

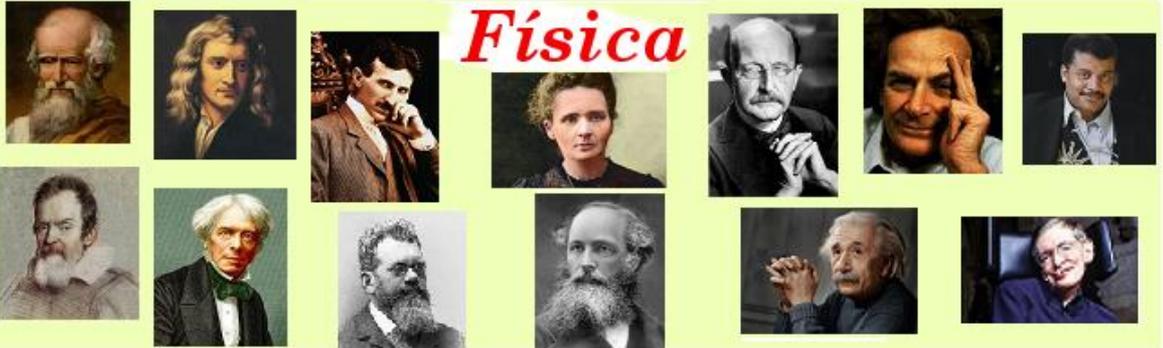


Universidade Federal do ABC

Mecânica Estatística

PEF-112

MNPEF Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física
Polo UFABC



Prof. Dr. Marcelo A. Leigui de Oliveira

Centro de Ciências Naturais e Humanas

[*leigui@ufabc.edu.br*](mailto:leigui@ufabc.edu.br)

Capítulo 7: Estatística quântica

1. Funções de partição para sistemas compostos (Cap.6) (ensemble canônico)
2. O ensemble grande-canônico (fator de Gibbs)
3. Estatística quântica e funções de distribuição de bósons e férmions
4. Radiação de corpo negro

1) Sistemas compostos

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2.

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2. Se essas partículas não interagem entre si, a energia total é simplesmente $E_1 + E_2$

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2. Se essas partículas não interagem entre si, a energia total é simplesmente $E_1 + E_2$ e, portanto:

$$Z_{\text{total}} = \sum_s e^{-\beta[E_1(s)+E_2(s)]}$$

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2. Se essas partículas não interagem entre si, a energia total é simplesmente $E_1 + E_2$ e, portanto:

$$Z_{\text{total}} = \sum_s e^{-\beta[E_1(s)+E_2(s)]} = \sum_s e^{-\beta E_1(s)} e^{-\beta E_2(s)}$$

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2. Se essas partículas não interagem entre si, a energia total é simplesmente $E_1 + E_2$ e, portanto:

$$Z_{\text{total}} = \sum_s e^{-\beta[E_1(s)+E_2(s)]} = \sum_s e^{-\beta E_1(s)} e^{-\beta E_2(s)} ,$$

onde s representa os estados do sistema composto.

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2. Se essas partículas não interagem entre si, a energia total é simplesmente $E_1 + E_2$ e, portanto:

$$Z_{\text{total}} = \sum_s e^{-\beta[E_1(s)+E_2(s)]} = \sum_s e^{-\beta E_1(s)} e^{-\beta E_2(s)} ,$$

onde s representa os estados do sistema composto.

- ❑ Em um sistema clássico, onde as partículas são distinguíveis, o sistema pode ser descrito pelos estados de cada partícula individualmente, através do par (s_1, s_2) .

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2. Se essas partículas não interagem entre si, a energia total é simplesmente $E_1 + E_2$ e, portanto:

$$Z_{\text{total}} = \sum_s e^{-\beta[E_1(s)+E_2(s)]} = \sum_s e^{-\beta E_1(s)} e^{-\beta E_2(s)} ,$$

onde s representa os estados do sistema composto.

- ❑ Em um sistema clássico, onde as partículas são distinguíveis, o sistema pode ser descrito pelos estados de cada partícula individualmente, através do par (s_1, s_2) . Logo,

$$Z_{\text{total}} = \sum_{s_1} \sum_{s_2} e^{-\beta E_1(s_1)} e^{-\beta E_2(s_2)}$$

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2. Se essas partículas não interagem entre si, a energia total é simplesmente $E_1 + E_2$ e, portanto:

$$Z_{\text{total}} = \sum_s e^{-\beta[E_1(s)+E_2(s)]} = \sum_s e^{-\beta E_1(s)} e^{-\beta E_2(s)} ,$$

onde s representa os estados do sistema composto.

- ❑ Em um sistema clássico, onde as partículas são distinguíveis, o sistema pode ser descrito pelos estados de cada partícula individualmente, através do par (s_1, s_2) . Logo,

$$Z_{\text{total}} = \sum_{s_1} \sum_{s_2} e^{-\beta E_1(s_1)} e^{-\beta E_2(s_2)} = \sum_{s_1} e^{-\beta E_1(s_1)} \sum_{s_2} e^{-\beta E_2(s_2)}$$

1) Sistemas compostos

- ❑ Considere um sistema formado por N partículas. O nosso objetivo é escrever a função de partição Z_{total} em termos da função de partição Z_1 de uma única partícula do sistema.
- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas, 1 e 2. Se essas partículas não interagem entre si, a energia total é simplesmente $E_1 + E_2$ e, portanto:

$$Z_{\text{total}} = \sum_s e^{-\beta[E_1(s)+E_2(s)]} = \sum_s e^{-\beta E_1(s)} e^{-\beta E_2(s)} ,$$

onde s representa os estados do sistema composto.

- ❑ Em um sistema clássico, onde as partículas são distinguíveis, o sistema pode ser descrito pelos estados de cada partícula individualmente, através do par (s_1, s_2) . Logo,

$$Z_{\text{total}} = \sum_{s_1} \sum_{s_2} e^{-\beta E_1(s_1)} e^{-\beta E_2(s_2)} = \sum_{s_1} e^{-\beta E_1(s_1)} \sum_{s_2} e^{-\beta E_2(s_2)} ,$$

de forma que:

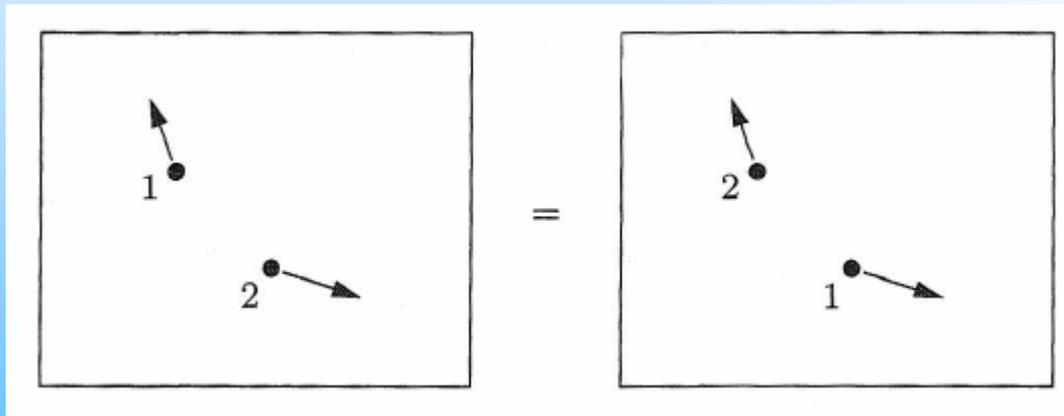
$$Z_{\text{total}} = Z_1 Z_2 .$$

1) Sistemas compostos

- ❑ Quando descrevemos sistemas quânticos, é sabido que partículas iguais são indistinguíveis, ou seja, o estado do sistema não muda se efetuarmos a troca de estado entre duas partículas indistinguíveis.

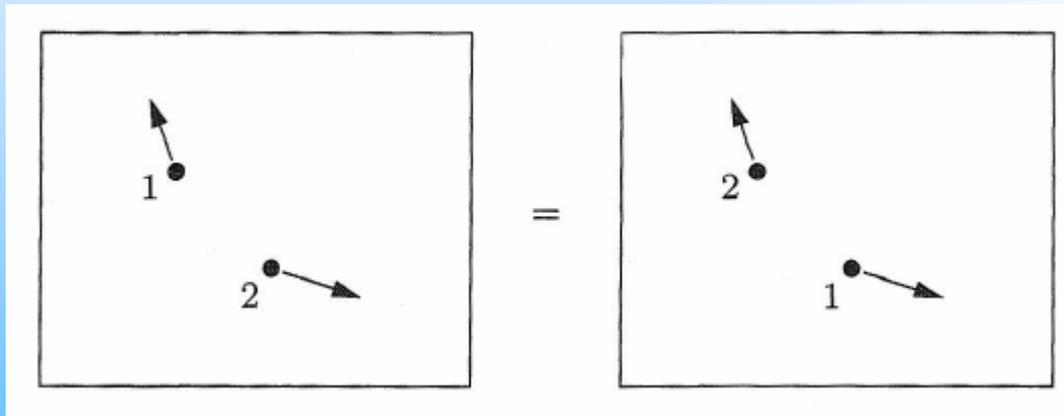
1) Sistemas compostos

- Quando descrevemos sistemas quânticos, é sabido que partículas iguais são indistinguíveis, ou seja, o estado do sistema não muda se efetuarmos a troca de estado entre duas partículas indistinguíveis.
 - Na figura abaixo, colocar a partícula 1 no estado *A* e a partícula 2 no estado *B* é o mesmo que colocar a partícula 2 no estado *A* e a partícula 1 no estado *B*:



1) Sistemas compostos

- Quando descrevemos sistemas quânticos, é sabido que partículas iguais são indistinguíveis, ou seja, o estado do sistema não muda se efetuarmos a troca de estado entre duas partículas indistinguíveis.
 - Na figura abaixo, colocar a partícula 1 no estado *A* e a partícula 2 no estado *B* é o mesmo que colocar a partícula 2 no estado *A* e a partícula 1 no estado *B*:



- Para evitar a dupla contagem, dividimos por um fator 2:

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{2} Z_1 Z_2$$

1) Sistemas compostos

- ❑ A expressão de Z_{total} obtida anteriormente não é precisamente correta, pois o fator 2 dividindo para compensar a contagem dupla não vale quando dois estados são iguais, ou seja, quando $s_1 = s_2$.

1) Sistemas compostos

- ❑ A expressão de Z_{total} obtida anteriormente não é precisamente correta, pois o fator 2 dividindo para compensar a contagem dupla não vale quando dois estados são iguais, ou seja, quando $s_1 = s_2$.
- ❑ No caso do gás ideal, por ele ser extremamente rarefeito, é altamente improvável que duas moléculas de gás estejam num mesmo estado, portanto a multiplicidade derivada para o gás ideal funciona muito bem.

1) Sistemas compostos

- ❑ A expressão de Z_{total} obtida anteriormente não é precisamente correta, pois o fator 2 dividindo para compensar a contagem dupla não vale quando dois estados são iguais, ou seja, quando $s_1 = s_2$.
- ❑ No caso do gás ideal, por ele ser extremamente rarefeito, é altamente improvável que duas moléculas de gás estejam num mesmo estado, portanto a multiplicidade derivada para o gás ideal funciona muito bem.
- ❑ Os resultados derivados acima podem ser generalizados para um sistema com N partículas não-interagentes

1) Sistemas compostos

- ❑ A expressão de Z_{total} obtida anteriormente não é precisamente correta, pois o fator 2 dividindo para compensar a contagem dupla não vale quando dois estados são iguais, ou seja, quando $s_1 = s_2$.
- ❑ No caso do gás ideal, por ele ser extremamente rarefeito, é altamente improvável que duas moléculas de gás estejam num mesmo estado, portanto a multiplicidade derivada para o gás ideal funciona muito bem.
- ❑ Os resultados derivados acima podem ser generalizados para um sistema com N partículas não-interagentes:
- ❑ Se as N partículas são distinguíveis:

$$Z_{\text{total}} = Z_1 Z_2 \cdots Z_N$$

1) Sistemas compostos

□ Caso as N partículas sejam indistinguíveis, num sistema não muito denso:

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

onde Z_1 é a função de partição de qualquer uma das partículas do sistema.

1) Sistemas compostos

- ❑ Caso as N partículas sejam indistinguíveis, num sistema não muito denso:

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

onde Z_1 é a função de partição de qualquer uma das partículas do sistema.

- ❑ O fator $N!$ é o número de modos pelos quais as N partículas podem ser trocados entre eles.

1) Sistemas compostos

- ❑ Caso as N partículas sejam indistinguíveis, num sistema não muito denso:

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

onde Z_1 é a função de partição de qualquer uma das partículas do sistema.

- ❑ O fator $N!$ é o número de modos pelos quais as N partículas podem ser trocados entre eles.
- ❑ A expressão acima de Z_{total} é o ponto de partida para se obter a função de partição de um gás ideal no formalismo canônico. O assunto não será apresentado neste curso, mas está discutido em detalhes no livro-texto.

1) Sistemas compostos

- ❑ Caso as N partículas sejam indistinguíveis, num sistema não muito denso:

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

onde Z_1 é a função de partição de qualquer uma das partículas do sistema.

- ❑ O fator $N!$ é o número de modos pelos quais as N partículas podem ser trocados entre eles.
- ❑ A expressão acima de Z_{total} é o ponto de partida para se obter a função de partição de um gás ideal no formalismo canônico. O assunto não será apresentado neste curso, mas está discutido em detalhes no livro-texto.
- ❑ Se Z_{total} obtido acima não descreve corretamente um sistema denso, em que mais de uma partícula quer ocupar um mesmo estado de uma única partícula, como podemos descrever esse sistema na mecânica estatística?

1) Sistemas compostos

- ❑ Caso as N partículas sejam indistinguíveis, num sistema não muito denso:

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

onde Z_1 é a função de partição de qualquer uma das partículas do sistema.

- ❑ O fator $N!$ é o número de modos pelos quais as N partículas podem ser trocados entre eles.
- ❑ A expressão acima de Z_{total} é o ponto de partida para se obter a função de partição de um gás ideal no formalismo canônico. O assunto não será apresentado neste curso, mas está discutido em detalhes no livro-texto.
- ❑ Se Z_{total} obtido acima não descreve corretamente um sistema denso, em que mais de uma partícula quer ocupar um mesmo estado de uma única partícula, como podemos descrever esse sistema na mecânica estatística? Veremos que o **formalismo grande canônico** nos fornece as ferramentas necessárias para descrever corretamente esse tipo de sistema.

1) Sistemas compostos - Problema

PEF-112-Mecânica Estatística

Prof. Marcelo Leigui

Lista de Exercícios 8

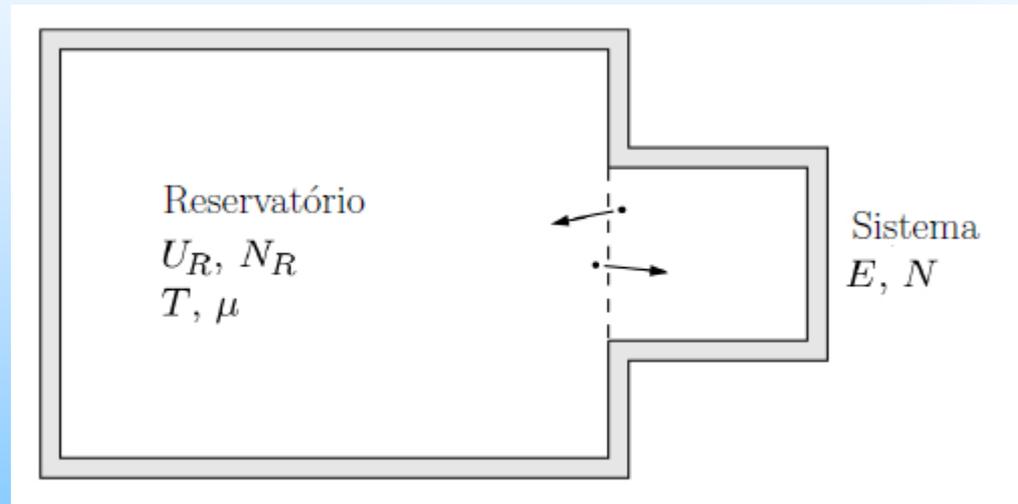
Estatística quântica

1. Considere um grande sistema com N moléculas indistinguíveis não-interagentes.
 - (a) Encontre uma expressão para a energia livre de Helmholtz deste sistema, em termos de Z_1 , a função de partição de uma só molécula. (Dica: use a aproximação de Stirling para eliminar o $N!$);
 - (b) Com o resultado do item anterior, encontre o potencial químico, μ , em termos de Z_1 .

2) Ensemble grande-canônico

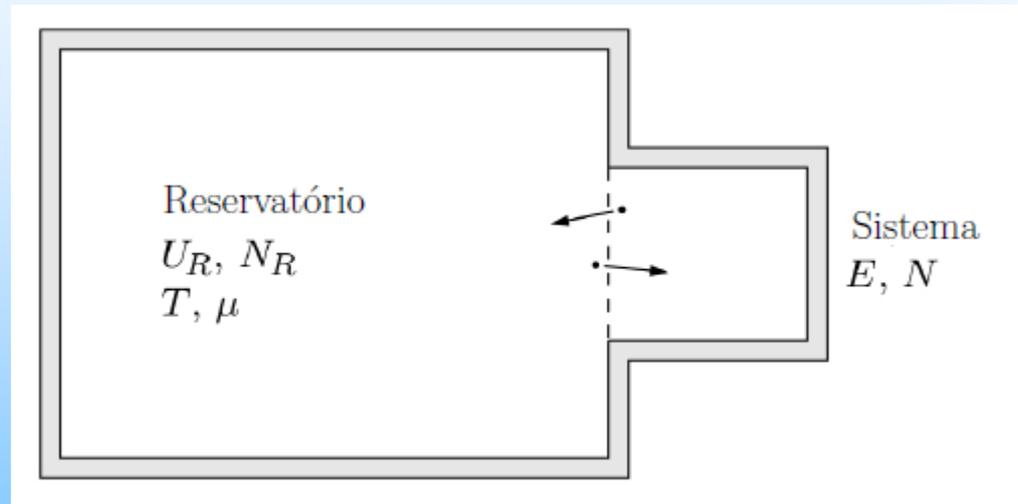
2) Ensemble grande-canônico

- ❑ No **ensemble grande-canônico**, o sistema e o reservatório trocam tanto energia como partículas.



2) Ensemble grande-canônico

- ❑ No **ensemble grande-canônico**, o sistema e o reservatório trocam tanto energia como partículas.

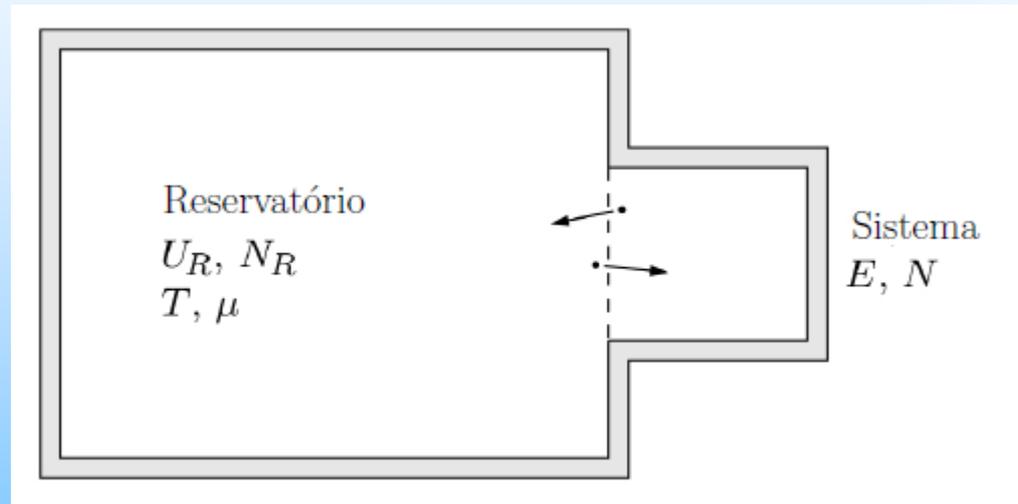


- ❑ A razão entre as probabilidade de dois microestados diferentes, s_1 e s_2 , pode ser escrita de forma similar ao ensemble canônico:

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{\Omega_R(s_2)}{\Omega_R(s_1)}$$

2) Ensemble grande-canônico

- ❑ No **ensemble grande-canônico**, o sistema e o reservatório trocam tanto energia como partículas.

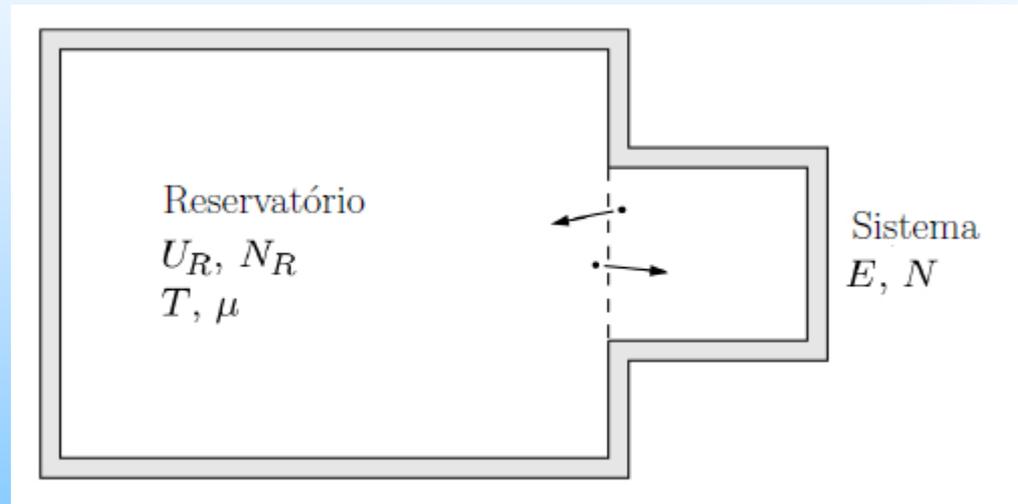


- ❑ A razão entre as probabilidade de dois microestados diferentes, s_1 e s_2 , pode ser escrita de forma similar ao ensemble canônico:

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{\Omega_R(s_2)}{\Omega_R(s_1)} = \frac{e^{S_R(s_2)/k}}{e^{S_R(s_1)/k}}$$

2) Ensemble grande-canônico

- ❑ No **ensemble grande-canônico**, o sistema e o reservatório trocam tanto energia como partículas.



- ❑ A razão entre as probabilidade de dois microestados diferentes, s_1 e s_2 , pode ser escrita de forma similar ao ensemble canônico:

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{\Omega_R(s_2)}{\Omega_R(s_1)} = \frac{e^{S_R(s_2)/k}}{e^{S_R(s_1)/k}} = e^{[S_R(s_2) - S_R(s_1)]/k}$$

2) Ensemble grande-canônico

- A diferença entre as entropias pode ser avaliada à partir da identidade termodinâmica:

$$dS_R = \frac{1}{T} (dU_R + PdV_R - \mu dN_R).$$

2) Ensemble grande-canônico

- A diferença entre as entropias pode ser avaliada à partir da identidade termodinâmica:

$$dS_R = \frac{1}{T}(dU_R + PdV_R - \mu dN_R).$$

- dV_R continua sendo desprezível, mas agora $dN_R \neq 0$.

2) Ensemble grande-canônico

- A diferença entre as entropias pode ser avaliada à partir da identidade termodinâmica:

$$dS_R = \frac{1}{T} (dU_R + PdV_R - \mu dN_R).$$

- dV_R continua sendo desprezível, mas agora $dN_R \neq 0$. Com isto, a razão entre as probabilidades pode ser escrita em termos de um fator exponencial, chamado de **fator de Gibbs**:

$$\text{fator de Gibbs} = e^{-[E(s) - \mu N(s)]/kT}.$$

2) Ensemble grande-canônico

- A diferença entre as entropias pode ser avaliada à partir da identidade termodinâmica:

$$dS_R = \frac{1}{T} (dU_R + PdV_R - \mu dN_R).$$

- dV_R continua sendo desprezível, mas agora $dN_R \neq 0$. Com isto, a razão entre as probabilidades pode ser escrita em termos de um fator exponencial, chamado de **fator de Gibbs**:

$$\text{fator de Gibbs} = e^{-[E(s) - \mu N(s)]/kT}.$$

- A probabilidade absoluta será, portanto:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-[E(s) - \mu N(s)]/kT}.$$

2) Ensemble grande-canônico

- A diferença entre as entropias pode ser avaliada à partir da identidade termodinâmica:

$$dS_R = \frac{1}{T}(dU_R + PdV_R - \mu dN_R).$$

- dV_R continua sendo desprezível, mas agora $dN_R \neq 0$. Com isto, a razão entre as probabilidades pode ser escrita em termos de um fator exponencial, chamado de **fator de Gibbs**:

$$\text{fator de Gibbs} = e^{-[E(s) - \mu N(s)]/kT}.$$

- A probabilidade absoluta será, portanto:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-[E(s) - \mu N(s)]/kT}.$$

- A quantidade Z é chamada de **função de partição grande canônica** ou **soma de Gibbs** e é dada por:

$$Z = \sum_s e^{-[E(s) - \mu N(s)]/kT}.$$

2) Ensemble grande-canônico - Problemas

2. Seja um sistema em equilíbrio térmico e difusivo com um reservatório.

(a) Mostre que o número médio de partículas no sistema é:

$$\bar{N} = \frac{kT}{Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial \mu} \right)_{T,V}$$

(b) Mostre que o número quadrático médio de partículas é:

$$\overline{N^2} = \frac{(kT)^2}{Z} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \mu^2} \right)_{T,V}$$

(c) Definindo o *desvio padrão* como $\sigma_N \equiv \sqrt{\overline{N^2} - (\bar{N})^2}$, mostre que em geral:

$$\sigma_N^2 = \overline{N^2} - (\bar{N})^2$$

(d) Use os resultados anteriores para mostrar que:

$$\sigma_N = \sqrt{kT(\partial \bar{N} / \partial \mu)}$$

3. Seja agora um gás ideal em equilíbrio térmico e difusivo com um reservatório. Utilize os resultados do exercício 2 para obter uma expressão de σ_N em termos de \bar{N} . Discuta seu resultado.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- ❑ A aplicação mais importante envolvendo o fator de Gibbs ocorre na **estatística quântica**, o estudo de sistemas densos, em que duas ou mais partículas idênticas possuem uma razoável chance de querer ocupar o mesmo estado de uma única partícula.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- ❑ A aplicação mais importante envolvendo o fator de Gibbs ocorre na **estatística quântica**, o estudo de sistemas densos, em que duas ou mais partículas idênticas possuem uma razoável chance de querer ocupar o mesmo estado de uma única partícula.
- ❑ Vamos mostrar a seguir que a função de partição para N partículas não interagentes e indistinguíveis da pág. 250, a saber,

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

não descreve corretamente quando as partículas tendem a ocupar um mesmo estado (de uma única partícula, não do estado que caracteriza o sistema).

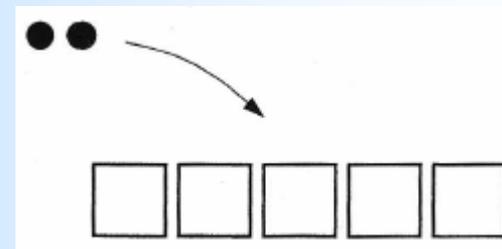
3) Estatística quântica de bósons e férmions

- ❑ A aplicação mais importante envolvendo o fator de Gibbs ocorre na **estatística quântica**, o estudo de sistemas densos, em que duas ou mais partículas idênticas possuem uma razoável chance de querer ocupar o mesmo estado de uma única partícula.
- ❑ Vamos mostrar a seguir que a função de partição para N partículas não interagentes e indistinguíveis da pág. 250, a saber,

$$Z_{\text{total}} = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

não descreve corretamente quando as partículas tendem a ocupar um mesmo estado (de uma única partícula, não do estado que caracteriza o sistema).

- ❑ Vamos considerar um sistema formado por duas partículas não-interagentes que possam ocupar quaisquer dos cinco estados, conforme mostra a figura ao lado.



3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Por simplicidade, vamos assumir que todos os cinco estados de partícula única possuem energia zero, de forma que cada um dos fatores de Boltzmann é 1 e, portanto, $Z = \Omega$.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Por simplicidade, vamos assumir que todos os cinco estados de partícula única possuem energia zero, de forma que cada um dos fatores de Boltzmann é 1 e, portanto, $Z = \Omega$.
 - Caso as duas partículas sejam distinguíveis, cada uma pode ocupar cinco estados, independentemente da outra.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Por simplicidade, vamos assumir que todos os cinco estados de partícula única possuem energia zero, de forma que cada um dos fatores de Boltzmann é 1 e, portanto, $Z = \Omega$.
- Caso as duas partículas sejam distinguíveis, cada uma pode ocupar cinco estados, independentemente da outra. Logo, $Z = 5 \times 5$

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Por simplicidade, vamos assumir que todos os cinco estados de partícula única possuem energia zero, de forma que cada um dos fatores de Boltzmann é 1 e, portanto, $Z = \Omega$.
- Caso as duas partículas sejam distinguíveis, cada uma pode ocupar cinco estados, independentemente da outra. Logo, $Z = 5 \times 5 = 25$

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Por simplicidade, vamos assumir que todos os cinco estados de partícula única possuem energia zero, de forma que cada um dos fatores de Boltzmann é 1 e, portanto, $Z = \Omega$.

- Caso as duas partículas sejam distinguíveis, cada uma pode ocupar cinco estados, independentemente da outra. Logo, $Z = 5 \times 5 = 25$;
- Caso sejam indistinguíveis, a função de partição da página anterior dá

$$Z = \frac{1}{2!} 5^2$$

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Por simplicidade, vamos assumir que todos os cinco estados de partícula única possuem energia zero, de forma que cada um dos fatores de Boltzmann é 1 e, portanto, $Z = \Omega$.

- Caso as duas partículas sejam distinguíveis, cada uma pode ocupar cinco estados, independentemente da outra. Logo, $Z = 5 \times 5 = 25$;
- Caso sejam indistinguíveis, a função de partição da página anterior dá

$$Z = \frac{1}{2!} 5^2 = 12,5$$

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Por simplicidade, vamos assumir que todos os cinco estados de partícula única possuem energia zero, de forma que cada um dos fatores de Boltzmann é 1 e, portanto, $Z = \Omega$.
 - Caso as duas partículas sejam distinguíveis, cada uma pode ocupar cinco estados, independentemente da outra. Logo, $Z = 5 \times 5 = 25$;
 - Caso sejam indistinguíveis, a função de partição da página anterior dá $Z = \frac{1}{2!} 5^2 = 12,5$, o que não deve estar certo, pois para este sistema é esperado que Z seja um inteiro.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Por simplicidade, vamos assumir que todos os cinco estados de partícula única possuem energia zero, de forma que cada um dos fatores de Boltzmann é 1 e, portanto, $Z = \Omega$.
 - Caso as duas partículas sejam distinguíveis, cada uma pode ocupar cinco estados, independentemente da outra. Logo, $Z = 5 \times 5 = 25$;
 - Caso sejam indistinguíveis, a função de partição da página anterior dá $Z = \frac{1}{2!} 5^2 = 12,5$, o que não deve estar certo, pois para este sistema é esperado que Z seja um inteiro.
- Vamos fazer uma contagem mais cuidadosa quando as partículas são indistinguíveis, representando o sistema através de cinco inteiros, formados por 0, 1 ou 2. O 0 representa o estado sem nenhuma partícula, 1 com uma e 2 com duas partículas (assumindo-se que duas partículas podem ocupar o mesmo estado).

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Temos portanto os seguintes estados para o sistema:

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Temos portanto os seguintes estados para o sistema:

11000	01010	20000
10100	01001	02000
10010	00110	00200
10001	00101	00020
01100	00011	00002

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Temos portanto os seguintes estados para o sistema:

11000	01010	20000
10100	01001	02000
10010	00110	00200
10001	00101	00020
01100	00011	00002

o que dá $Z = 15$.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Temos portanto os seguintes estados para o sistema:

11000	01010	20000
10100	01001	02000
10010	00110	00200
10001	00101	00020
01100	00011	00002

o que dá $Z = 15$, sendo que em 10 estados do sistema as duas partículas ocupam estados individuais diferentes.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Temos portanto os seguintes estados para o sistema:

11000	01010	20000
10100	01001	02000
10010	00110	00200
10001	00101	00020
01100	00011	00002

o que dá $Z = 15$, sendo que em 10 estados do sistema as duas partículas ocupam estados individuais diferentes. Caso as partículas fossem distinguíveis, esses 10 estados seriam contabilizados como 10×2

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Temos portanto os seguintes estados para o sistema:

11000	01010	20000
10100	01001	02000
10010	00110	00200
10001	00101	00020
01100	00011	00002

o que dá $Z = 15$, sendo que em 10 estados do sistema as duas partículas ocupam estados individuais diferentes. Caso as partículas fossem distinguíveis, esses 10 estados seriam contabilizados como $10 \times 2 = 20$

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Temos portanto os seguintes estados para o sistema:

11000	01010	20000
10100	01001	02000
10010	00110	00200
10001	00101	00020
01100	00011	00002

o que dá $Z = 15$, sendo que em 10 estados do sistema as duas partículas ocupam estados individuais diferentes. Caso as partículas fossem distinguíveis, esses 10 estados seriam contabilizados como $10 \times 2 = 20$. Somando-se os 5 restantes da coluna à direita, temos os 25 estados do sistema encontrados anteriormente.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

□ Temos portanto os seguintes estados para o sistema:

11000	01010	20000
10100	01001	02000
10010	00110	00200
10001	00101	00020
01100	00011	00002

o que dá $Z = 15$, sendo que em 10 estados do sistema as duas partículas ocupam estados individuais diferentes. Caso as partículas fossem distinguíveis, esses 10 estados seriam contabilizados como $10 \times 2 = 20$. Somando-se os 5 restantes da coluna à direita, temos os 25 estados do sistema encontrados anteriormente.

- No caso de partículas indistinguíveis, o fator $N!$ corta corretamente pela metade os estados das duas primeiras colunas à esquerda, mas erroneamente os da coluna à direita.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- ❑ Na mecânica quântica, em vista do **princípio de exclusão de Pauli**, nem todos os tipos de partículas podem ocupar o mesmo estado (situação das colunas à direita).

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- ❑ Na mecânica quântica, em vista do **princípio de exclusão de Pauli**, nem todos os tipos de partículas podem ocupar o mesmo estado (situação das colunas à direita). De acordo com esse princípio:

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Na mecânica quântica, em vista do **princípio de exclusão de Pauli**, nem todos os tipos de partículas podem ocupar o mesmo estado (situação das colunas à direita). De acordo com esse princípio:
 - Observa-se empiricamente que partículas idênticas que possuem spin múltiplos inteiros de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ou seja, $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$, conhecidos como **bósons**, podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de bósons: fótons, píons, átomos de ${}^4\text{He}$ (dois prótons e dois nêutrons), etc;

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Na mecânica quântica, em vista do **princípio de exclusão de Pauli**, nem todos os tipos de partículas podem ocupar o mesmo estado (situação das colunas à direita). De acordo com esse princípio:
- Observa-se empiricamente que partículas idênticas que possuem spin múltiplos inteiros de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ou seja, $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$, conhecidos como **bósons**, podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de bósons: fótons, píons, átomos de ${}^4\text{He}$ (dois prótons e dois nêutrons), etc;
 - Partículas idênticas com múltiplos semi-inteiros de \hbar , ou seja, $s = \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$, conhecidos como **férmions**, não podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de férmions: elétrons, prótons, nêutrons, átomos de ${}^3\text{He}$, etc.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Na mecânica quântica, em vista do **princípio de exclusão de Pauli**, nem todos os tipos de partículas podem ocupar o mesmo estado (situação das colunas à direita). De acordo com esse princípio:
 - Observa-se empiricamente que partículas idênticas que possuem spin múltiplos inteiros de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ou seja, $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$, conhecidos como **bósons**, podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de bósons: fótons, píons, átomos de ${}^4\text{He}$ (dois prótons e dois nêutrons), etc;
 - Partículas idênticas com múltiplos semi-inteiros de \hbar , ou seja, $s = \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$, conhecidos como **férmions**, não podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de férmions: elétrons, prótons, nêutrons, átomos de ${}^3\text{He}$, etc.
- Em diversas situações, não importa quais tipos de partículas compõem o fluido – se bósons ou férmions.

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Na mecânica quântica, em vista do **princípio de exclusão de Pauli**, nem todos os tipos de partículas podem ocupar o mesmo estado (situação das colunas à direita). De acordo com esse princípio:
 - Observa-se empiricamente que partículas idênticas que possuem spin múltiplos inteiros de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ou seja, $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$, conhecidos como **bósons**, podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de bósons: fótons, píons, átomos de ${}^4\text{He}$ (dois prótons e dois nêutrons), etc;
 - Partículas idênticas com múltiplos semi-inteiros de \hbar , ou seja, $s = \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$, conhecidos como **férmions**, não podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de férmions: elétrons, prótons, nêutrons, átomos de ${}^3\text{He}$, etc.
- Em diversas situações, não importa quais tipos de partículas compõem o fluido – se bósons ou férmions. Isto ocorre quando:

$$Z_1 \gg N$$

3) Estatística quântica de bósons e férmions

- Na mecânica quântica, em vista do **princípio de exclusão de Pauli**, nem todos os tipos de partículas podem ocupar o mesmo estado (situação das colunas à direita). De acordo com esse princípio:
 - Observa-se empiricamente que partículas idênticas que possuem spin múltiplos inteiros de $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ou seja, $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$, conhecidos como **bósons**, podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de bósons: fótons, píons, átomos de ${}^4\text{He}$ (dois prótons e dois nêutrons), etc;
 - Partículas idênticas com múltiplos semi-inteiros de \hbar , ou seja, $s = \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$, conhecidos como **férmions**, não podem compartilhar um mesmo estado. Exemplos de férmions: elétrons, prótons, nêutrons, átomos de ${}^3\text{He}$, etc.
- Em diversas situações, não importa quais tipos de partículas compõem o fluido – se bósons ou férmions. Isto ocorre quando:

$$Z_1 \gg N,$$

situação em que o número de estado de uma única partícula é muito maior do que o número de partículas.

3) Estatística quântica de bósons e férmions - Problema

4. Compute o volume quântico para uma molécula de N_2 à temperatura ambiente. Argumente se um gás dessas moléculas à pressão atmosférica pode ser tratado com estatística de Boltzmann. A que temperatura a estatística quântica seria relevante para este sistema?

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

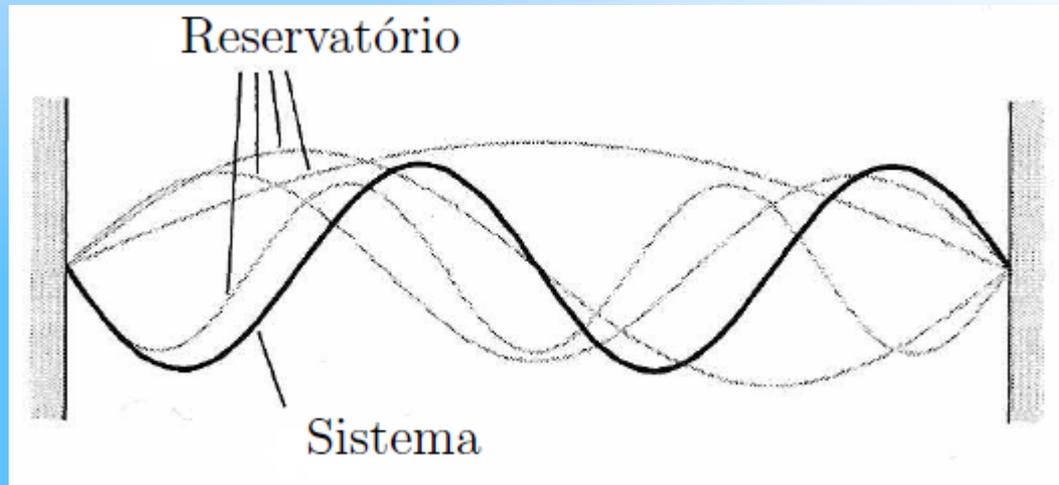
- ❑ O formalismo grande canônico permite o tratamento adequado para um gás quântico (portanto, de partículas indistinguíveis), na situação em que o formalismo canônico falha, ou seja, quando a condição $Z_1 \gg N$ é violada.

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ O formalismo grande canônico permite o tratamento adequado para um gás quântico (portanto, de partículas indistinguíveis), na situação em que o formalismo canônico falha, ou seja, quando a condição $Z_1 \gg N$ é violada.
- ❑ Vamos obter a função de distribuição assumindo-se que ao invés de uma partícula, haja um determinado estado quântico particular com uma única partícula.

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ O formalismo grande canônico permite o tratamento adequado para um gás quântico (portanto, de partículas indistinguíveis), na situação em que o formalismo canônico falha, ou seja, quando a condição $Z_1 \gg N$ é violada.
- ❑ Vamos obter a função de distribuição assumindo-se que ao invés de uma partícula, haja um determinado estado quântico particular com uma única partícula. Assumimos também que o reservatório consiste de todas as outras possibilidades para o estado de uma partícula e ocupa o mesmo lugar físico do sistema, conforme mostra a figura abaixo:



3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$.

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT},$$

onde Z é a função de partição grande canônica.

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT},$$

onde Z é a função de partição grande canônica.

- ❑ Caso as partículas sejam férmions, então n só pode assumir os valores 0 e 1.

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT},$$

onde Z é a função de partição grande canônica.

- Caso as partículas sejam férmions, então n só pode assumir os valores 0 e 1. Portanto,

$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT},$$

onde Z é a função de partição grande canônica.

- Caso as partículas sejam férmions, então n só pode assumir os valores 0 e 1. Portanto,

$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon - \mu)/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(s) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT},$$

onde Z é a função de partição grande canônica.

- Caso as partículas sejam férmions, então n só pode assumir os valores 0 e 1. Portanto,

$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon - \mu)/kT}$$

- Definimos como **ocupância** o número médio de partículas no estado, o qual é dado por:

$$\bar{n} = \sum_n nP(n)$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(n) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT},$$

onde Z é a função de partição grande canônica.

- Caso as partículas sejam férmions, então n só pode assumir os valores 0 e 1. Portanto,

$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon - \mu)/kT}$$

- Definimos como **ocupância** o número médio de partículas no estado, o qual é dado por:

$$\bar{n} = \sum_n nP(n) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1)$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Vamos assumir que a energia do estado de uma partícula, quando ocupado por um única partícula, seja ε e zero quando não ocupado. Para n partículas ocupando esse estado, a energia é $n\varepsilon$. Decorre que a probabilidade do estado de uma partícula ser ocupado por n partículas é:

$$P(n) = \frac{1}{Z} e^{-(n\varepsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT},$$

onde Z é a função de partição grande canônica.

- Caso as partículas sejam férmions, então n só pode assumir os valores 0 e 1. Portanto,

$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon - \mu)/kT}$$

- Definimos como **ocupância** o número médio de partículas no estado, o qual é dado por:

$$\bar{n} = \sum_n nP(n) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) = \frac{e^{-(\varepsilon - \mu)/kT}}{1 + e^{-(\varepsilon - \mu)/kT}}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Portanto,

$$\bar{n} = \frac{e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}}{1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Portanto,

$$\bar{n} = \frac{e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}}{1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}},$$

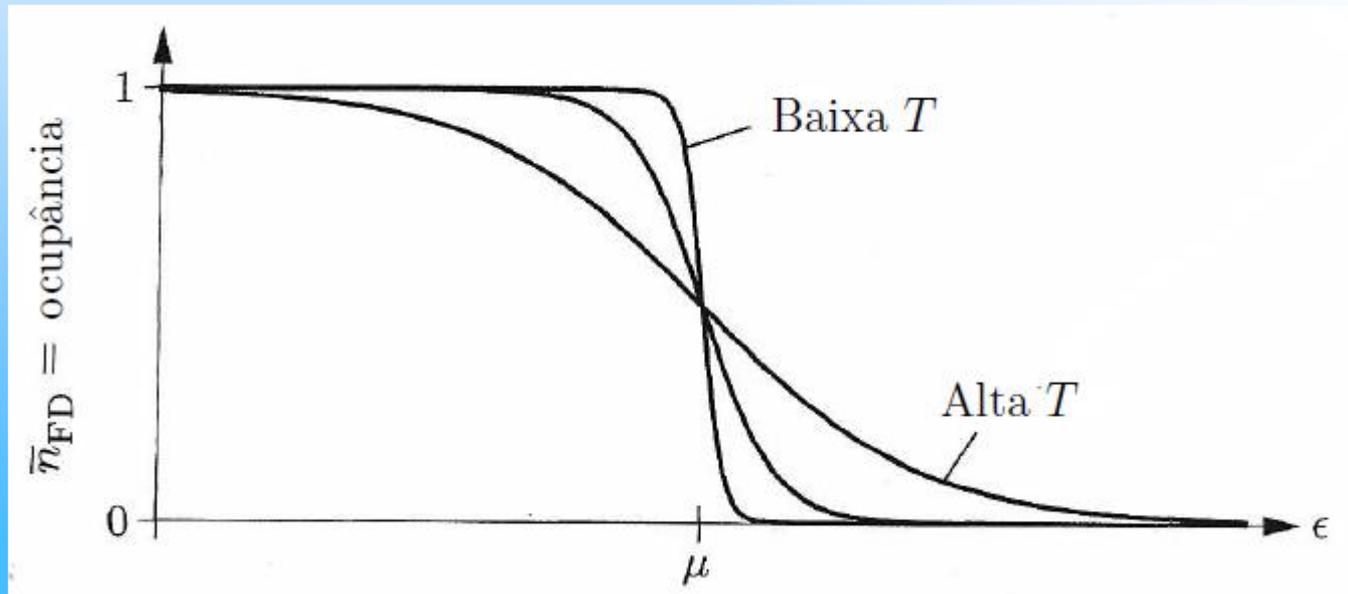
que é conhecida como **distribuição de Fermi-Dirac** e será denotada por \bar{n}_{FD} .

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Portanto,

$$\bar{n} = \frac{e^{-(\epsilon-\mu)/kT}}{1 + e^{-(\epsilon-\mu)/kT}},$$

que é conhecida como **distribuição de Fermi-Dirac** e será denotada por \bar{n}_{FD} .



3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ Se as partículas que compõem o fluido são bósons, n pode ser qualquer número inteiro positivo.

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Se as partículas que compõem o fluido são bósons, n pode ser qualquer número inteiro positivo. Logo,

$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon - \mu) / kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Se as partículas que compõem o fluido são bósons, n pode ser qualquer número inteiro positivo. Logo,

$$Z = \sum_n e^{-n(\varepsilon-\mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + e^{-2(\varepsilon-\mu)/kT} + \dots$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Se as partículas que compõem o fluido são bósons, n pode ser qualquer número inteiro positivo. Logo,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n e^{-n(\varepsilon-\mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + e^{-2(\varepsilon-\mu)/kT} + \dots \\ &= 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + [e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}]^2 + \dots \end{aligned}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Se as partículas que compõem o fluido são bósons, n pode ser qualquer número inteiro positivo. Logo,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n e^{-n(\varepsilon-\mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + e^{-2(\varepsilon-\mu)/kT} + \dots \\ &= 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + [e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}]^2 + \dots = \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}} \end{aligned}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Se as partículas que compõem o fluido são bósons, n pode ser qualquer número inteiro positivo. Logo,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n e^{-n(\varepsilon-\mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + e^{-2(\varepsilon-\mu)/kT} + \dots \\ &= 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + [e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}]^2 + \dots = \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}} \end{aligned}$$

onde é preciso que $\varepsilon > \mu$ para que se obtenha a última igualdade, que é válida para uma série convergente.

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Se as partículas que compõem o fluido são bósons, n pode ser qualquer número inteiro positivo. Logo,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n e^{-n(\varepsilon-\mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + e^{-2(\varepsilon-\mu)/kT} + \dots \\ &= 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + [e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}]^2 + \dots = \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}} \end{aligned}$$

onde é preciso que $\varepsilon > \mu$ para que se obtenha a última igualdade, que é válida para uma série convergente.

- A ocupância para os bósons é dada por:

$$\bar{n} = \sum_n nP(n)$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Se as partículas que compõem o fluido são bósons, n pode ser qualquer número inteiro positivo. Logo,

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n e^{-n(\varepsilon-\mu)/kT} = 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + e^{-2(\varepsilon-\mu)/kT} + \dots \\ &= 1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} + [e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}]^2 + \dots = \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}} \end{aligned}$$

onde é preciso que $\varepsilon > \mu$ para que se obtenha a última igualdade, que é válida para uma série convergente.

- A ocupância para os bósons é dada por:

$$\bar{n} = \sum_n nP(n) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + \dots$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

□ Temos portanto que:

$$\bar{n} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

□ Temos portanto que:

$$\bar{n} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = +(1 - e^{-x})(1 - e^{-x})^{-2}(e^{-x})$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

□ Temos portanto que:

$$\bar{n} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = +\cancel{(1 - e^{-x})} (1 - e^{-x})^{-2} (e^{-x})^{-1}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

□ Temos portanto que:

$$\bar{n} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = \frac{1}{(1 - e^{-x})e^x}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

□ Temos portanto que:

$$\bar{n} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = \frac{1}{(1 - e^{-x})e^x} = \frac{1}{e^x - 1}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

□ Temos portanto que:

$$\bar{n} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Para avaliarmos a soma acima, vamos fazer $x \equiv (\varepsilon - \mu)/kT$ e observar que:

$$\bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

□ Temos portanto que:

$$\bar{n} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1},$$

que é conhecida como **distribuição de Bose-Einstein** e será denotada por \bar{n}_{BE} .

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann.

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- ❑ Para um total de N partículas independentes, temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = NP(s)$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- ❑ Para um total de N partículas independentes, temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = NP(s) = \frac{N}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- ❑ Para um total de N partículas independentes, temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = NP(s) = \frac{N}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- ❑ Sabendo-se que para esse sistema o potencial químico é dado por:

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- ❑ Para um total de N partículas independentes, temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = NP(s) = \frac{N}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- ❑ Sabendo-se que para esse sistema o potencial químico é dado por (veja o Probl. 1 da lista 8):

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- Para um total de N partículas independentes, temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = NP(s) = \frac{N}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- Sabendo-se que para esse sistema o potencial químico é dado por (veja o Probl. 1 da lista 8):

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N} = kT \ln \frac{N}{Z_1}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- Para um total de N partículas independentes, temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = NP(s) = \frac{N}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- Sabendo-se que para esse sistema o potencial químico é dado por (veja o Probl. 1 da lista 8):

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N} = kT \ln \frac{N}{Z_1} \Rightarrow \frac{N}{Z_1} = e^{\mu/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- Para um total de N partículas independentes, temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = NP(s) = \frac{N}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- Sabendo-se que para esse sistema o potencial químico é dado por (veja o Probl. 1 da lista 8):

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N} = kT \ln \frac{N}{Z_1} \Rightarrow \frac{N}{Z_1} = e^{\mu/kT},$$

temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

- ❑ Para efeito de comparação, vamos deduzir a ocupância para um fluido obedecendo a estatística de Boltzmann. Para uma única partícula em um determinado estado com energia ε :

$$P(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- ❑ Para um total de N partículas independentes, temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = NP(s) = \frac{N}{Z_1} e^{-\varepsilon/kT}$$

- ❑ Sabendo-se que para esse sistema o potencial químico é dado por (veja o Probl. 1 da lista 8):

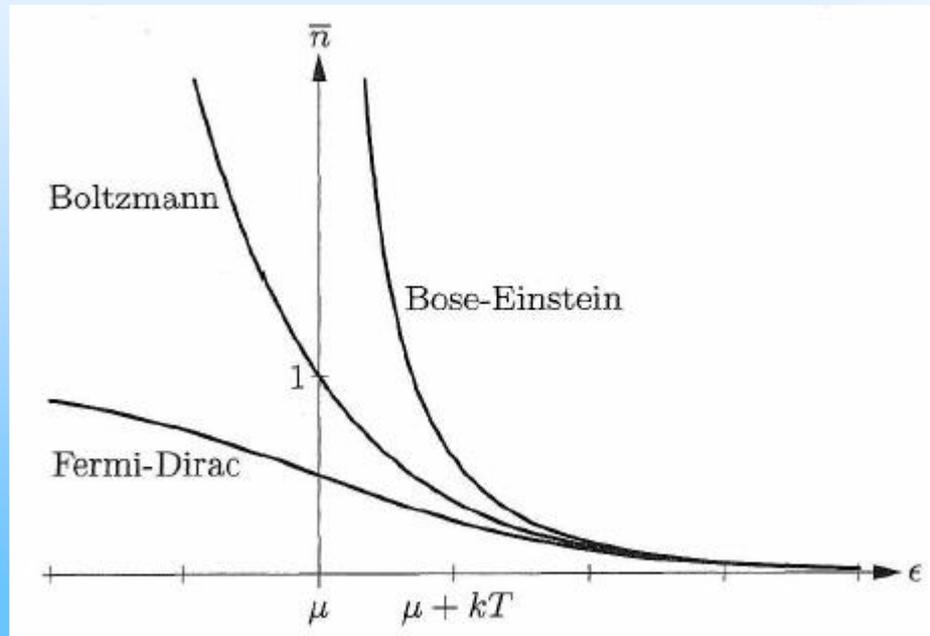
$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N} = kT \ln \frac{N}{Z_1} \Rightarrow \frac{N}{Z_1} = e^{\mu/kT},$$

temos que:

$$\bar{n}_{Boltzmann} = e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon/kT} = e^{-(\varepsilon-\mu)/kT}$$

3) Funções de distribuição para bósons e férmions

□ Gráficos das distribuições de Boltzmann, Fermi-Dirac e Bose-Einstein:



3) Funções de distribuição para bósons e férmions - Problemas

5. Para um sistema de férmions à temperatura ambiente, compute a probabilidade de um estado de uma só partícula estar ocupado se sua energia é:
- (a) 1 eV menor que μ ;
 - (b) 0,1 eV menor que μ ;
 - (c) igual à μ ;
 - (d) 0,1 eV maior que μ ;
 - (e) 1 eV maior que μ .
6. Para um sistema de bósons à temperatura ambiente, compute a ocupância média de um estado de uma só partícula e a probabilidade do estado estar ocupado com 0, 1 ou 2 bósons se sua energia é:
- (a) 1 eV menor que μ ;
 - (b) 0,1 eV menor que μ ;
 - (c) igual à μ ;
 - (d) 0,1 eV maior que μ ;
 - (e) 1 eV maior que μ .

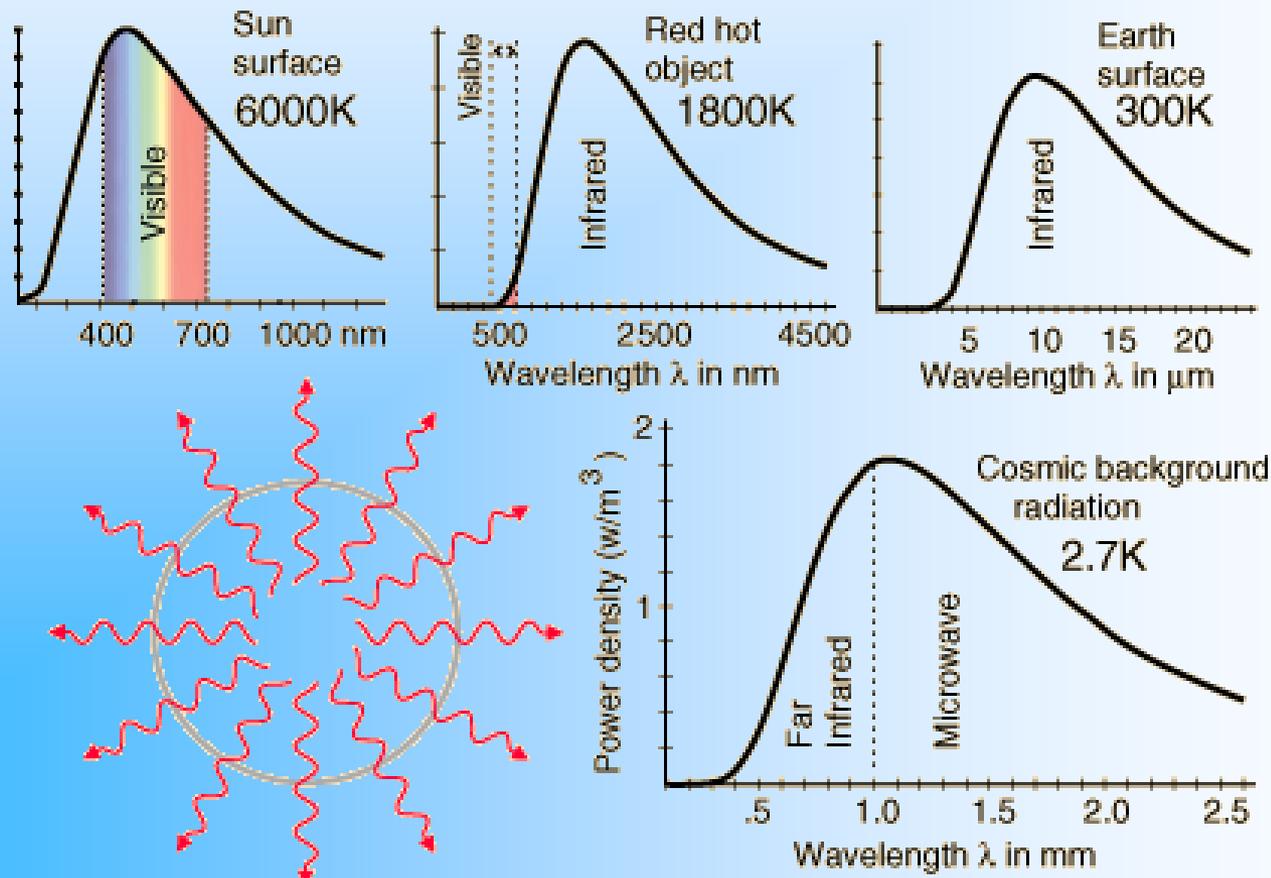
4) Radiação de corpo negro

4) Radiação de corpo negro

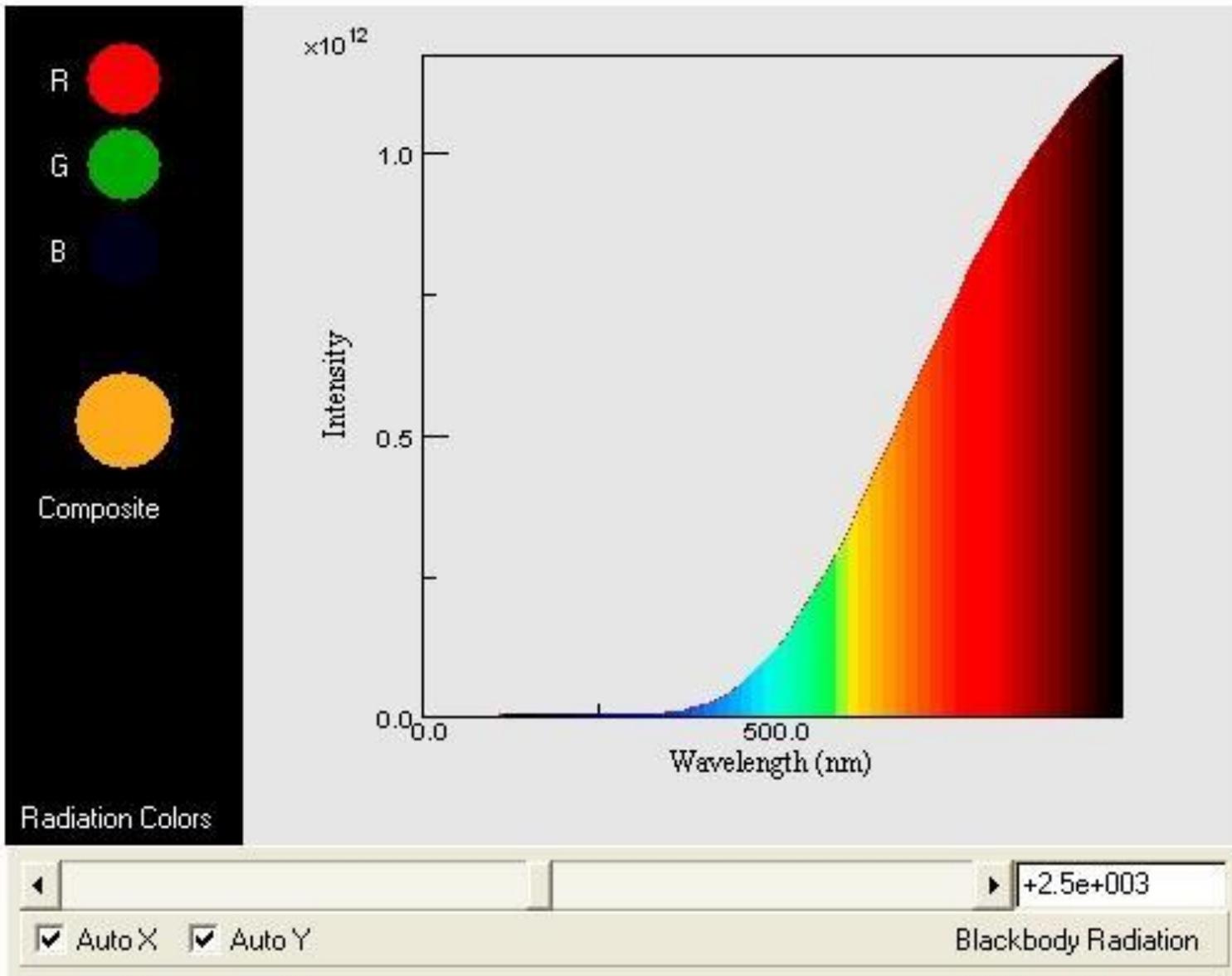


Emissão de *radiação térmica* por objetos opacos.

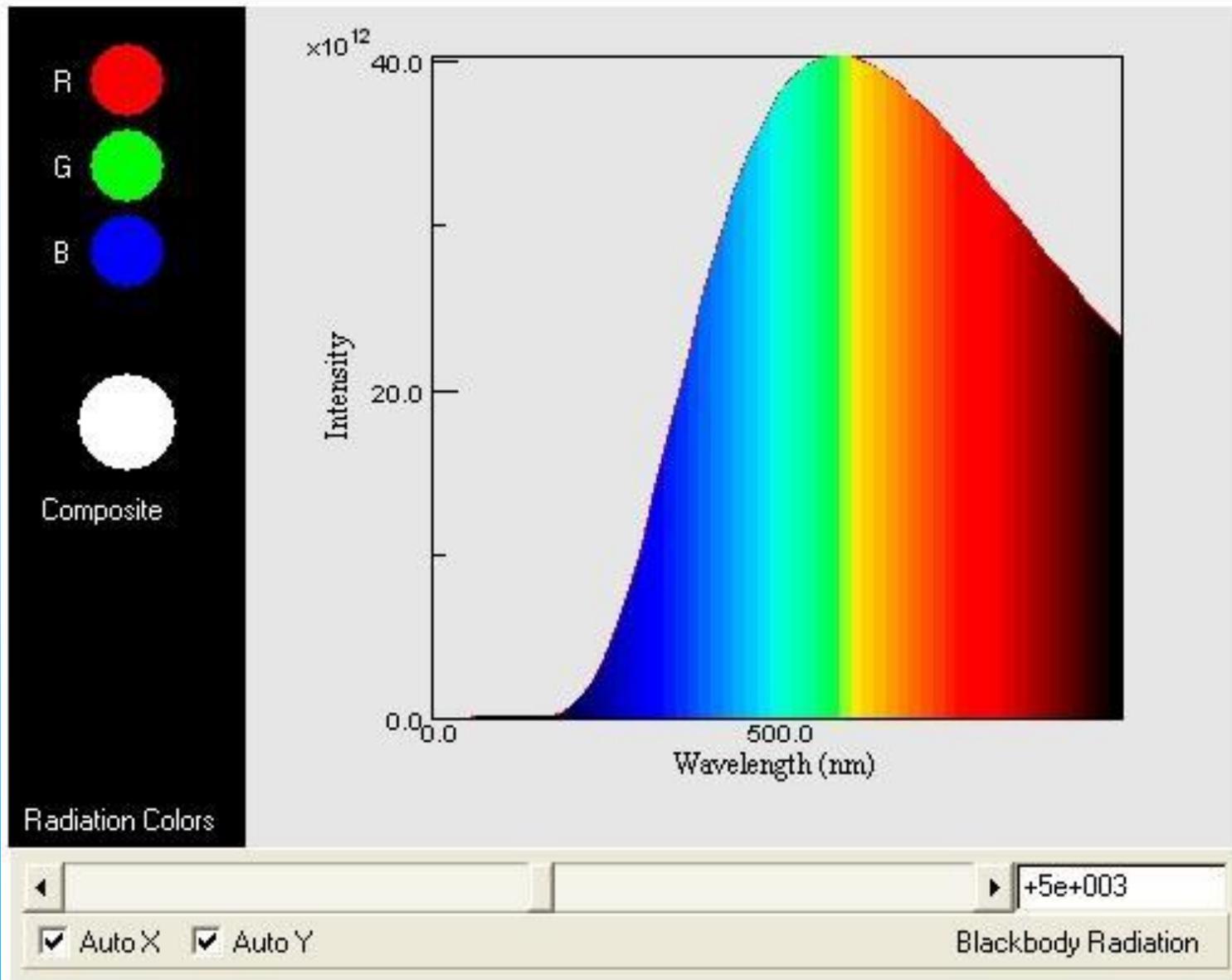
4) Radiação de corpo negro



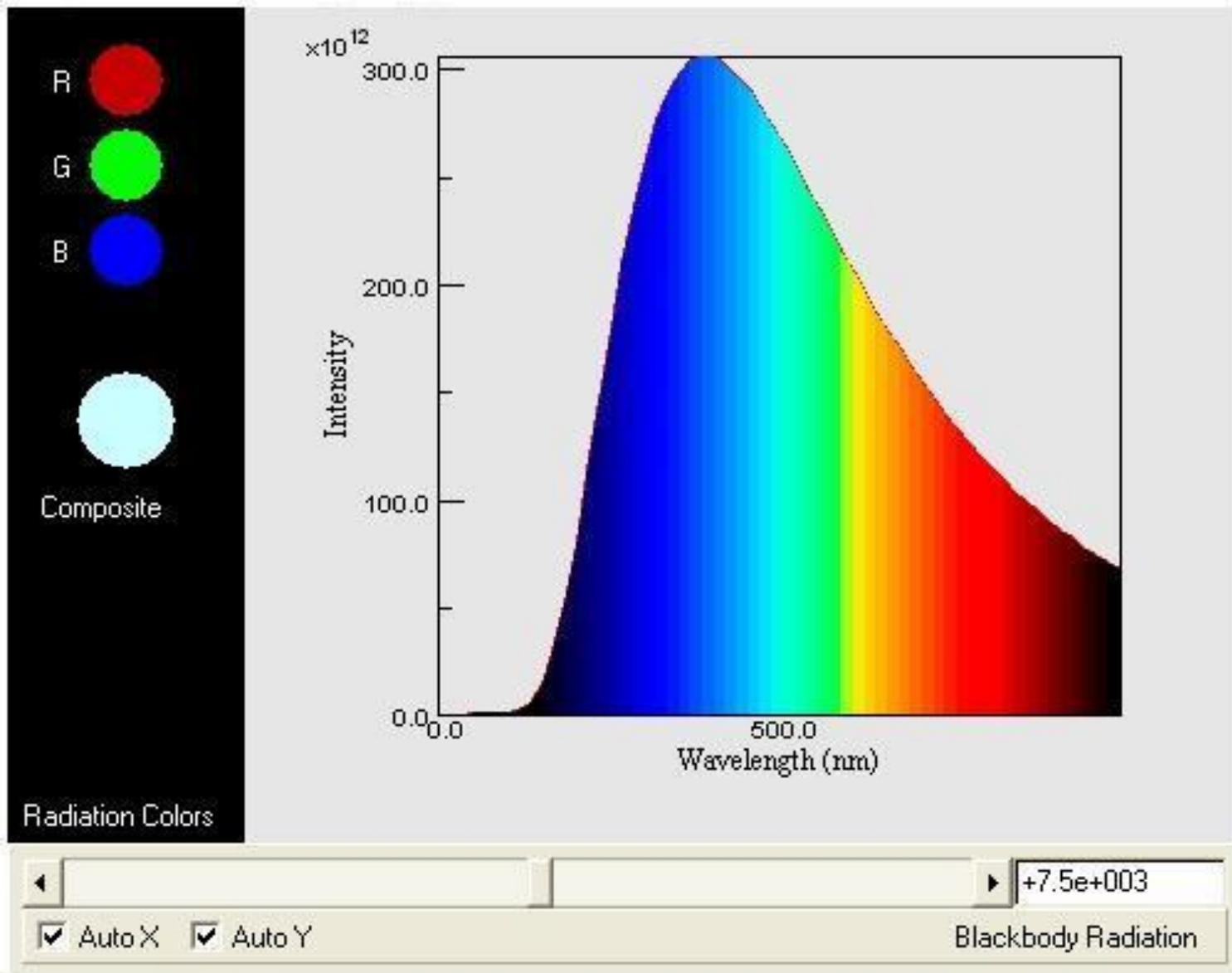
4) Radiação de corpo negro



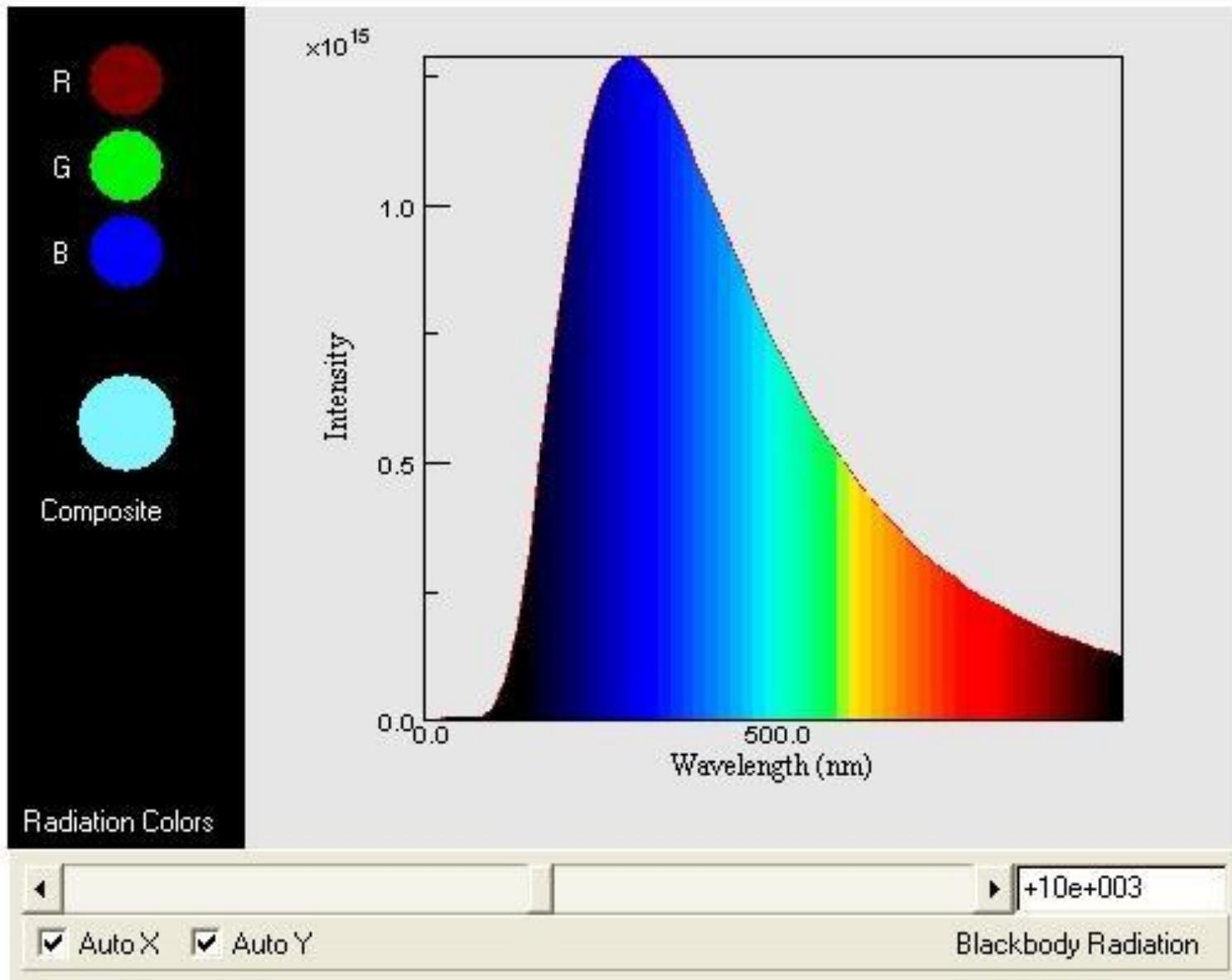
4) Radiação de corpo negro



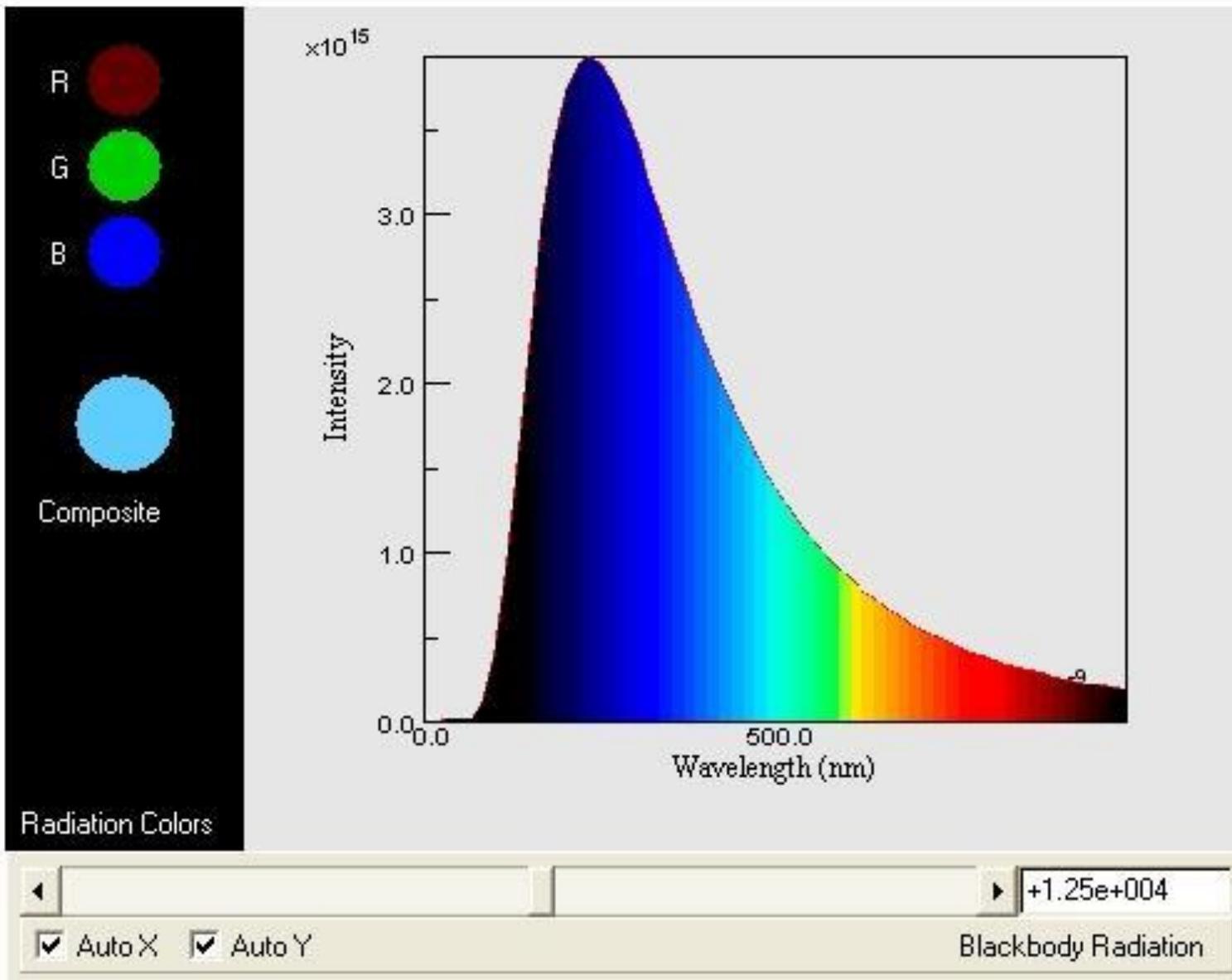
4) Radiação de corpo negro



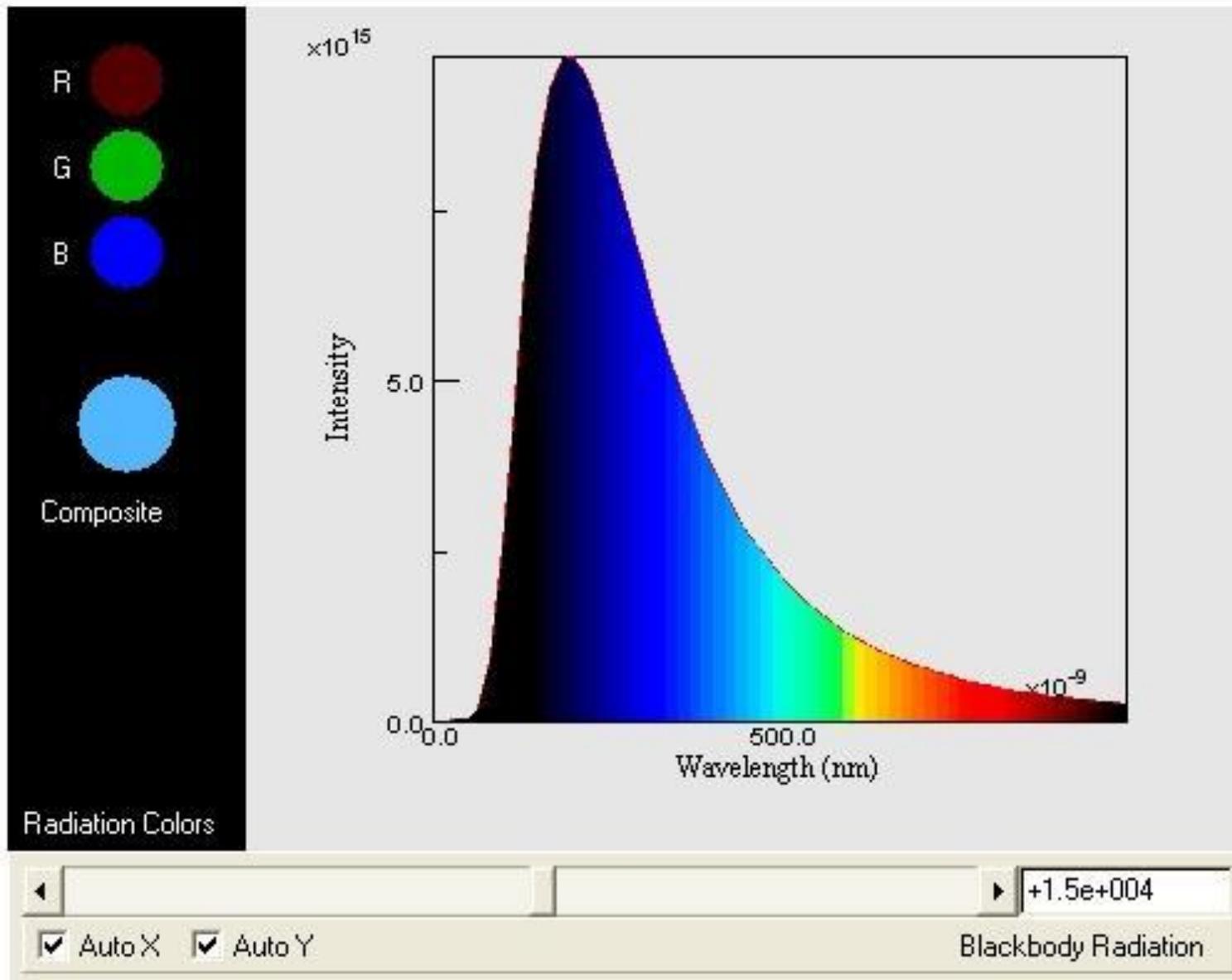
4) Radiação de corpo negro



4) Radiação de corpo negro



4) Radiação de corpo negro



4) Radiação de corpo negro

Lei de Stefan-Boltzmann:



4) Radiação de corpo negro



Lei de Stefan-Boltzmann:

1879 Josef Stefan descobre experimentalmente:



4) Radiação de corpo negro



1879 Josef Stefan descobre experimentalmente:



1884 Ludwig Boltzmann deduz teoricamente:

Lei de Stefan-Boltzmann:



4) Radiação de corpo negro



1879 Josef Stefan descobre experimentalmente:



1884 Ludwig Boltzmann deduz teoricamente:

$R = \sigma T^4$, onde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ é a constante de Stefan - Boltzmann



4) Radiação de corpo negro



1879 Josef Stefan descobre experimentalmente:



1884 Ludwig Boltzmann deduz teoricamente:

$$R = \sigma T^4, \text{ onde } \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \text{ é a constante de Stefan - Boltzmann}$$

A taxa de emissão de radiação por unidade de área (potência por unidade de área, ou **radiância**) de objetos aquecidos é proporcional à quarta potência da temperatura.



4) Radiação de corpo negro

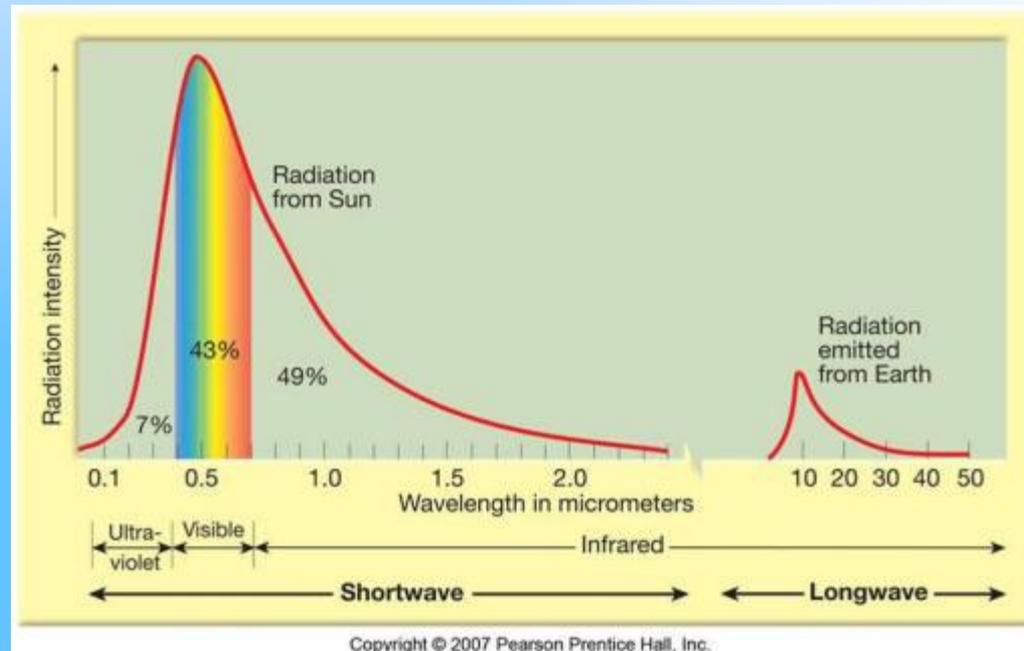
Lei de Stefan-Boltzmann:

$$R = \sigma T^4$$

4) Radiação de corpo negro

Lei de Stefan-Boltzmann:

$$R = \sigma T^4$$



4) Radiação de corpo negro

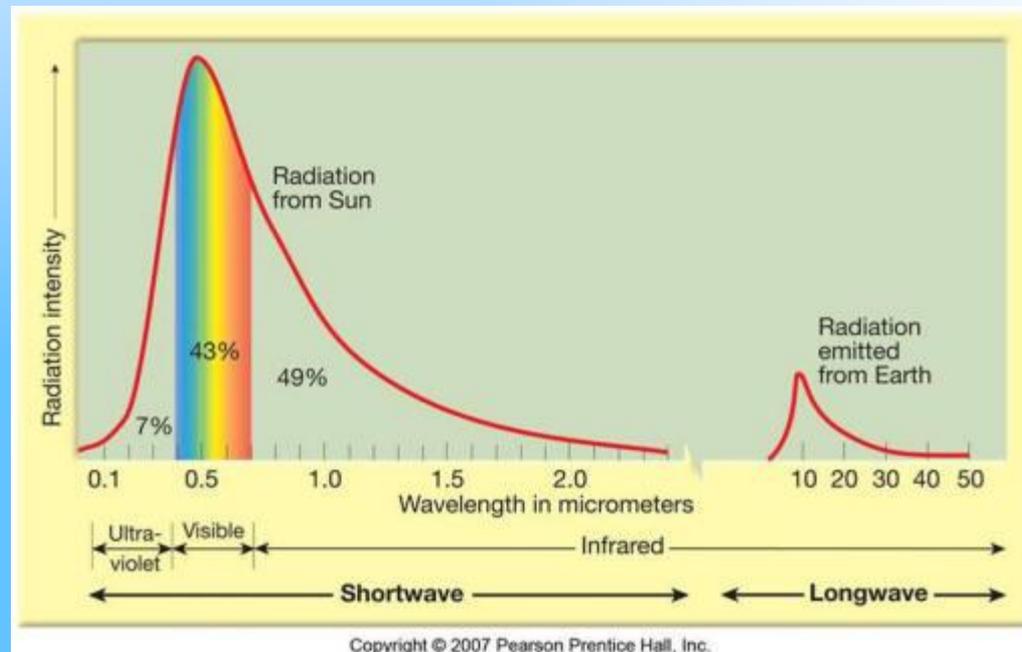
Lei de Stefan-Boltzmann:

$$R = \sigma T^4$$

O Sol emite de sua fotosfera :

$$\left(\frac{5800\text{K}}{288\text{K}}\right)^4 \approx 1,65 \times 10^5$$

mais potência que a Terra.



4) Radiação de corpo negro

Lei do deslocamento de Wien :

$$\lambda^{\max} = \frac{0,002898[\text{m} \cdot \text{K}]}{T}$$



1911

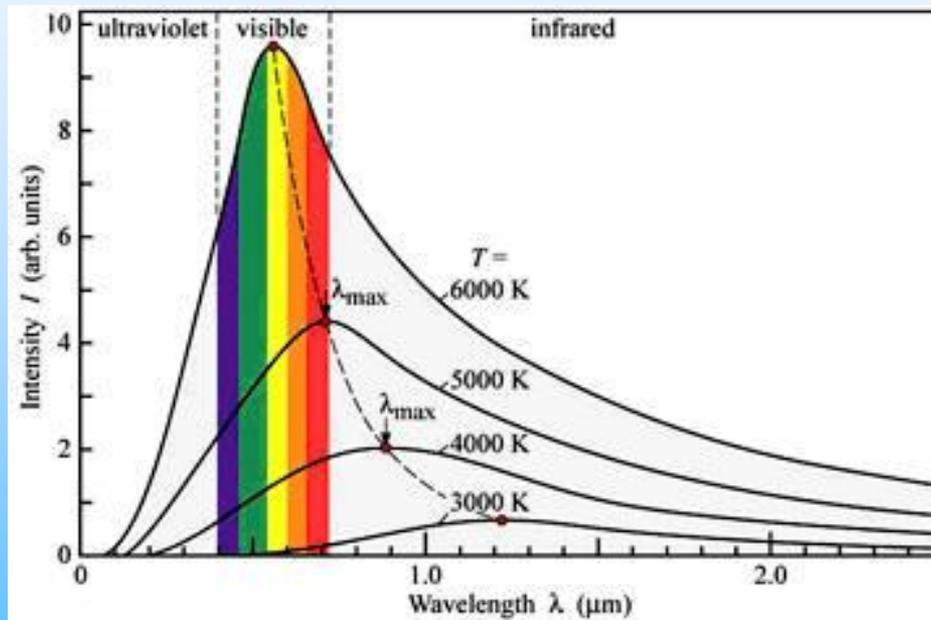
4) Radiação de corpo negro

Lei do deslocamento de Wien :

$$\lambda_{\max} = \frac{0,002898[\text{m} \cdot \text{K}]}{T}$$



1911



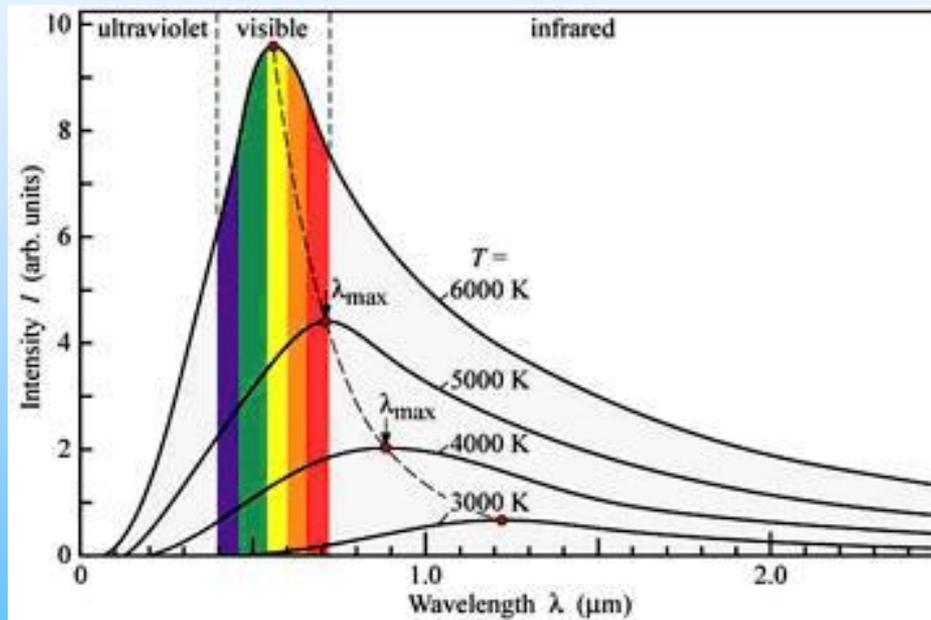
4) Radiação de corpo negro



1911

Lei do deslocamento de Wien :

$$\lambda_{\max} = \frac{0,002898[\text{m} \cdot \text{K}]}{T}$$



$$T_1 > T_2 > T_3 \Rightarrow \lambda_1^{\max} < \lambda_2^{\max} < \lambda_3^{\max}$$

4) Radiação de corpo negro

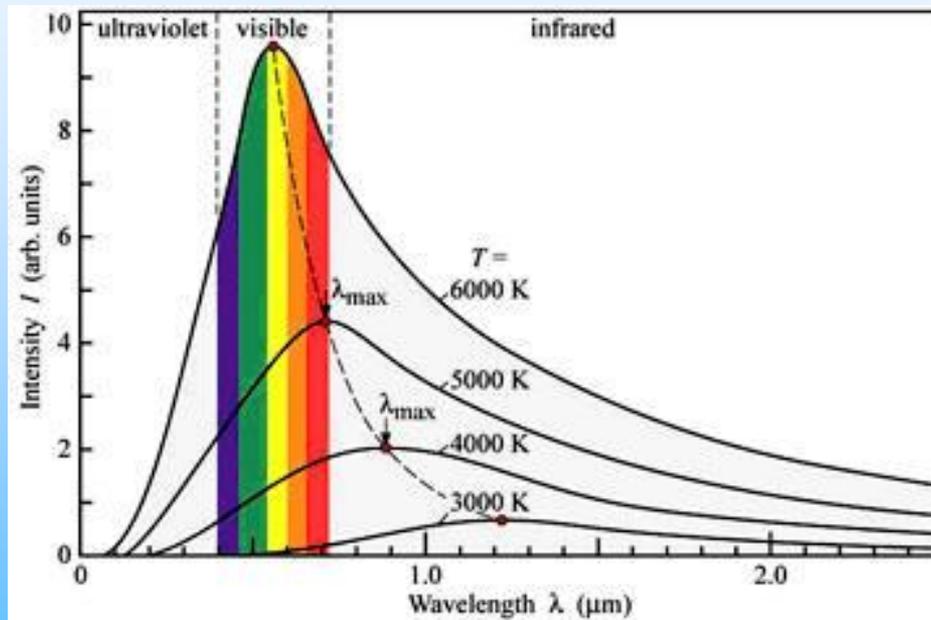


Lei do deslocamento de Wien :

$$\lambda_{\max} = \frac{0,002898[\text{m} \cdot \text{K}]}{T}$$



1911



$$T_1 > T_2 > T_3 \Rightarrow \lambda_1^{\max} < \lambda_2^{\max} < \lambda_3^{\max}$$

branco - azulado ← amarelo ← laranja ← vermelho ← infravermelho

← aquecimento ←

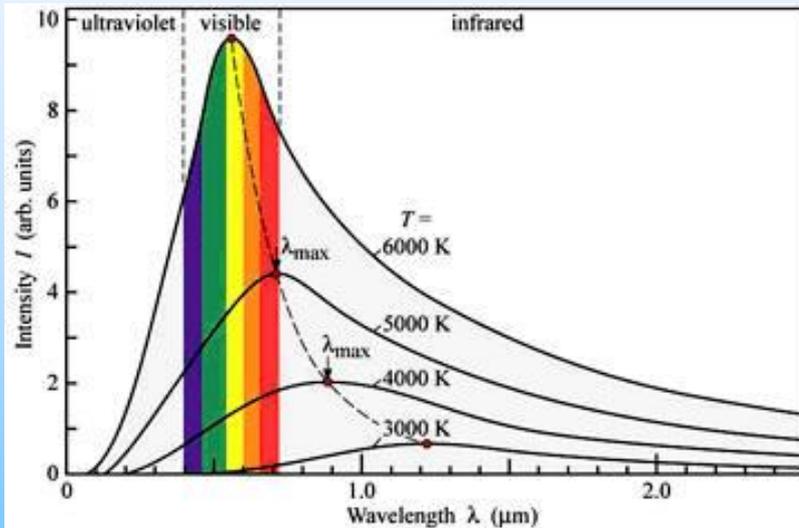
4) Radiação de corpo negro



1911

Lei do deslocamento de Wien :

$$\lambda_{\max} = \frac{0,002898[\text{m} \cdot \text{K}]}{T}$$



$$T_1 > T_2 > T_3 \Rightarrow \lambda_1^{\max} < \lambda_2^{\max} < \lambda_3^{\max}$$

branco - azulado ← amarelo ← laranja ← vermelho ← infravermelho
 ← aquecimento ←

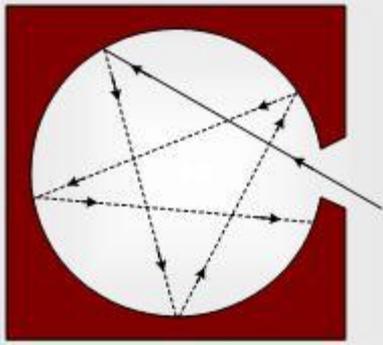
CORES DAS ESTRELAS

CLASSE ESPECTRAL	COR	TEMPERATURA SUPERFÍCIE
O		28.000 - 50.000 K
B		10.000 - 28.000 K
A		7.500 - 10.000 K
F		6.000 - 7.500 K
G		5.000 - 6.000 K
K		3.500 - 5.000 K
M		2.500 - 3.500 K

HIPERCULTURA

4) Radiação de corpo negro

1860 Gustav Kirchhoff sugere que um orifício numa cavidade aquecida à temperatura uniforme deve ter espectro de corpo negro



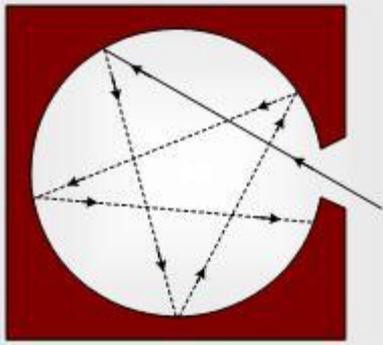
$$R(\lambda) = \left(\frac{c}{4} \right) u(\lambda)$$



Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)

4) Radiação de corpo negro

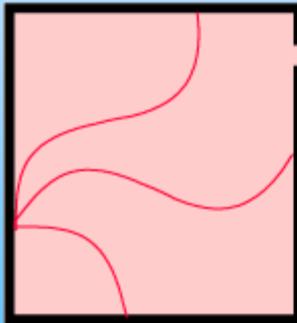
1860 Gustav Kirchhoff sugere que um orifício numa cavidade aquecida à temperatura uniforme deve ter espectro de corpo negro



$$R(\lambda) = \left(\frac{c}{4} \right) u(\lambda)$$



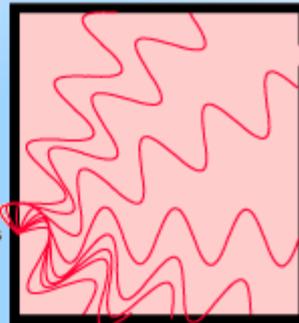
Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)



Number of modes
per unit frequency
per unit volume

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

For higher frequencies
you can fit more modes
into the cavity. For
double the frequency,
four times as many
modes.



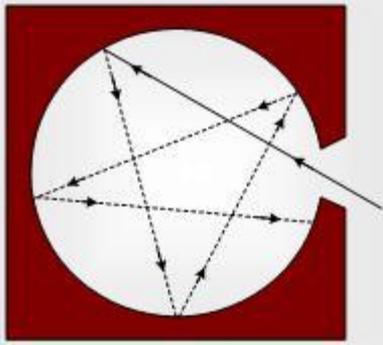
Lord Rayleigh (John Strutt)
(1842-1919)



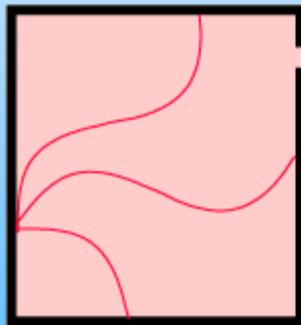
James Jeans

4) Radiação de corpo negro

1860 Gustav Kirchhoff sugere que um orifício numa cavidade aquecida à temperatura uniforme deve ter espectro de corpo negro



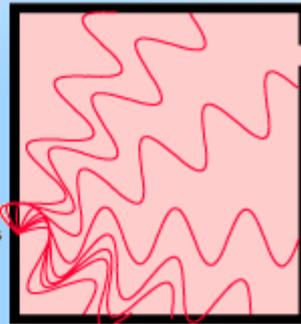
$$R(\lambda) = \left(\frac{c}{4} \right) u(\lambda)$$



Number of modes
per unit frequency
per unit volume

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

For higher frequencies
you can fit more modes
into the cavity. For
double the frequency,
four times as many
modes.



$$u(\lambda) = n(\lambda)kT = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}, \text{ que é a fórmula de Rayleigh \& Jeans}$$

4) Radiação de corpo negro

Mas a fórmula de Rayleigh & Jeans tinha um probleminha:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$



Lord Rayleigh (John Strutt)
(1842-1919)



James Jeans

4) Radiação de corpo negro

Mas a fórmula de Rayleigh & Jeans tinha um probleminha:

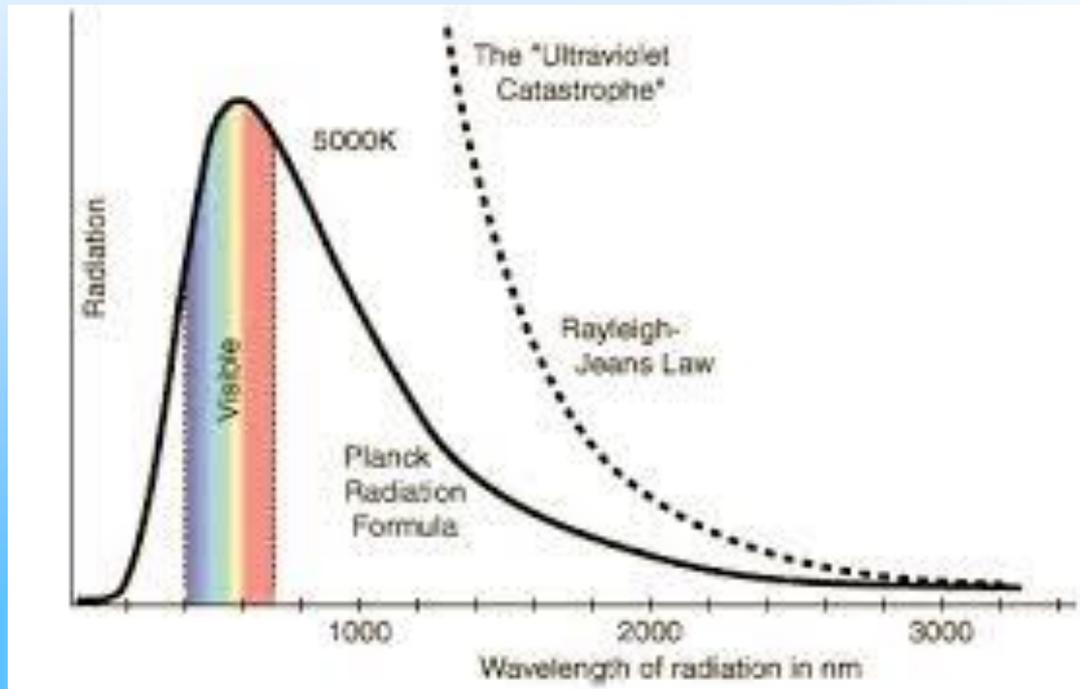
$$u(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$



Lord Rayleigh (John Strutt)
(1842-1919)



James Jeans



4) Radiação de corpo negro

Mas a fórmula de Rayleigh & Jeans tinha um probleminha:

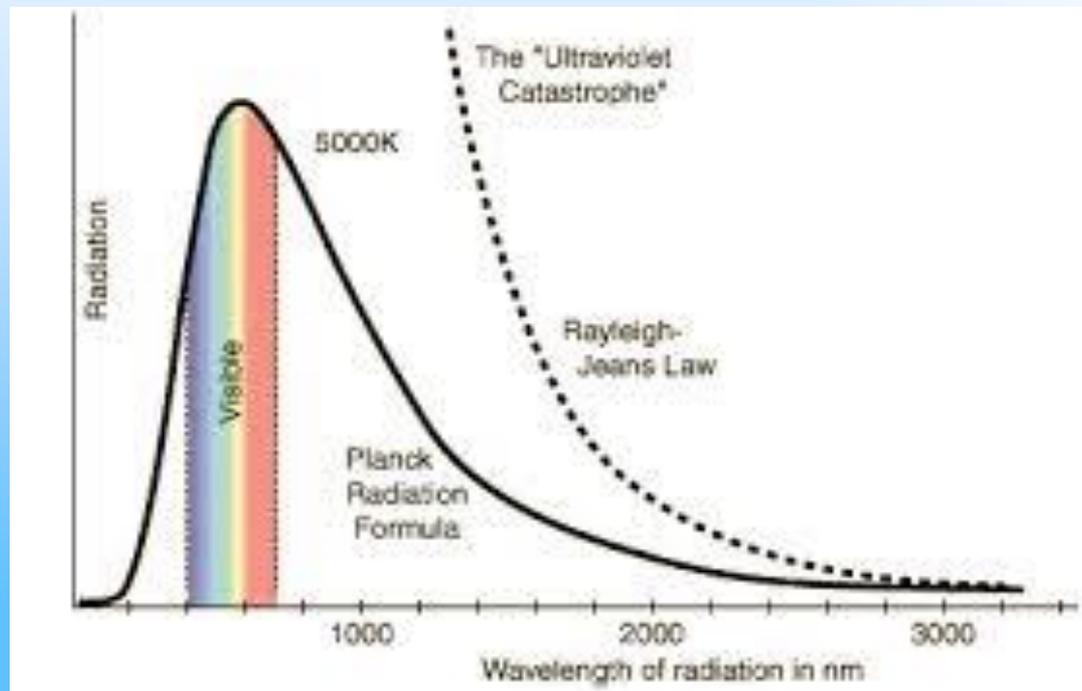
$$u(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$



Lord Rayleigh (John Strutt)
(1842-1919)



James Jeans



A catástrofe do ultravioleta!

4) Radiação de corpo negro

1900 Max Planck formula uma lei de distribuição que se ajustava perfeitamente aos dados em todas os comprimentos de onda:



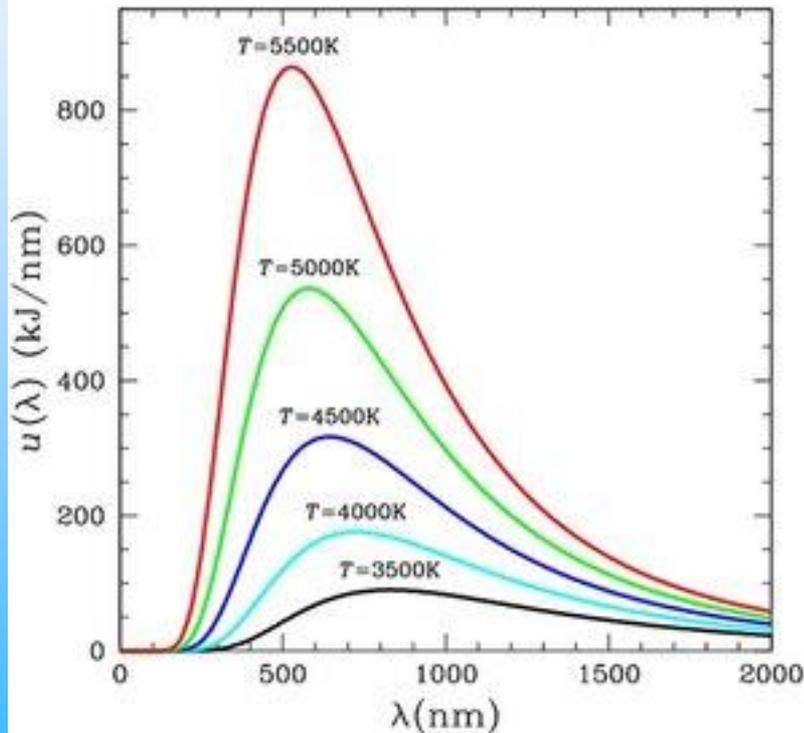
Max Planck
(1858-1947)



1918

4) Radiação de corpo negro

1900 Max Planck formula uma lei de distribuição que se ajustava perfeitamente aos dados em todas os comprimentos de onda:



Max Planck
(1858-1947)



1918

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

4) Radiação de corpo negro

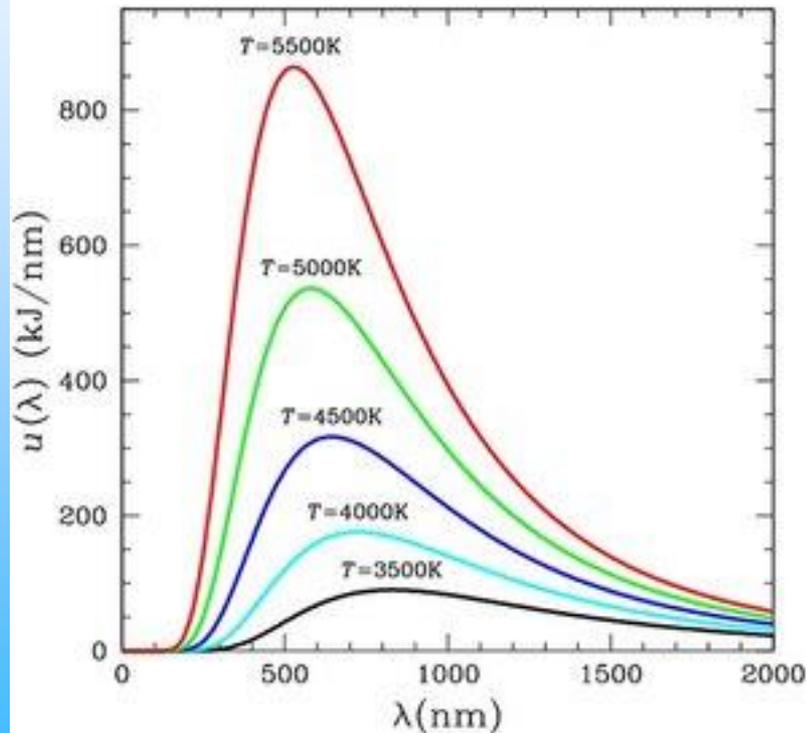
1900 Max Planck formula uma lei de distribuição que se ajustava perfeitamente aos dados em todas os comprimentos de onda:



Max Planck
(1858-1947)



1918



$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Hipótese: as moléculas vibrantes somente podem ter valores discretos de energia:

$E_n = nhf$, onde f é a frequência, n o número quântico e h a constante de Planck.

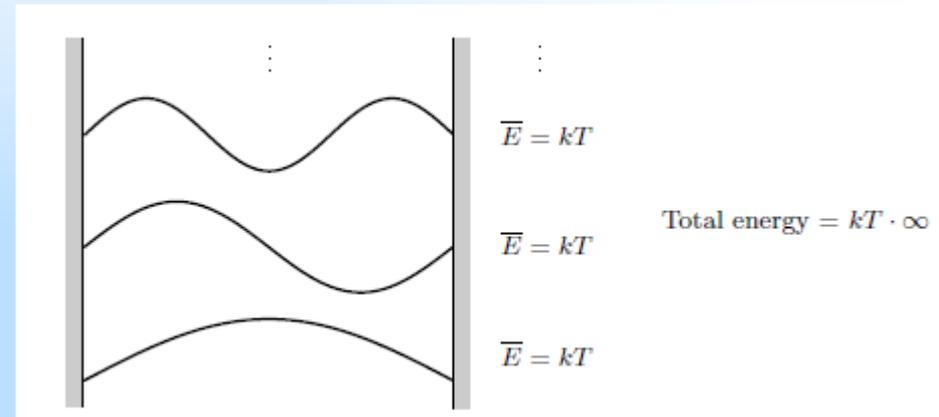
Catástrofe do ultravioleta

Catástrofe do ultravioleta

- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.

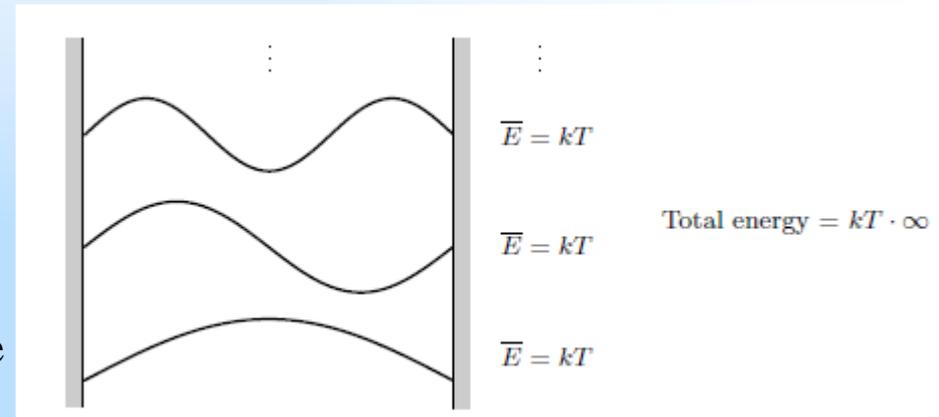
Catástrofe do ultravioleta

- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.



Catástrofe do ultravioleta

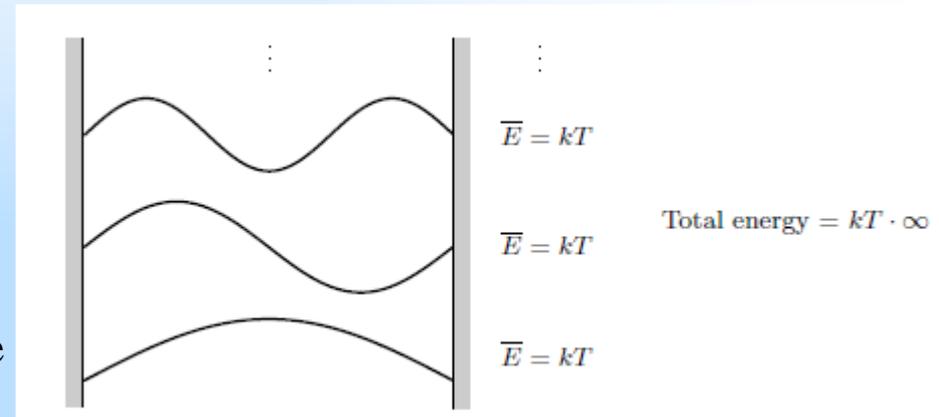
- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.
 - Cada modo de oscilação possui **2 graus de liberdade** (analogamente ao caso mecânico)



Catástrofe do ultravioleta

- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.
 - Cada modo de oscilação possui **2 graus de liberdade** (analogamente ao caso mecânico), então:

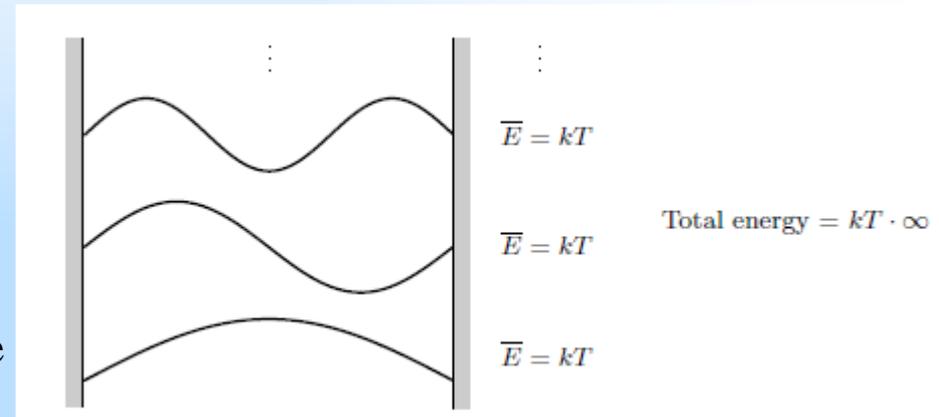
$$\bar{E}_n = 2 \cdot \frac{1}{2} kT$$



Catástrofe do ultravioleta

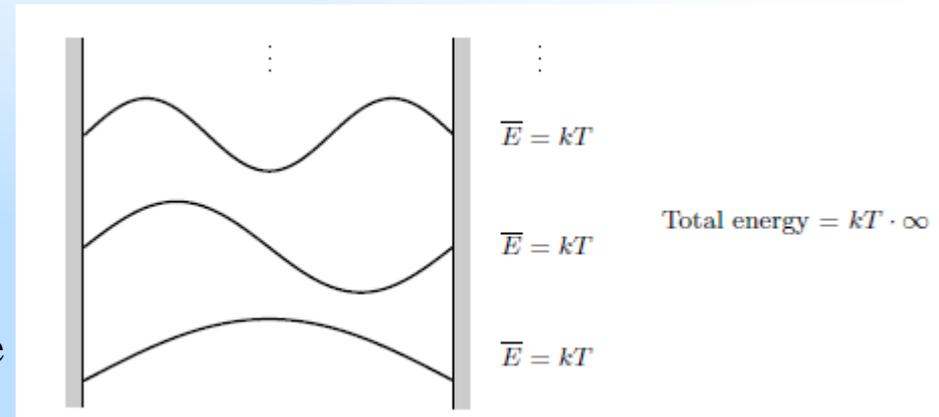
- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.
 - Cada modo de oscilação possui **2 graus de liberdade** (analogamente ao caso mecânico), então:

$$\bar{E}_n = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT$$



Catástrofe do ultravioleta

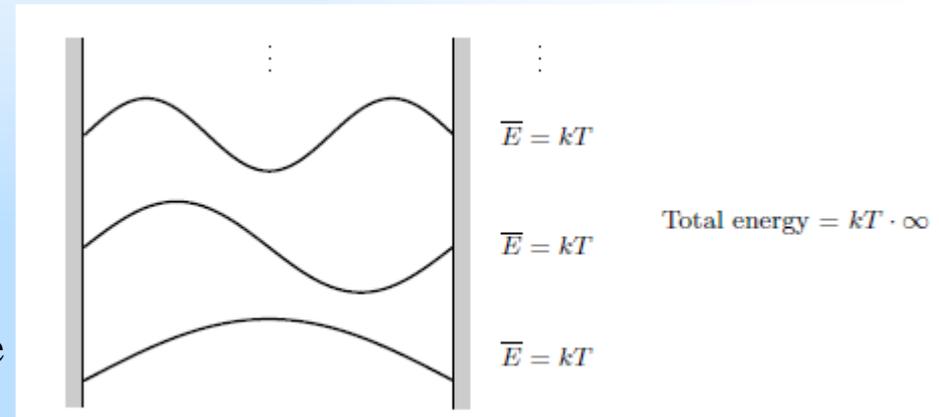
- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.
 - Cada modo de oscilação possui **2 graus de liberdade** (analogamente ao caso mecânico), então:



$$\bar{E}_n = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT, \text{ para cada modo } n$$

Catástrofe do ultravioleta

- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.
 - Cada modo de oscilação possui **2 graus de liberdade** (analogamente ao caso mecânico), então:

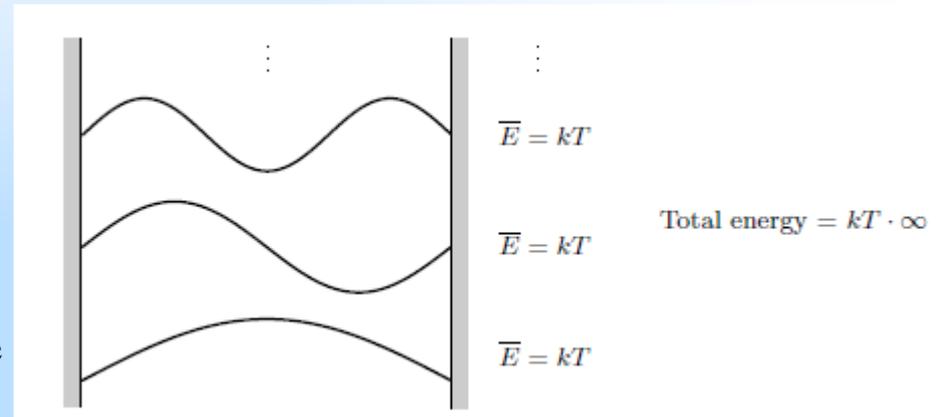


$$\bar{E}_n = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT, \text{ para cada modo } n$$

$$E_{total} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n \bar{E}_n$$

Catástrofe do ultravioleta

- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.
 - Cada modo de oscilação possui **2 graus de liberdade** (analogamente ao caso mecânico), então:

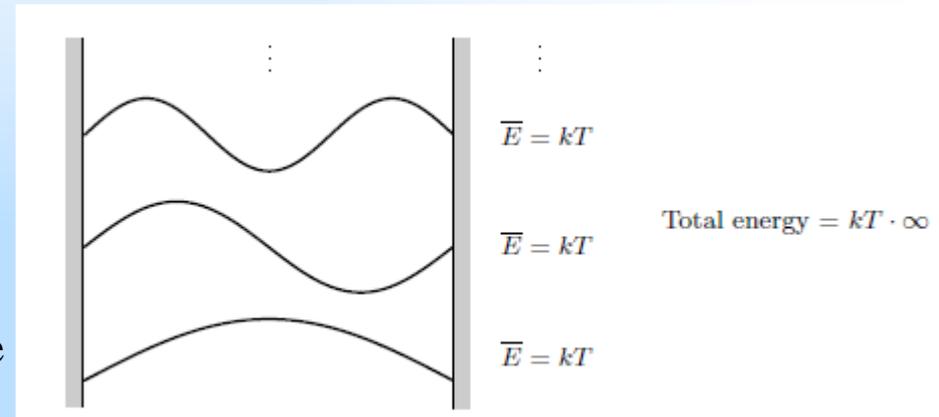


$$\bar{E}_n = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT, \text{ para cada modo } n$$

$$E_{total} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n \bar{E}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot kT$$

Catástrofe do ultravioleta

- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.
 - Cada modo de oscilação possui **2 graus de liberdade** (analogamente ao caso mecânico), então:

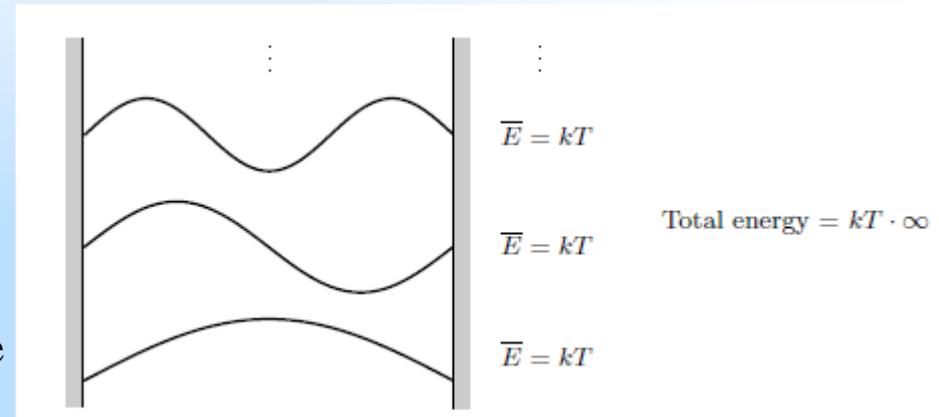


$$\bar{E}_n = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT, \text{ para cada modo } n$$

$$E_{total} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n \bar{E}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot kT = \infty, \text{ para todos os modos.}$$

Catástrofe do ultravioleta

- ❑ Eletromagnetismo clássico: ondas eletromagnéticas são um campo contínuo que permeia o espaço.
- ❑ Dentro de uma caixa, este campo é uma combinação de **ondas estacionárias**. Cada **modo** é um oscilador harmônico com frequência $f = c/\lambda$, bem definida.
 - Cada modo de oscilação possui **2 graus de liberdade** (analogamente ao caso mecânico), então:



$$\bar{E}_n = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT, \text{ para cada modo } n$$

$$E_{total} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n \bar{E}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot kT = \infty, \text{ para todos os modos.}$$

➤ **Catástrofe do ultravioleta**

A distribuição de Planck

A distribuição de Planck

❑ O oscilador harmônico quântico pode assumir somente valores de energia discretos:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots$$

A distribuição de Planck

□ O oscilador harmônico quântico pode assumir somente valores de energia discretos:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots$$

A função de partição de um oscilador simples é:

$$Z = 1 + e^{-\beta hf} + e^{-2\beta hf} + \dots$$

A distribuição de Planck

□ O oscilador harmônico quântico pode assumir somente valores de energia discretos:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots$$

A função de partição de um oscilador simples é:

$$Z = 1 + e^{-\beta hf} + e^{-2\beta hf} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$$

A distribuição de Planck

□ O oscilador harmônico quântico pode assumir somente valores de energia discretos:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots$$

A função de partição de um oscilador simples é:

$$Z = 1 + e^{-\beta hf} + e^{-2\beta hf} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$$

a energia média é:

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

A distribuição de Planck

□ O oscilador harmônico quântico pode assumir somente valores de energia discretos:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots$$

A função de partição de um oscilador simples é:

$$Z = 1 + e^{-\beta hf} + e^{-2\beta hf} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$$

a energia média é:

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

A distribuição de Planck

□ O oscilador harmônico quântico pode assumir somente valores de energia discretos:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots$$

A função de partição de um oscilador simples é:

$$Z = 1 + e^{-\beta hf} + e^{-2\beta hf} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$$

a energia média é:

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

e o “número médio de unidades de energia” é:

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{\bar{E}}{hf}$$

A distribuição de Planck

□ O oscilador harmônico quântico pode assumir somente valores de energia discretos:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots$$

A função de partição de um oscilador simples é:

$$Z = 1 + e^{-\beta hf} + e^{-2\beta hf} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$$

a energia média é:

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

e o “número médio de unidades de energia” é:

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{\bar{E}}{hf} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

A distribuição de Planck

□ O oscilador harmônico quântico pode assumir somente valores de energia discretos:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots$$

A função de partição de um oscilador simples é:

$$Z = 1 + e^{-\beta hf} + e^{-2\beta hf} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$$

a energia média é:

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

e o “número médio de unidades de energia” é:

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1},$$

que é a **distribuição de Planck**.

A distribuição de Planck

$$\bar{n}_{pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

A distribuição de Planck

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

➤ Para pequenos comprimentos de onda:

$$\lambda \ll \frac{hc}{kT}$$

A distribuição de Planck

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

➤ Para pequenos comprimentos de onda:

$$\lambda \ll \frac{hc}{kT} \Leftrightarrow kT \ll \frac{hc}{\lambda}$$

A distribuição de Planck

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

➤ Para pequenos comprimentos de onda:

$$\lambda \ll \frac{hc}{kT} \Leftrightarrow kT \ll \frac{hc}{\lambda} \Leftrightarrow kT \ll hf$$

A distribuição de Planck

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

➤ Para pequenos comprimentos de onda:

$$\lambda \ll \frac{hc}{kT} \Leftrightarrow kT \ll \frac{hc}{\lambda} \Leftrightarrow kT \ll hf \Leftrightarrow hf \gg kT$$

A distribuição de Planck

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

➤ Para pequenos comprimentos de onda:

$$\lambda \ll \frac{hc}{kT} \Leftrightarrow kT \ll \frac{hc}{\lambda} \Leftrightarrow kT \ll hf \Leftrightarrow hf \gg kT \Rightarrow e^{\frac{hf}{kT}} \gg 1$$

A distribuição de Planck

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

➤ Para pequenos comprimentos de onda:

$$\lambda \ll \frac{hc}{kT} \Leftrightarrow kT \ll \frac{hc}{\lambda} \Leftrightarrow kT \ll hf \Leftrightarrow hf \gg kT \Rightarrow e^{\frac{hf}{kT}} \gg 1 \Rightarrow \bar{n}_{Pl} \approx e^{-hf/kT}$$

A distribuição de Planck

$$\bar{n}_{Pl} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

➤ Para pequenos comprimentos de onda:

$$\lambda \ll \frac{hc}{kT} \Leftrightarrow kT \ll \frac{hc}{\lambda} \Leftrightarrow kT \ll hf \Leftrightarrow hf \gg kT \Rightarrow e^{\frac{hf}{kT}} \gg 1 \Rightarrow \bar{n}_{Pl} \approx e^{-hf/kT},$$

portanto, a catástrofe do ultravioleta não ocorre.

Fótons

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1}$$

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$.

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$. Mas o que isso significa?

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$. Mas o que isso significa?

1. Consideremos primeiramente a energia livre de Helmholtz.

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$. Mas o que isso significa?
1. Consideremos primeiramente a energia livre de Helmholtz. Os fótons podem ser criados e destruídos em qualquer quantidade.

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$. Mas o que isso significa?
1. Consideremos primeiramente a energia livre de Helmholtz. Os fótons podem ser criados e destruídos em qualquer quantidade (não há vínculos em N que pode assumir qualquer valor para minimizar F):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = 0$$

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$. Mas o que isso significa?
1. Consideremos primeiramente a energia livre de Helmholtz. Os fótons podem ser criados e destruídos em qualquer quantidade (não há vínculos em N que pode assumir qualquer valor para minimizar F):

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = 0$$

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$. Mas o que isso significa?
2. Em segundo lugar, para uma reação de criação/absorção de um fóton por um elétron, temos:



Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$. Mas o que isso significa?

2. Em segundo lugar, para uma reação de criação/absorção de um fóton por um elétron, temos:

$$e \leftrightarrow e + \gamma$$

e, assim:

$$\mu_e \leftrightarrow \mu_e + \mu_\gamma$$

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$. Mas o que isso significa?

2. Em segundo lugar, para uma reação de criação/absorção de um fóton por um elétron, temos:

$$e \leftrightarrow e + \gamma$$

e, assim:

$$\mu_e \leftrightarrow \mu_e + \mu_\gamma,$$

e concluímos que $\mu_\gamma = 0$.

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$.

Fótons

- As “unidades de energia do campos eletromagnético” são os **fótons**, que são **bósons** e obedecem a distribuição de Bose-Einstein:

$$\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} ,$$

onde $\varepsilon = hf$ é a energia de cada partícula.

- Na comparação com \bar{n}_{Pl} exige-se, portanto, que $\mu = 0$.

- Desta forma, a distribuição de Bose-Einstein se reduz à distribuição de Planck:

$$\bar{n}_{BE} = \bar{n}_{Pl}$$

Somando sobre os modos

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L}$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo.

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n = hf_n$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n = hf_n = \frac{hc}{\lambda_n}$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n = hf_n = \frac{hc}{\lambda_n} = p_n c$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n = hf_n = \frac{hc}{\lambda_n} = p_n c = \frac{hcn}{2L}$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n hf_n = \frac{hc}{\lambda_n} = p_n c = \frac{hcn}{2L}$$

- ❑ Em 3 dimensões:

$$\varepsilon = c|\vec{p}|$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n = hf_n = \frac{hc}{\lambda_n} = p_n c = \frac{hcn}{2L}$$

- ❑ Em 3 dimensões:

$$\varepsilon = c|\vec{p}| = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n = hf_n = \frac{hc}{\lambda_n} = p_n c = \frac{hcn}{2L}$$

- ❑ Em 3 dimensões:

$$\varepsilon = c|\vec{p}| = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \frac{hc}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n = hf_n = \frac{hc}{\lambda_n} = p_n c = \frac{hcn}{2L}$$

- ❑ Em 3 dimensões:

$$\varepsilon = c|\vec{p}| = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \frac{hc}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{hc}{2L}n$$

Somando sobre os modos

- ❑ Vamos calcular a energia total dos fótons, somando sobre todos os modos (estados) possíveis.
- ❑ Num poço unidimensional de largura L , os comprimentos de onda e momentos permitidos são:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} ; p_n = \frac{hn}{2L},$$

onde n é um inteiro associado ao modo. No caso dos fótons:

$$\varepsilon_n = hf_n = \frac{hc}{\lambda_n} = p_n c = \frac{hcn}{2L}$$

- ❑ Em 3 dimensões:

$$\varepsilon = c|\vec{p}| = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \frac{hc}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{hc}{2L}n,$$

onde n é o módulo do vetor \vec{n} no espaço-n.

Somando sobre os modos

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon)$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon)$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \bar{n}_{pl}(\varepsilon)$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1}$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1},$$

que também pode ser convertida em integrais, com o limite superior de n infinito

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1},$$

que também pode ser convertida em integrais, com o limite superior de n infinito:

$$U = 2 \dots$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1},$$

que também pode ser convertida em integrais, com o limite superior de n infinito:

$$U = 2 \iiint n^2 \sin \theta \, dn \, d\theta \, d\phi \dots$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1},$$

que também pode ser convertida em integrais, com o limite superior de n infinito:

$$U = 2 \int_0^{\infty} dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi n^2 \sin \theta \dots$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1},$$

que também pode ser convertida em integrais, com o limite superior de n infinito:

$$U = 2 \int_0^\infty dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi n^2 \sin \theta \frac{hcn}{2L} \dots$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1},$$

que também pode ser convertida em integrais, com o limite superior de n infinito:

$$U = 2 \int_0^{\infty} dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi n^2 \sin \theta \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1}$$

Somando sobre os modos

□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1},$$

que também pode ser convertida em integrais, com o limite superior de n infinito:

$$U = \cancel{2} \int_0^\infty dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi n^2 \sin \theta \frac{hcn}{\cancel{2}L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1}$$

Somando sobre os modos

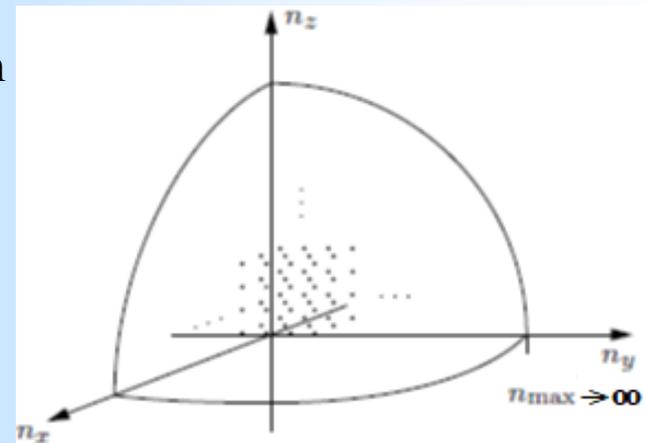
□ A energia média dos fótons (para 2 polarizações) será:

$$U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \varepsilon \bar{n}_{Pl}(\varepsilon) = 2 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{2L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1},$$

que também pode ser convertida em integrais, com o limite superior de n infinito:

$$U = \cancel{2} \int_0^\infty dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi n^2 \sin \theta \frac{hcn}{\cancel{2}L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1}$$

e, analogamente, a integração é feita sobre um octante de esfera.



O espectro de Planck

□ Mudando de variável ($\varepsilon = hcn/2L$):

$$U = \int_0^{\infty} dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi n^2 \sin \theta \frac{hcn}{L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1}$$

O espectro de Planck

□ Mudando de variável ($\varepsilon = hcn/2L$):

$$U = \int_0^{\infty} d\left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right)^2 \sin\theta \frac{hc}{L} \left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right) \frac{1}{e^{hc\left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right)/2LkT} - 1}$$

O espectro de Planck

□ Mudando de variável ($\varepsilon = hcn/2L$):

$$U = \int_0^{\infty} d\left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right)^2 \sin\theta \frac{hc}{L} \left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right) \frac{1}{e^{hc\left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right)/2LkT} - 1}$$

O espectro de Planck

□ Mudando de variável ($\varepsilon = hcn/2L$):

$$U = \int_0^{\infty} d\left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \left(\frac{2L\varepsilon}{hc}\right)^2 \sin\theta \, 2\varepsilon \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

O espectro de Planck

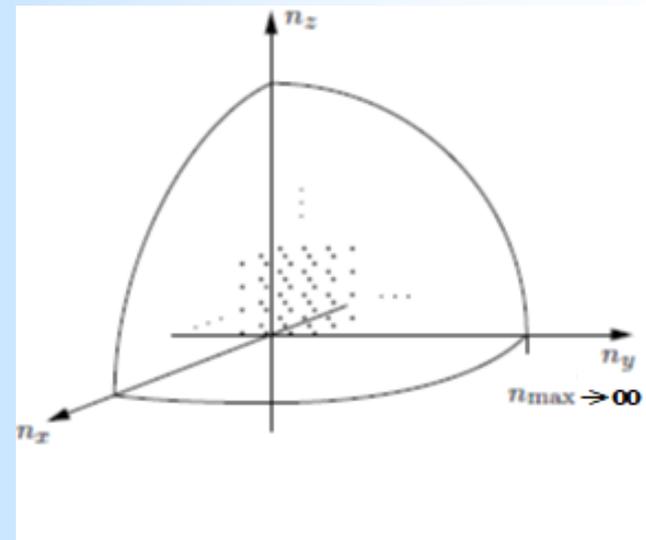
□ Mudando de variável ($\varepsilon = hcn/2L$):

$$U = 2 \left(\frac{2L}{hc} \right)^3 \int_0^\infty d\varepsilon \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \sin \theta \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

O espectro de Planck

□ Integrando em θ e ϕ sobre o octante de esfera:

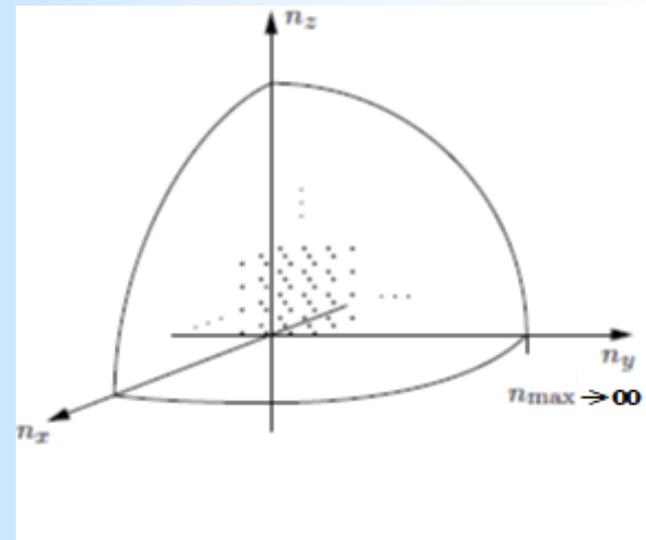
$$U = 2 \left(\frac{2L}{hc} \right)^3 \int_0^\infty d\varepsilon \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$



O espectro de Planck

□ Integrando em θ e ϕ sobre o octante de esfera:

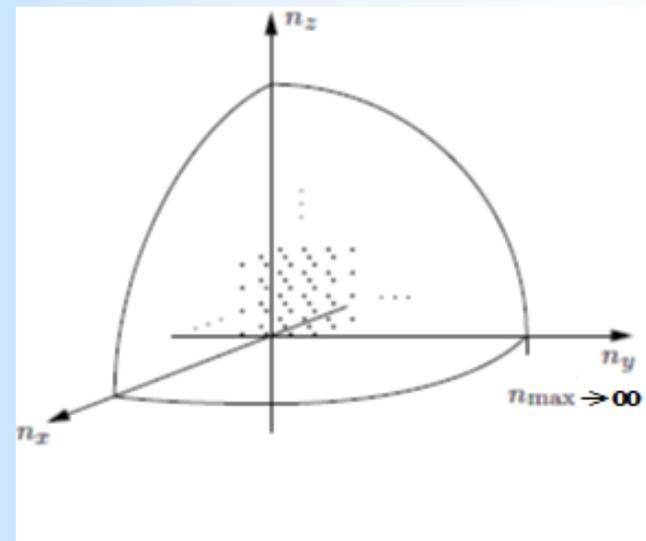
$$U = 2 \left(\frac{2L}{hc} \right)^3 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$



O espectro de Planck

□ Integrando em θ e ϕ sobre o octante de esfera:

$$U = \mathcal{Z} \left(\frac{2L}{hc} \right)^3 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\pi}{\mathcal{Z}} \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$



O espectro de Planck

□ Reorganizando:

$$U = \left(\frac{2L}{hc}\right)^3 \int_0^\infty d\varepsilon \pi \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

O espectro de Planck

□ Rearranjando:

$$U = \frac{8L^3}{(hc)^3} \int_0^{\infty} d\varepsilon \pi \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

O espectro de Planck

□ Reorganizando:

$$U = L^3 \int_0^{\infty} \frac{8\pi\varepsilon^3 / (hc)^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1} d\varepsilon$$

O espectro de Planck

□ Substituindo $V = L^3$:

$$U = V \int_0^{\infty} \frac{8\pi\varepsilon^3/(hc)^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1} d\varepsilon$$

O espectro de Planck

□ Substituindo e integrando, vem:

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\infty} \frac{8\pi\varepsilon^3/(hc)^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1} d\varepsilon$$

O espectro de Planck

□ Substituindo e integrando, vem:

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\infty} \frac{8\pi\varepsilon^3 / (hc)^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1} d\varepsilon$$

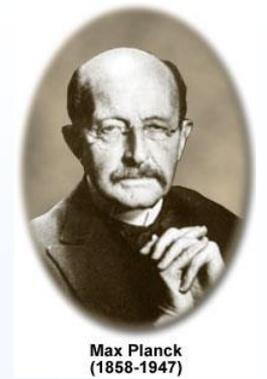
□ O integrando desta expressão é interpretado como a densidade de energia por unidade de energia dos fótons, ou, o **espectro** de fótons:

$$u(\varepsilon) = \frac{8\pi}{(hc)^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

O espectro de Planck

❑ Substituindo e integrando, vem:

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\infty} \frac{8\pi\varepsilon^3 / (hc)^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1} d\varepsilon$$



1918

❑ O integrando desta expressão é interpretado como a densidade de energia por unidade de energia dos fótons, ou, o **espectro** de fótons:

$$u(\varepsilon) = \frac{8\pi}{(hc)^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

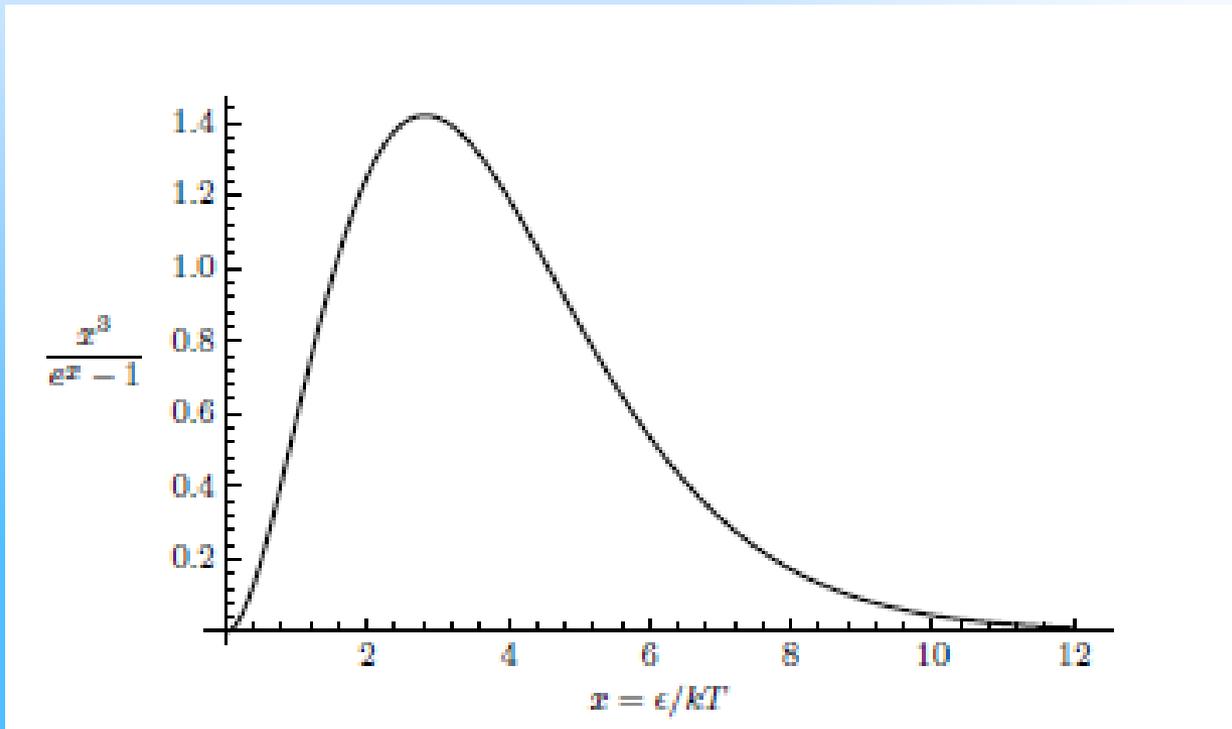
Esta é a fórmula deduzida por Planck.

O espectro de Planck

□ Mudando novamente de variáveis ($x = \epsilon/kT$), vem:

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

A função está graficada abaixo:

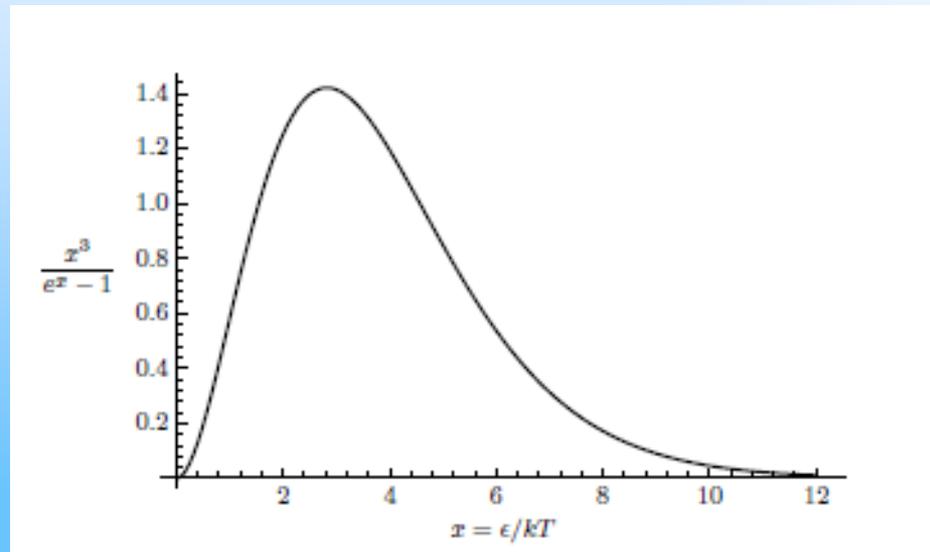


O espectro de Planck

☐ Mudando novamente de variáveis ($x = \varepsilon/kT$), vem:

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

A função está graficada abaixo:



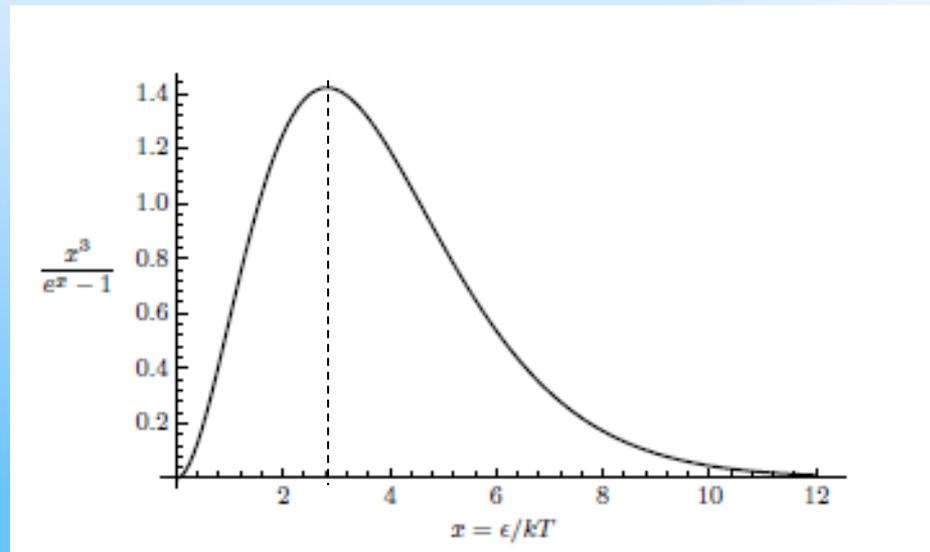
☐ A área sob a curva, multiplicada por $8\pi(kT)^4/(hc)^3$ dá a densidade de energia da radiação eletromagnética dentro da correspondente faixa de energia (ou frequência) dos fótons.

O espectro de Planck

❑ Mudando novamente de variáveis ($x = \varepsilon/kT$), vem:

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

A função está graficada abaixo:

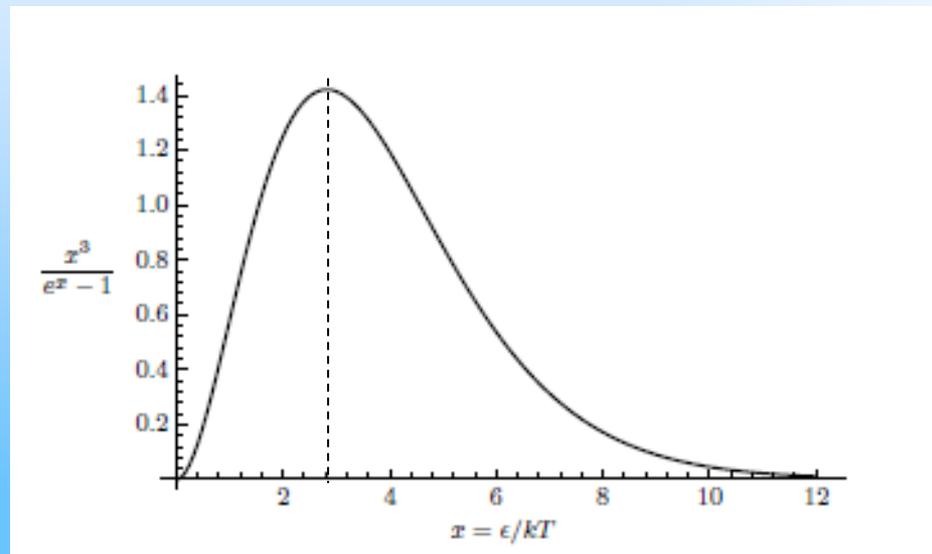


- ❑ A área sob a curva, multiplicada por $8\pi(kT)^4/(hc)^3$ dá a densidade de energia da radiação eletromagnética dentro da correspondente faixa de energia (ou frequência) dos fótons.
- ❑ O máximo ocorre em $x = 2,82$ ou $\varepsilon = 2,82 kT$.

Lei de Wien

- O máximo do espectro ocorre num valor proporcional à temperatura $\varepsilon = 2,82 kT$ e, como:

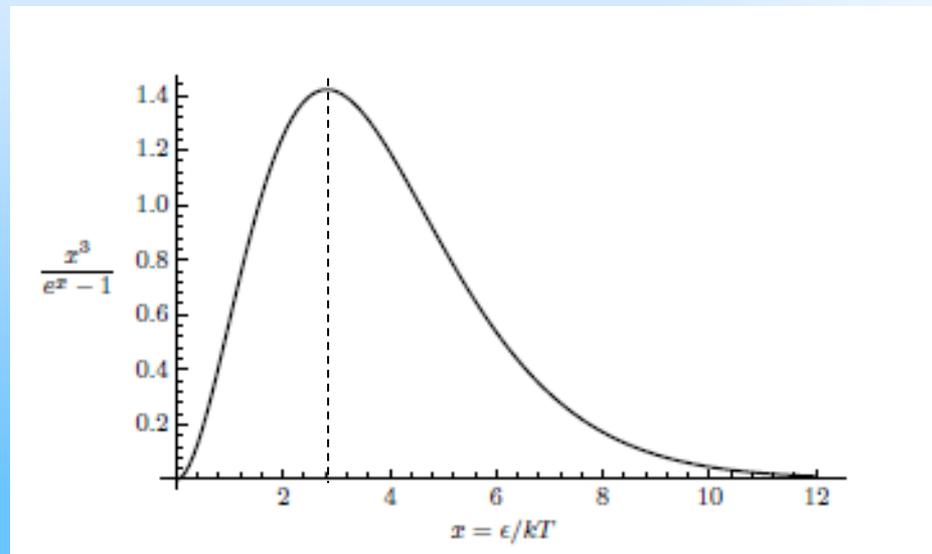
$$\varepsilon = hf = \frac{hc}{\lambda}$$



Lei de Wien

- O máximo do espectro num valor proporcional à temperatura $\varepsilon = 2,82 kT$ e, como:

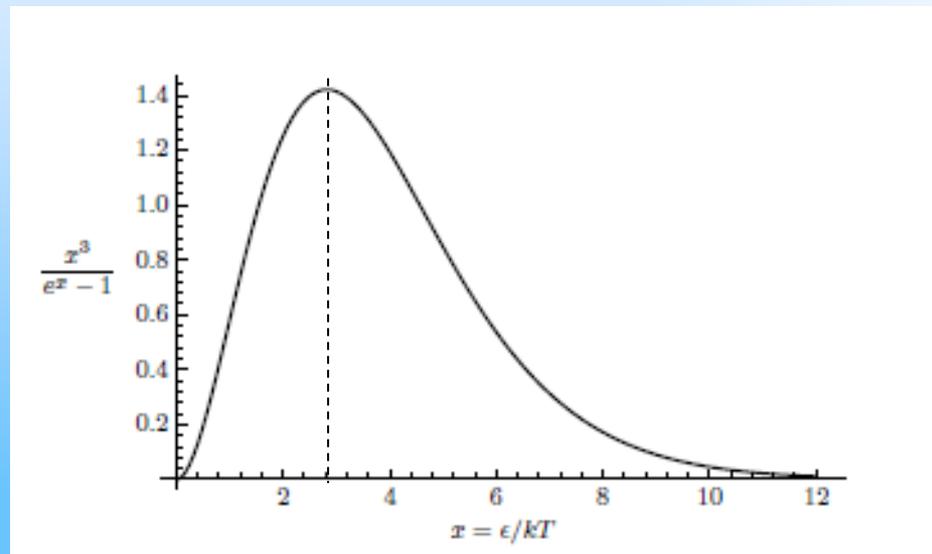
$$\varepsilon_{max} = \frac{hc}{\lambda_{max}} \propto T$$



Lei de Wien

- O máximo do espectro num valor proporcional à temperatura $\epsilon = 2,82 kT$ e, como:

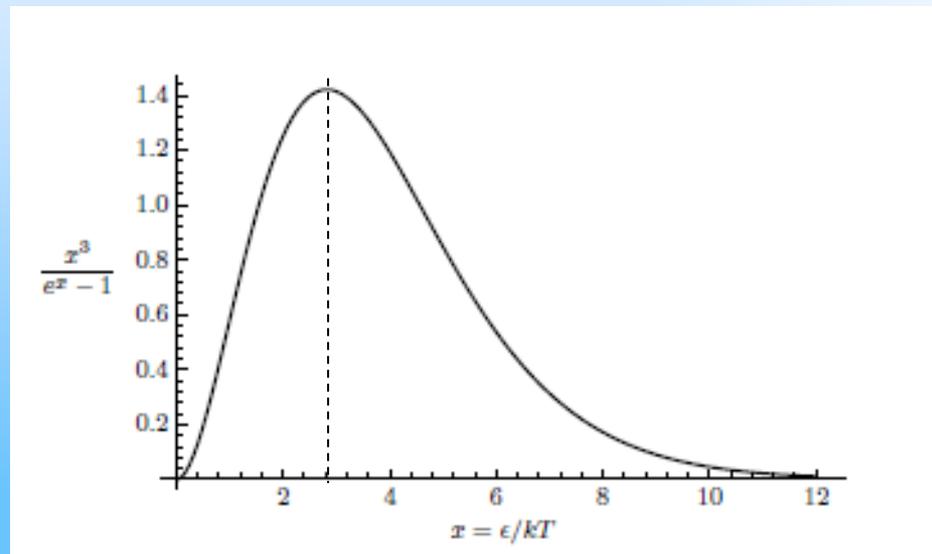
$$\epsilon_{max} = \frac{hc}{\lambda_{max}} \propto T \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{const.}{T}$$



Lei de Wien

- O máximo do espectro num valor proporcional à temperatura $\epsilon = 2,82 kT$ e, como:

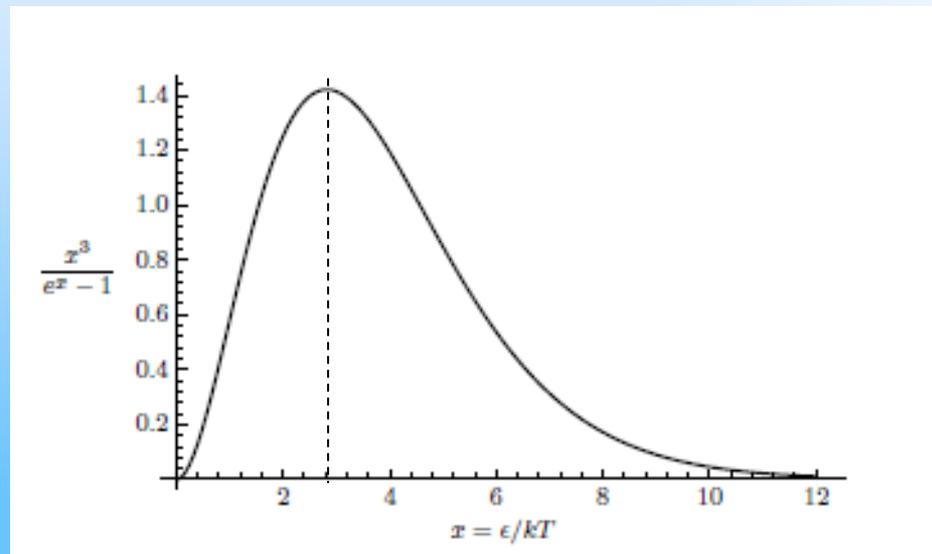
$$\epsilon_{max} = \frac{hc}{\lambda_{max}} \propto T \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{2,898 \text{ [mm} \cdot \text{K]}}{T}$$



Lei de Wien

- O máximo do espectro num valor proporcional à temperatura $\epsilon = 2,82 kT$ e, como:

$$\epsilon_{max} = \frac{hc}{\lambda_{max}} \propto T \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{2,898 [\text{mm} \cdot \text{K}]}{T}$$

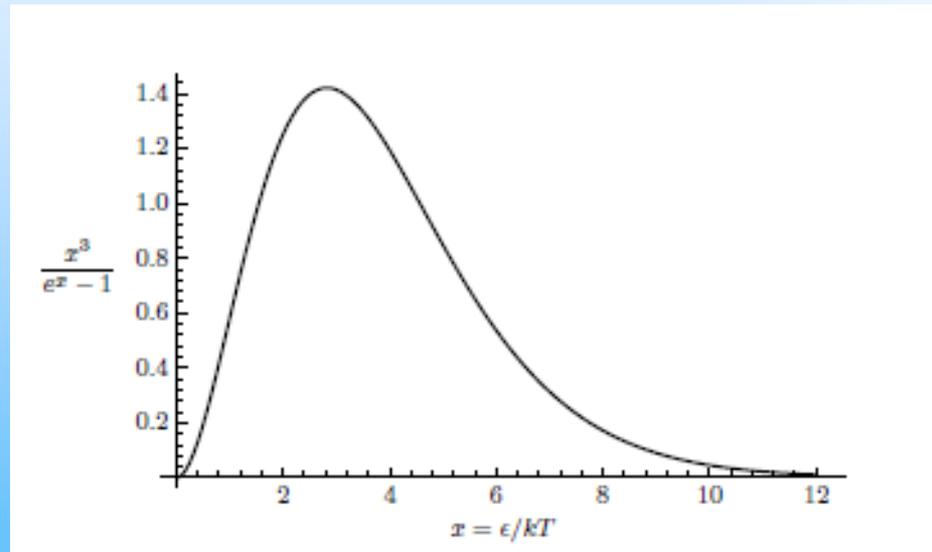


- Esta é a lei do deslocamento de Wien.

Energia total

□ Resolvendo a integral:

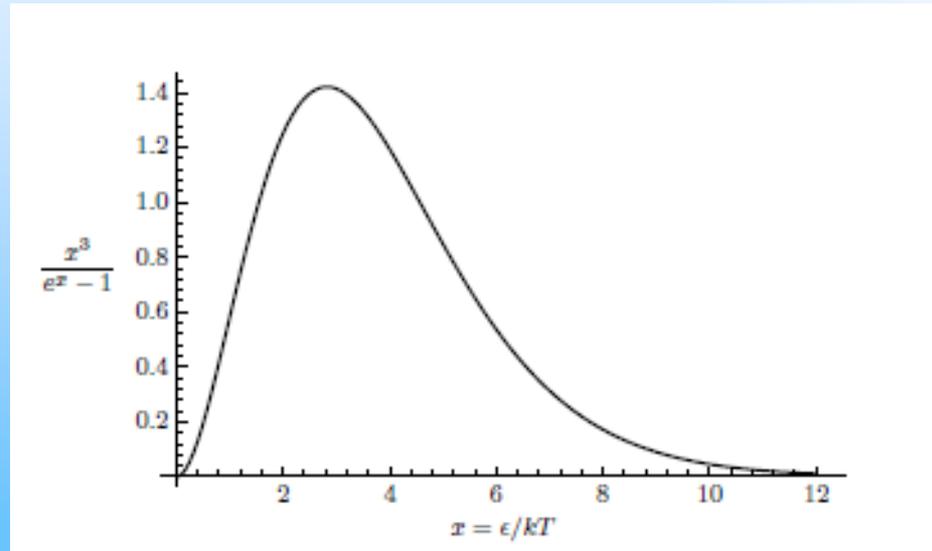
$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$



Energia total

□ Resolvendo a integral, obtemos:

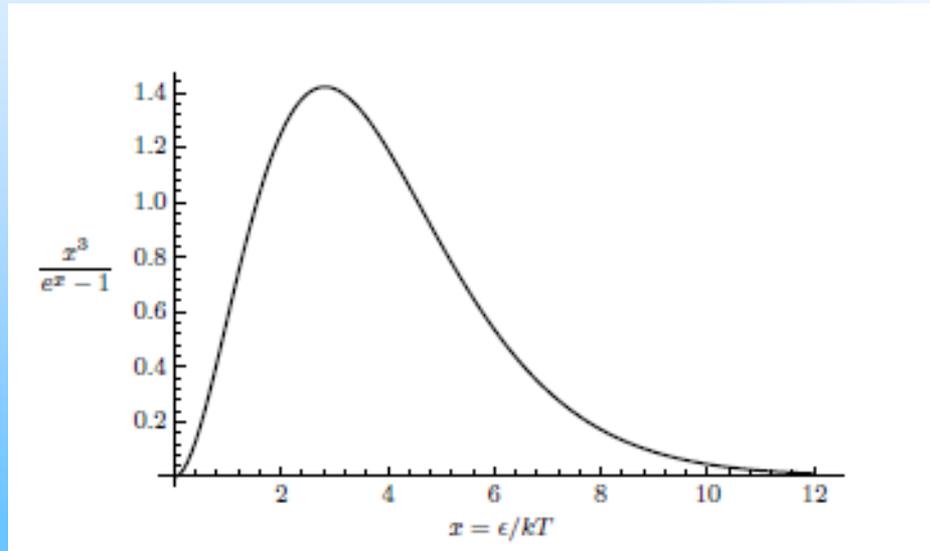
$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \frac{\pi^4}{15}$$



Energia total

□ Resolvendo a integral, obtemos:

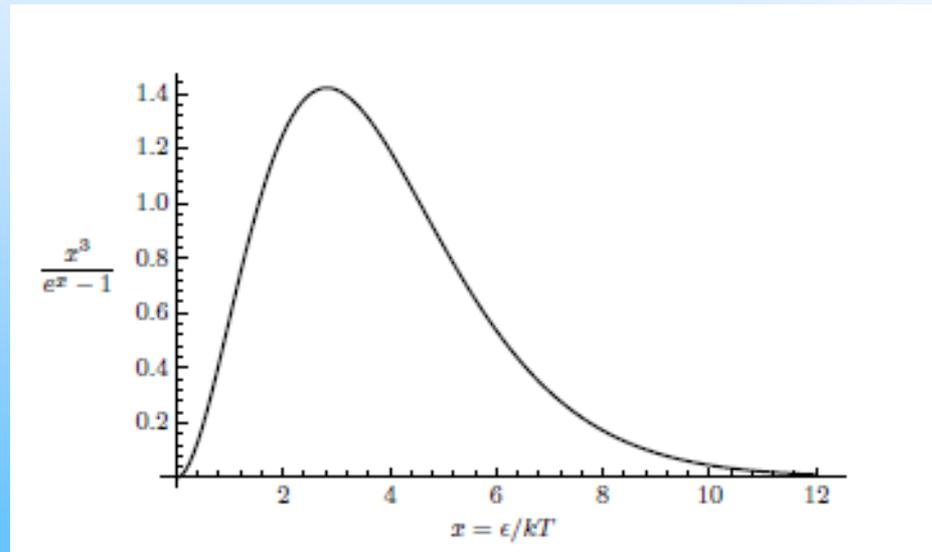
$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi(kT)^4 \pi^4}{(hc)^3 15} = \frac{8\pi^5(kT)^4}{15(hc)^3}$$



Energia total

□ Resolvendo a integral, obtemos:

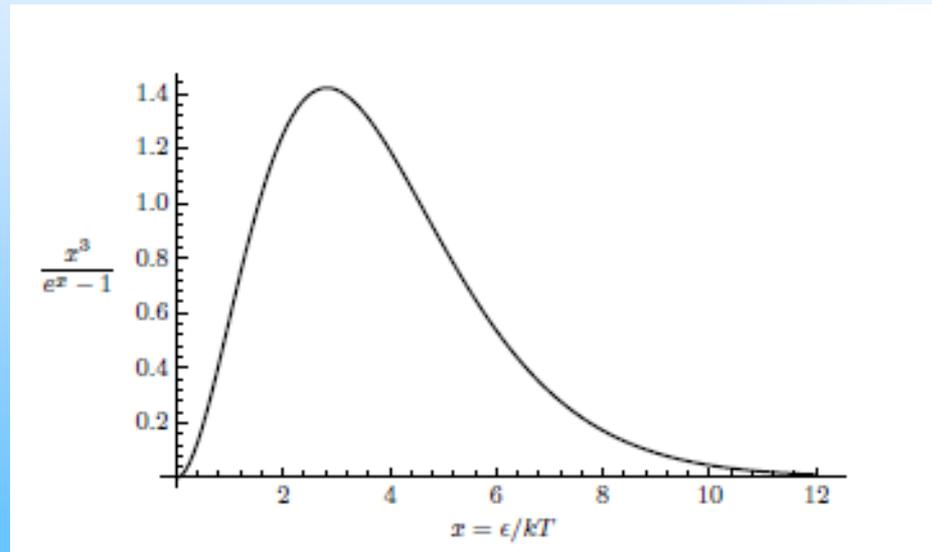
$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15(hc)^3}$$



Energia total

□ Resolvendo a integral, obtemos:

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi^5(kT)^4}{15(hc)^3} \propto T^4$$

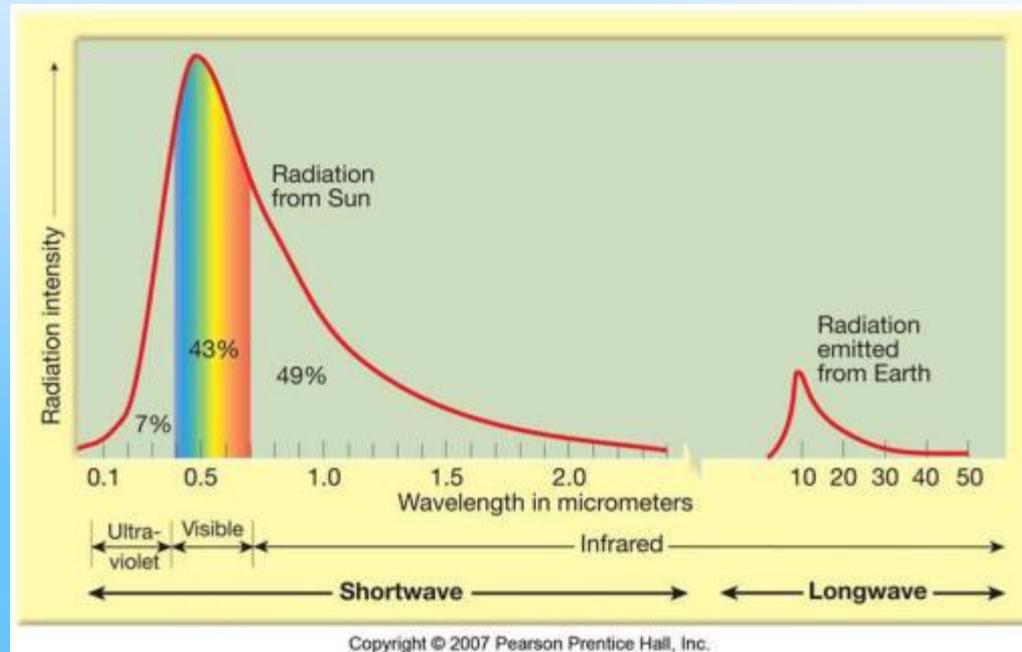


Energia total

☐ Resolvendo a integral, obtemos:

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15(hc)^3} \propto T^4$$

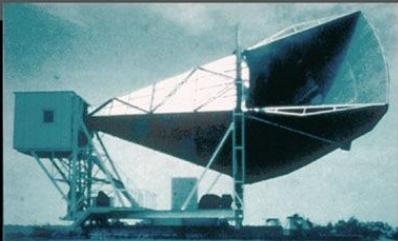
$$R = \sigma T^4$$



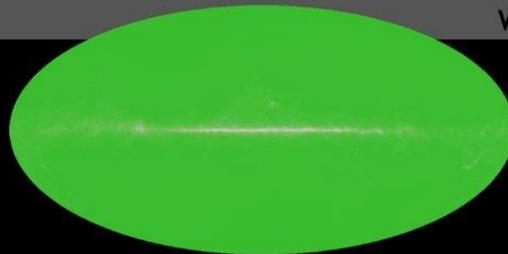
☐ Esta é a lei de Stefan-Boltzmann.

Radiação cósmica de fundo

1965



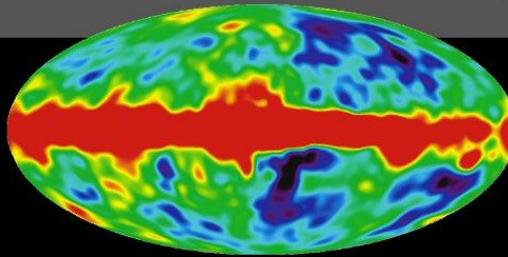
Penzias and
Wilson



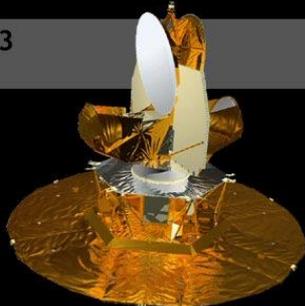
1992



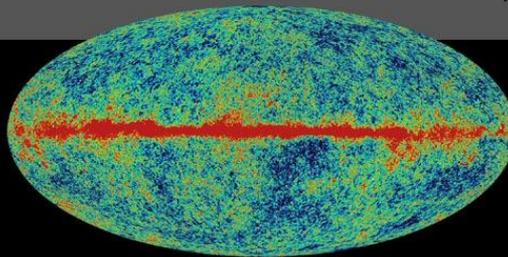
COBE



2003

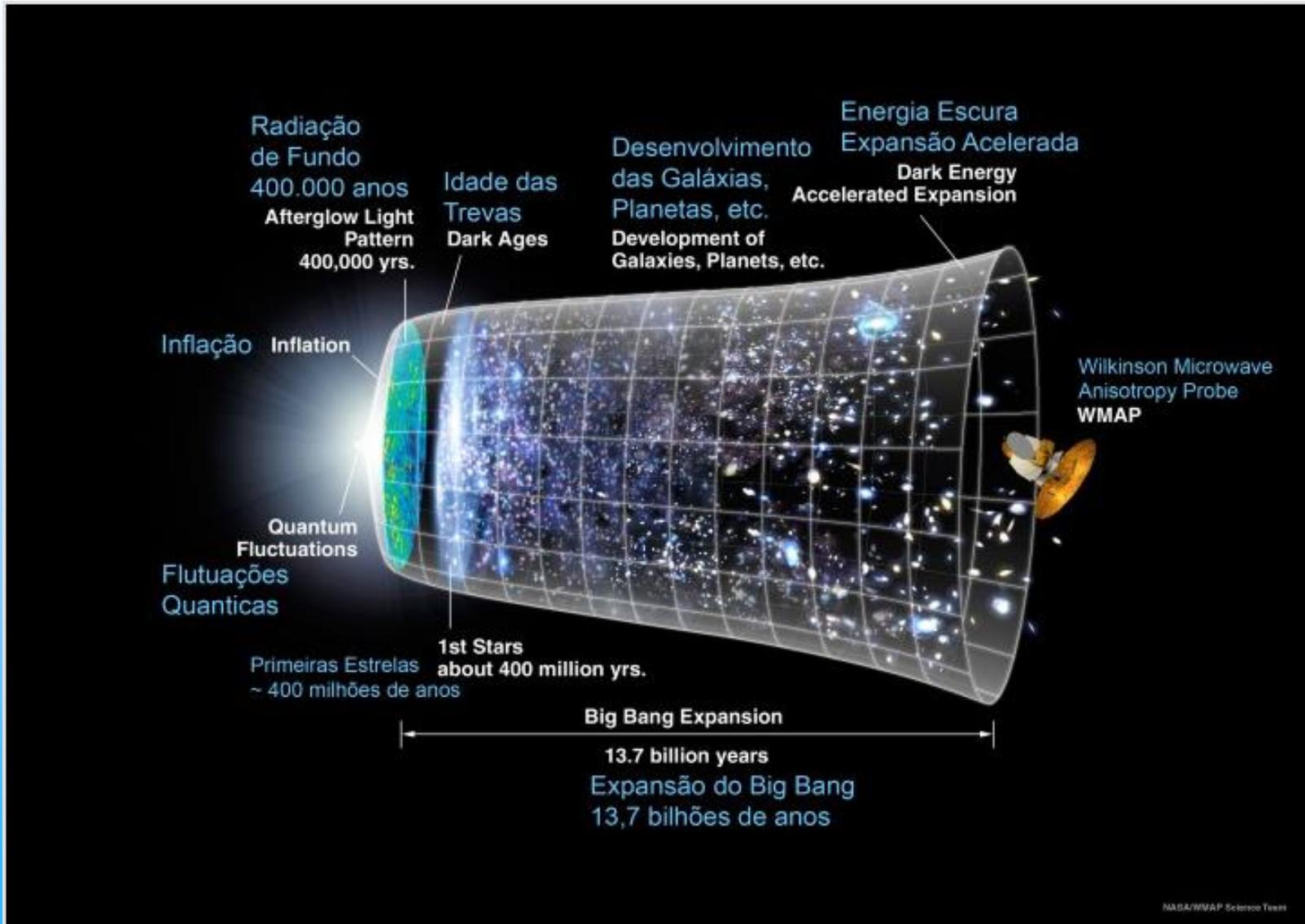


WMAP

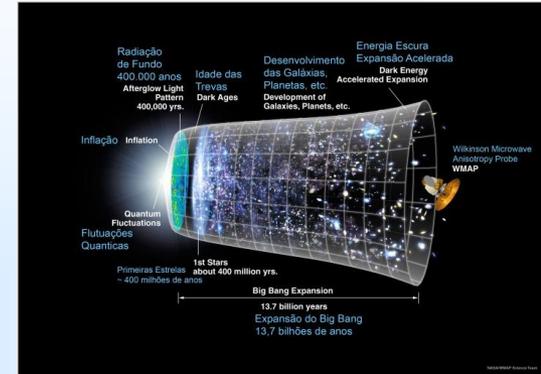
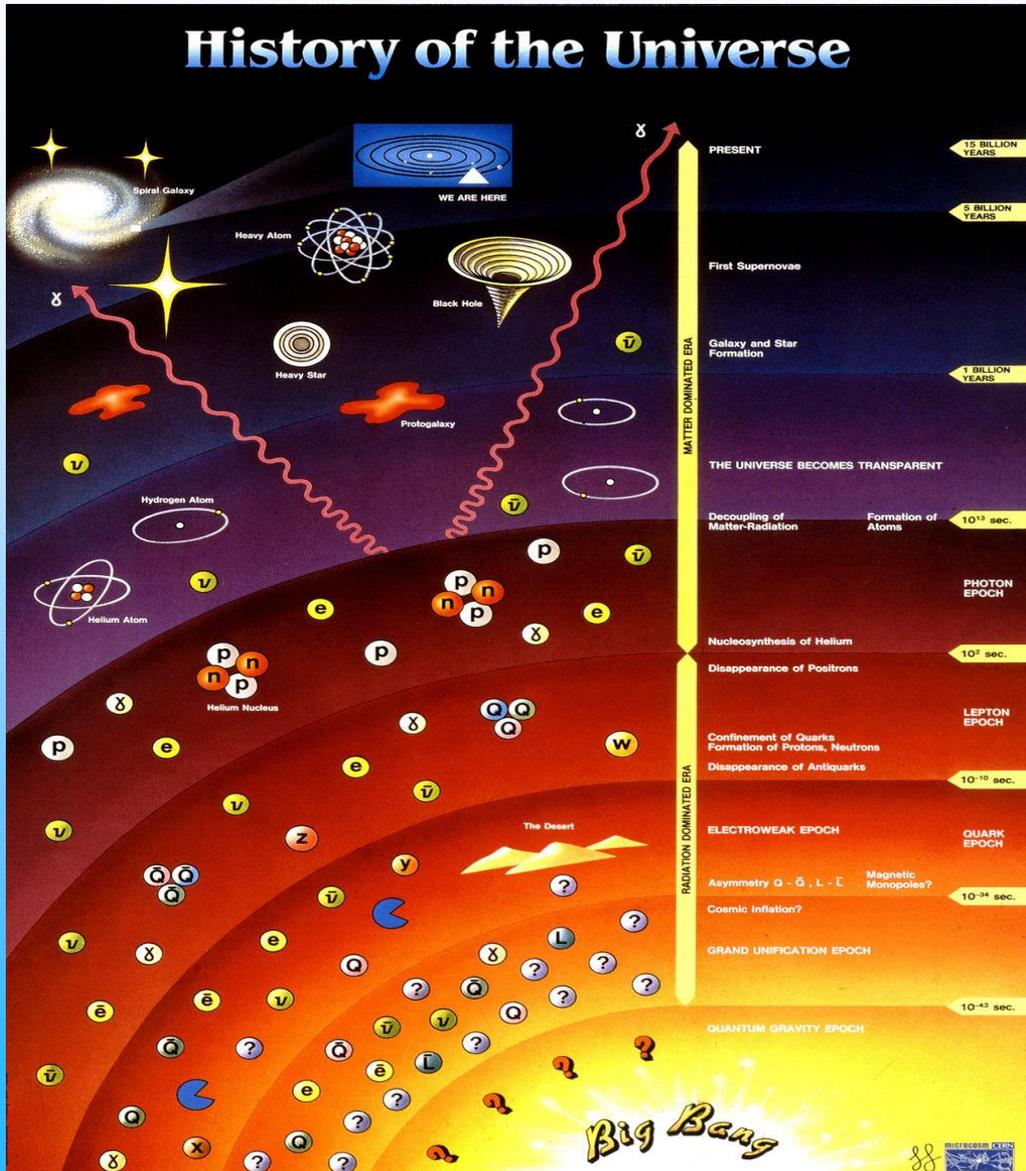


1965 Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1936-) detectam a radiação cósmica de fundo nas frequências de microondas.

Radiação cósmica de fundo



Radiação cósmica de fundo



Radiação cósmica de fundo

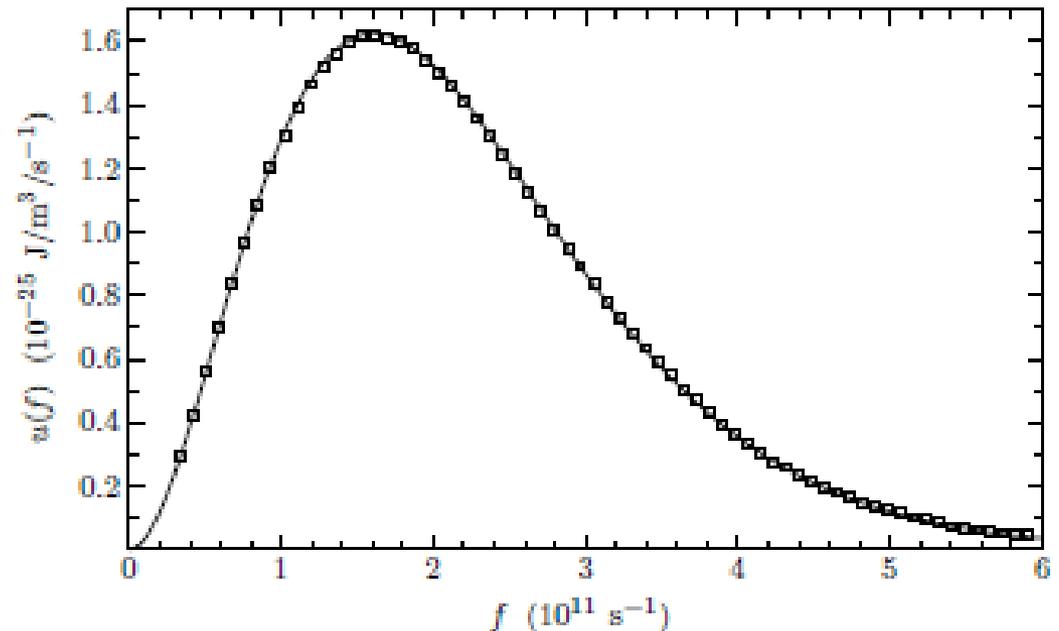


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of $2.728 \pm 0.002 \text{ K}$. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

□ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

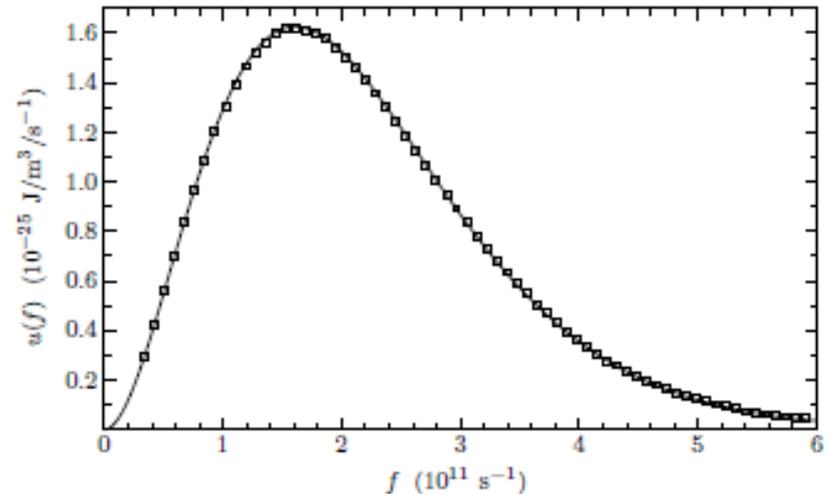


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of $2.728 \pm 0.002 \text{ K}$. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

☐ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

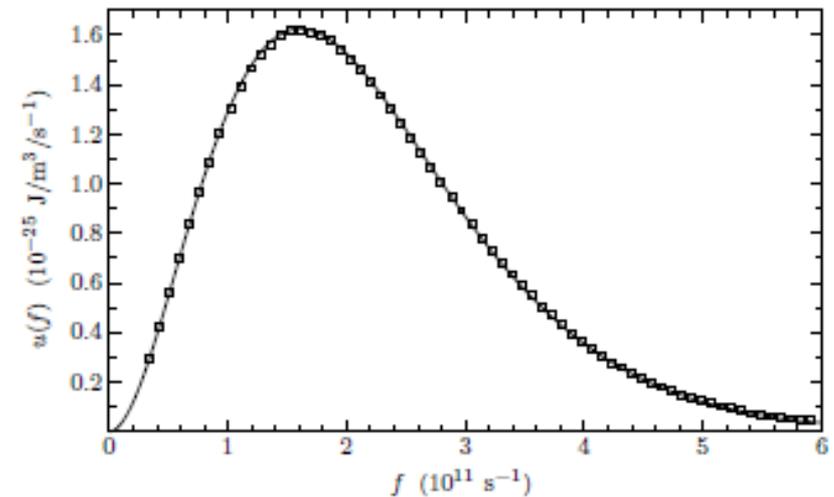
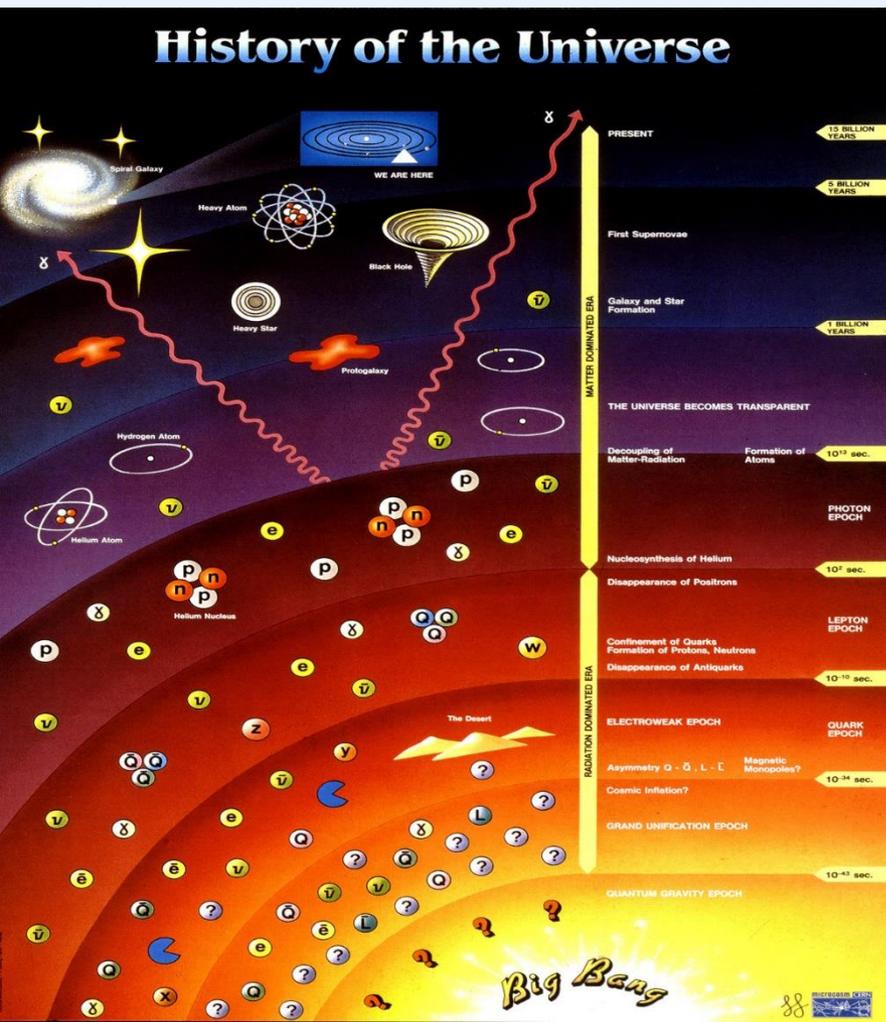


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of 3×10^{11} s⁻¹ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0$ mm. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* 354, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

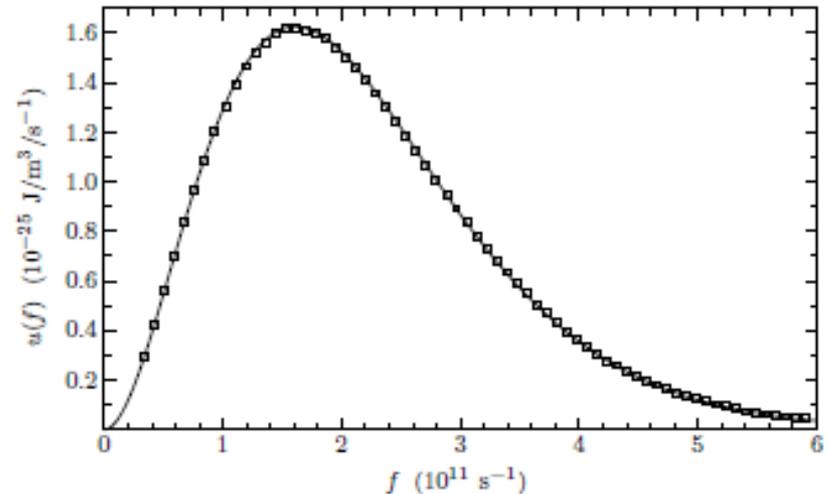


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf$$

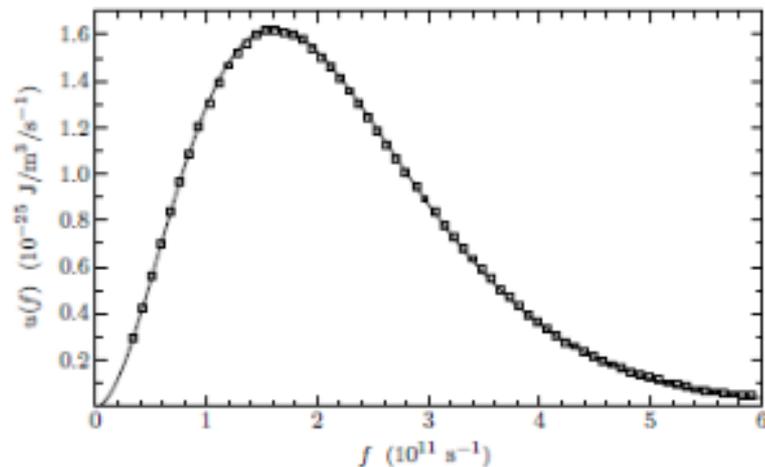


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0$ mm. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

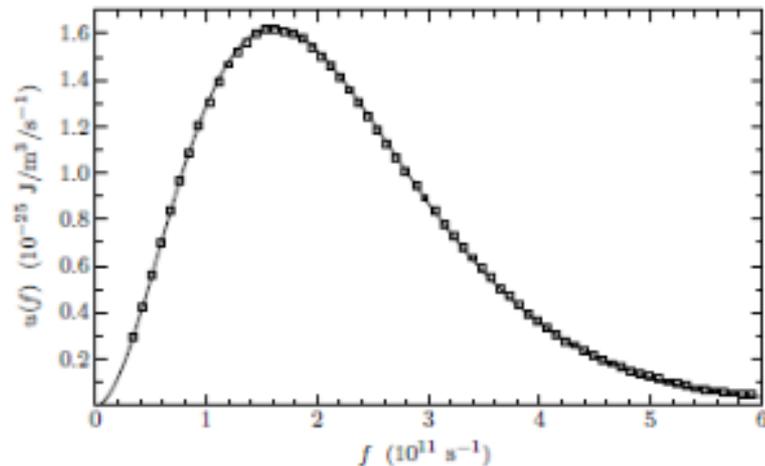


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0$ mm. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda}$$

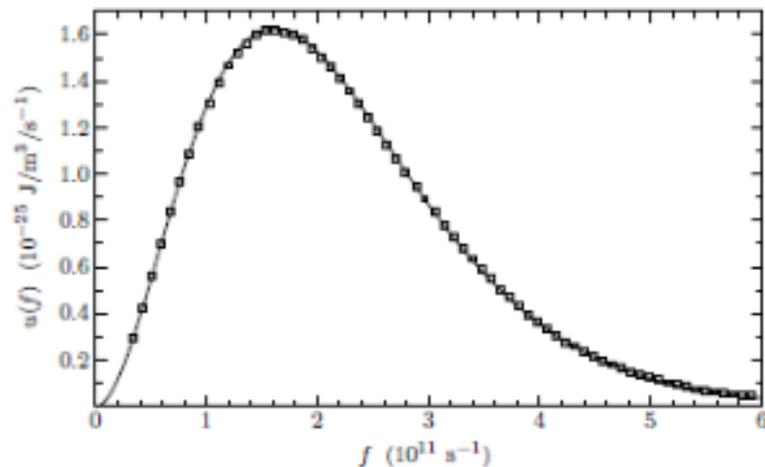


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$6,6 \times 10^{-4} \text{ eV} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda}$$

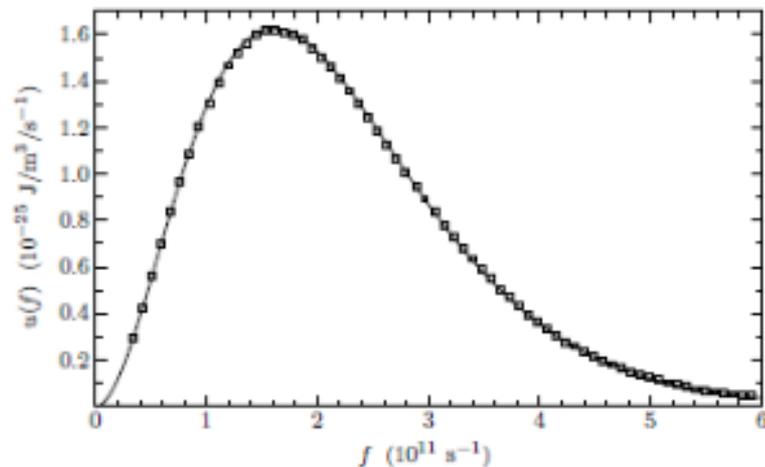


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$6,6 \times 10^{-4} \text{ eV} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda}$$

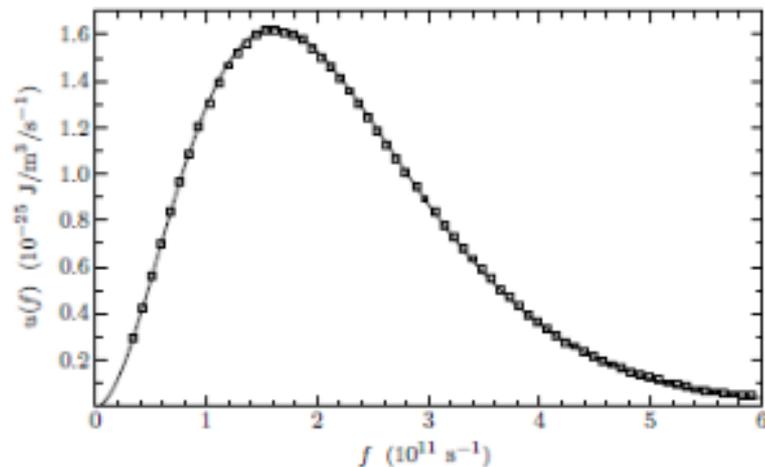


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$6,6 \times 10^{-4} \text{ eV} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$\lambda = 1,88 \times 10^6 \text{ nm}$$

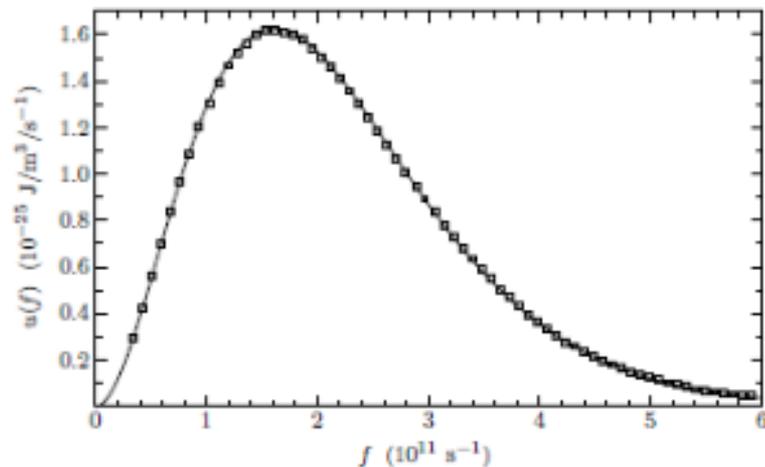


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$6,6 \times 10^{-4} \text{ eV} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$\lambda = 1,88 \times 10^6 \text{ nm} = 1,88 \times 10^{-3} \text{ m}$$

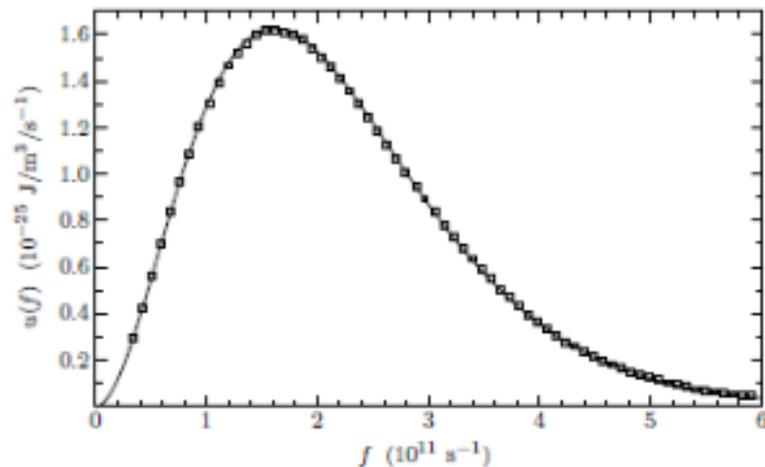


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$6,6 \times 10^{-4} \text{ eV} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$\lambda = 1,88 \times 10^6 \text{ nm} = 1,88 \times 10^{-3} \text{ m}$$
$$= 1,88 \text{ mm}$$

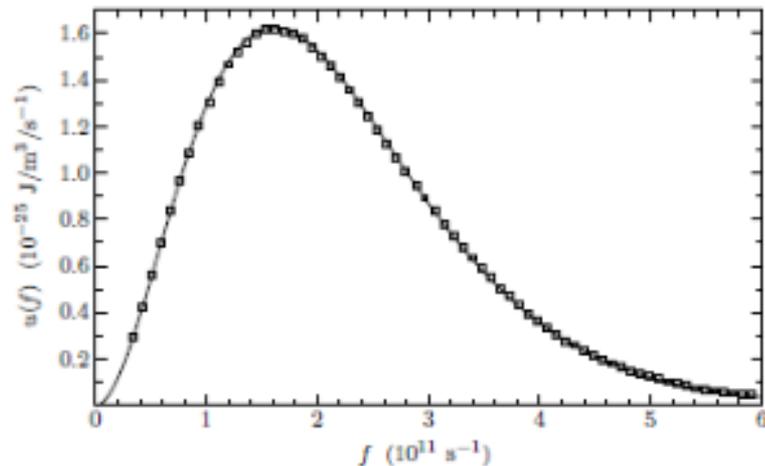


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.

Radiação cósmica de fundo

❑ @ $t = 400.000$ anos $T = 3000$ K. Hoje: $T = 2,73$ K.

❑ Pico em $\varepsilon = 2,82 kT = 6,6 \times 10^{-4}$ eV.

❑ A energia do fóton é:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$6,6 \times 10^{-4} \text{ eV} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{\lambda} \Rightarrow$$
$$\lambda = 1,88 \text{ mm}$$

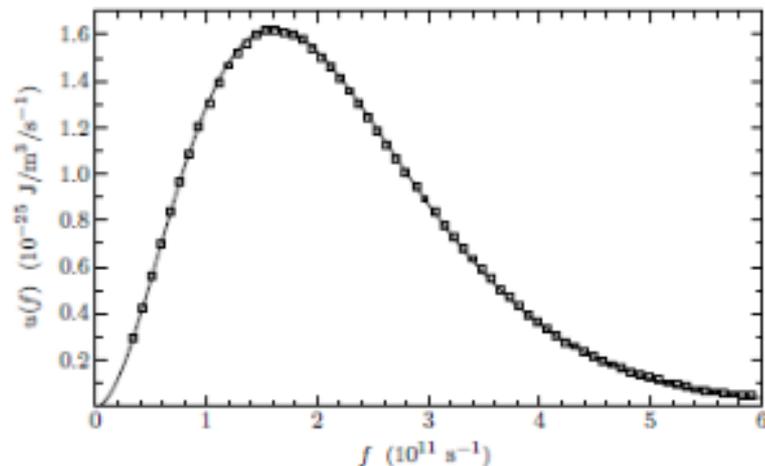
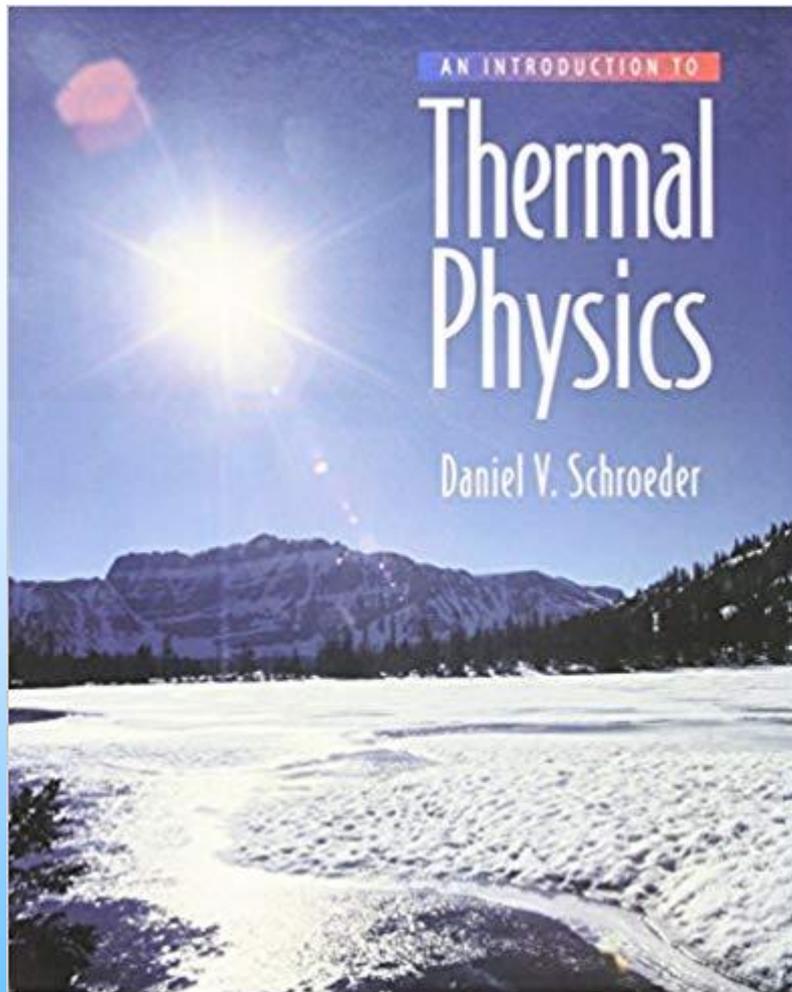


Figure 7.20. Spectrum of the cosmic background radiation, as measured by the *Cosmic Background Explorer* satellite. Plotted vertically is the energy density per unit frequency, in SI units. Note that a frequency of $3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ corresponds to a wavelength of $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. Each square represents a measured data point. The point-by-point uncertainties are too small to show up on this scale; the size of the squares instead represents a liberal estimate of the uncertainty due to systematic effects. The solid curve is the theoretical Planck spectrum, with the temperature adjusted to 2.735 K to give the best fit. From J. C. Mather et al., *Astrophysical Journal Letters* **354**, L37 (1990); adapted courtesy of NASA/GSFC and the COBE Science Working Group. Subsequent measurements from this experiment and others now give a best-fit temperature of 2.728 ± 0.002 K. Copyright ©2000, Addison-Wesley.



An Introduction to Thermal Physics

por Daniel V. Schroeder (Autor)

Editora: Addison-Wesley Professional;

Edição: 2000

Idioma: Inglês

ISBN-10: 9780201380279

ISBN-13: 978-0201380279

pgs: 249-251; 257-269; 288-296.

