

Dica: a **série de Taylor** de \ln em torno de $x = 0$ é dada por

$$f(x) = f(0) + \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x) \Big|_{x=0} x^2 + \dots$$

Aproximação de Stirling

- Para $N \gg 1$, o fatorial de N pode ser aproximado por

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$$

Expressão conhecida como **aproximação de Stirling**.

5. Utilize uma calculadora de bolso para checar a aproximação de Stirling. Para $N = 1, 10$ e 100 , obtenha $\ln N!$, $N \ln N - N$ e o erro relativo entre as duas expressões.

Aproximação de Stirling

- Para $N \gg 1$, o fatorial de N pode ser aproximado por

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$$

Expressão conhecida como **aproximação de Stirling**.

5. Utilize uma calculadora de bolso para checar a aproximação de Stirling. Para $N = 1, 10$ e 100 , obtenha $\ln N!$, $N \ln N - N$ e o erro relativo entre as duas expressões.

- Vamos reescrever a multiplicidade de um sólido de Einstein contendo um grande número de osciladores e unidades de energia. Particularmente, consideremos $q \gg N$, que é conhecido como o **limite de altas temperaturas**.

Aproximação de Stirling

- Para $N \gg 1$, o fatorial de N pode ser aproximado por

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$$

Expressão conhecida como **aproximação de Stirling**.

5. Utilize uma calculadora de bolso para checar a aproximação de Stirling. Para $N = 1, 10$ e 100 , obtenha $\ln N!$, $N \ln N - N$ e o erro relativo entre as duas expressões.

- Vamos reescrever a multiplicidade de um sólido de Einstein contendo um grande número de osciladores e unidades de energia. Particularmente, consideremos $q \gg N$, que é conhecido como o **limite de altas temperaturas**.
- Temos que para $q, N \gg 1$,

$$\Omega(N, q) = \binom{q + N - 1}{q} = \frac{(q + N - 1)!}{q! (N - 1)!} \approx \frac{(q + N)!}{q! N!}$$

Multiplicidade de um sólido de Einstein grande

- Tomando o logaritmo natural de $\Omega(N, q)$ e usando a aproximação de Stirling:

$$\ln \Omega(N, q) = \ln \left(\frac{(q + N)!}{q! N!} \right) = \ln(q + N)! - \ln q! - \ln N!$$

Multiplicidade de um sólido de Einstein grande

- Tomando o logaritmo natural de $\Omega(N, q)$ e usando a aproximação de Stirling:

$$\ln \Omega(N, q) = \ln \left(\frac{(q + N)!}{q! N!} \right) = \ln(q + N)! - \ln q! - \ln N!$$

$$\approx (q + N) \ln(q + N) - (q + N) - q \ln q + q - N \ln N + N$$

Multiplicidade de um sólido de Einstein grande

- Tomando o logaritmo natural de $\Omega(N, q)$ e usando a aproximação de Stirling:

$$\ln \Omega(N, q) = \ln \left(\frac{(q + N)!}{q! N!} \right) = \ln(q + N)! - \ln q! - \ln N!$$

$$\approx (q + N) \ln(q + N) - \cancel{(q + N)} - q \ln q + \cancel{q} - N \ln N + \cancel{N}$$

$$= (q + N) \ln(q + N) - q \ln q - N \ln N$$

Multiplicidade de um sólido de Einstein grande

- Tomando o logaritmo natural de $\Omega(N, q)$ e usando a aproximação de Stirling:

$$\ln \Omega(N, q) = \ln \left(\frac{(q + N)!}{q! N!} \right) = \ln(q + N)! - \ln q! - \ln N!$$

$$\approx (q + N) \ln(q + N) - \cancel{(q + N)} - q \ln q + \cancel{q} - N \ln N + \cancel{N}$$

$$= (q + N) \ln(q + N) - q \ln q - N \ln N$$

- Usando a suposição que $q \gg N$:

$$\ln(q + N) = \ln \left[q \left(1 + \frac{N}{q} \right) \right] = \ln q + \ln \left(1 + \frac{N}{q} \right) \approx \ln q + \frac{N}{q}$$

Multiplicidade de um sólido de Einstein grande

- Tomando o logaritmo natural de $\Omega(N, q)$ e usando a aproximação de Stirling:

$$\ln \Omega(N, q) = \ln \left(\frac{(q + N)!}{q! N!} \right) = \ln(q + N)! - \ln q! - \ln N!$$

$$\approx (q + N) \ln(q + N) - \cancel{(q + N)} - q \ln q + \cancel{q} - N \ln N + \cancel{N}$$

$$= (q + N) \ln(q + N) - q \ln q - N \ln N$$

- Usando a suposição que $q \gg N$:

$$\ln(q + N) = \ln \left[q \left(1 + \frac{N}{q} \right) \right] = \ln q + \ln \left(1 + \frac{N}{q} \right) \approx \ln q + \frac{N}{q}$$

$$\ln \Omega \approx (q + N) \left(\ln q + \frac{N}{q} \right) - q \ln q - N \ln N$$

Multiplicidade de um sólido de Einstein grande

- Tomando o logaritmo natural de $\Omega(N, q)$ e usando a aproximação de Stirling:

$$\ln \Omega(N, q) = \ln \left(\frac{(q + N)!}{q! N!} \right) = \ln(q + N)! - \ln q! - \ln N!$$

$$\approx (q + N) \ln(q + N) - \cancel{(q + N)} - q \ln q + \cancel{q} - N \ln N + \cancel{N}$$

$$= (q + N) \ln(q + N) - q \ln q - N \ln N$$

- Usando a suposição que $q \gg N$:

$$\ln(q + N) = \ln \left[q \left(1 + \frac{N}{q} \right) \right] = \ln q + \ln \left(1 + \frac{N}{q} \right) \approx \ln q + \frac{N}{q}$$

$$\ln \Omega \approx (q + N) \left(\ln q + \frac{N}{q} \right) - q \ln q - N \ln N$$

$$\Rightarrow \ln \Omega \approx N \ln \frac{q}{N} + N + \frac{N^2}{q}$$

Multiplicidade de um sólido de Einstein grande

- No limite $q \gg N$ o termo N^2/q é desprezível. Exponenciando ambos os lados:

$$e^{\ln \Omega} = e^{N \ln \frac{q}{N}} e^N \Rightarrow \Omega = \left(\frac{eq}{N} \right)^N (q \gg N)$$

Multiplicidade de um sólido de Einstein grande

- No limite $q \gg N$ o termo N^2/q é desprezível. Exponenciando ambos os lados:

$$e^{\ln \Omega} = e^{N \ln \frac{q}{N}} e^N \Rightarrow \Omega = \left(\frac{eq}{N} \right)^N (q \gg N)$$

- Utilize o método similar ao caso de altas temperaturas ($q \gg N$), para derivar a fórmula da multiplicidade de um sólido de Einstein no limite a baixas temperaturas, $q \ll N$.

