

MNPEF
Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física



Francisco Everton Pereira Maia

***ANALISANDO O FEITO DE ARQUIMEDES COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA:
PODERIA UM NAVIO SER INCENDIADO POR REFLEXÃO DE RAIOS SOLARES?***

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Santo André - SP

2021



Francisco Everton Pereira Maia

***ANALISANDO O FEITO DE ARQUIMEDES COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA:
PODERIA UM NAVIO SER INCENDIADO POR REFLEXÃO DE RAIOS SOLARES?***

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), polo da Universidade Federal do ABC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Santo André - SP

2021

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.

Santo André, 03 de janeiro de 2022.

Assinatura do autor: Francisco Everton Pereira Maia

Assinatura do orientador: 

ANALISANDO O FEITO DE ARQUIMEDES COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA:
PODERIA UM NAVIO SER INCENDIADO POR REFLEXÃO DE RAIOS SOLARES?

Nome do(a) Aluno(a)
Francisco Everton Pereira Maia

Orientador(a):
Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física - MNPEF, Polo Universidade Federal do ABC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:



Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira



Dr. Jean Jacques Bonvent



Dr. Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 – Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou a Defesa de Dissertação de Mestrado do(a) candidato(a) Francisco Everton Pereira Maia, realizada em 08 de dezembro de 2021.

Prof.(a) JEAN JACQUES BONVENT
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) LEONARDO SIOFI FAGUNDES DOS SANTOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

Prof.(a) IVÃ GURGEL
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) LAURA PAULUCCI MARINHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) MARCELO AUGUSTO LEIGUI DE OLIVEIRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC

Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFAB
Com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Maia, Francisco Everton Pereira

Analisando o feito de Arquimedes com o auxílio do Geogebra : Poderia um navio ser incendiado por reflexão de raios solares? / Francisco Everton Pereira Maia. — 2021.

127 fls. : il.

Orientador: Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física - MNPEF, Santo André, 2021.

1. Ensino de Física. 2. História da Física. 3. Óptica Geométrica. 4. Ferramentas educacionais digitais e tecnológicas.. I. Oliveira, Marcelo Augusto Leigui de. II. Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física - MNPEF, 2021. III. Título.

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos aqueles que apoiaram e contribuíram no seu desenvolvimento, em especial ao meu amor, a minha esposa Lucélia.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente ao meu orientado, Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira, pelas inúmeras contribuições durante a elaboração deste trabalho e por todos os ensinamentos prestados quando ministrou a disciplina de Termodinâmica e Mecânica Estatística.

Aos colegas de mestrado pelo apoio, pelo carinho e por oportunizar as trocas de experiências.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES - Código de Financiamento 001. À Sociedade Brasileira de Física - SBF. À Universidade Federal do ABC – UFABC. Por direcionar suporte necessário para o andamento do programa de aperfeiçoamento dos professores de Física do Brasil.

Aos Professores do Programa do MNPEF da Universidade Federal do ABC, em especial para os professores: Jean Jacques Bonvent, Giselle Watanabe, Graciella Watanabe, Reinaldo Luiz Cavasso Filho, Lúcio Campos Costa, Marcos Roberto Da Silva Tavares e Célio Adrega de Moura Junior, dos quais tive o prazer de conhecer e que contribuíram para a minha formação acadêmica.

Agradeço com amor à minha esposa, Lucélia Bento, minha filha Heloísa Cristiny e meu filho Heitor Cristian pela paciência e compreensão de minha ausência durante as incontáveis horas para realização desse projeto.

Resumo

ANALISANDO O FEITO DE ARQUIMEDES COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA:
PODERIA UM NAVIO SER INCENDIADO POR REFLEXÃO DE RAIOS SOLARES?

Francisco Everton Pereira Maia

Orientador: Prof.(a) Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física - MNPEF, Polo Universidade Federal do ABC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O presente trabalho tem como proposta o desenvolvimento de um produto educacional voltado ao ensino de óptica geométrica para o segundo ano do Ensino Médio, tendo como motivação a História da Física, em especial sobre a narrativa que conta que o grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) teria incendiado navios utilizando a reflexão de raios solares em espelhos, a problematização do nosso trabalho gira em torno da questão: seria possível incendiar navios por radiação solar refletidas em espelhos? Abordamos o tema na perspectiva da aprendizagem significativa de David Paul Ausubel, da qual destaca os conhecimentos prévios dos estudantes dos quais devem servir de âncora para a cognição, produzindo desta forma novos conhecimentos. Na construção e aplicação do produto educacional foram adotados diferentes tipos de materiais didáticos: apostilas, livros, vídeos, formulários *Google*, *software* de geometria dinâmica Geogebra, entre outros. Para o desenvolvimento das aulas, adotou-se prática de ensino de metodologia ativa, como sala de aula invertida e debates. A proposta de ensino apresentou melhorias sobre as concepções dos estudantes referentes aos conceitos físicos relativos à óptica geométrica e aumento significativo no engajamento dos discentes com os conteúdos a ser lecionado.

Palavras-chave: Ensino de Física, História da Física, Óptica Geométrica, Ferramentas educacionais digitais e tecnológicas.

Abstract

ANALYZING THE MADE OF ARCHIMEDES WITH THE HELP OF GEOGEBRA: COULD A SHIP BE BURNED BY SUNLIGHT REFLECTION?

Francisco Everton Pereira Maia

Supervisor: Prof.(a) Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira

Master's dissertation submitted to Programa de Pós-Graduação Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – MNPEF, Polo Universidade Federal do ABC, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Physics Teaching.

The present work proposes the development of an educational product aimed at teaching geometric optics for the second year of high school, having as its motivation the History of Physics, especially about the narrative that tells that the greek Archimedes from Siracusa (287 b.C. – 212 b.C.) would have burned ships using the reflection of solar rays in mirrors, the problematization of our work revolves around the question: Would it be possible to burn ships by solar radiation reflected in mirrors? We approach the theme from the perspective of David Paul Ausubel meaningful learning, which highlights the students' prior knowledge, which should serve as anchors for cognition, thus producing new knowledge. In the construction and application of the educational product, different types of teaching materials were adopted: handouts, books, videos, Google forms, Geogebra dynamic geometry software, among others. For the development of the classes, the practice of teaching an active methodology was adopted, such as an inverted classroom and debates. The teaching proposal presented improvements on the students' conceptions regarding physical concepts related to geometric optics and a significant increase in the students' engagement with the contents to be taught.

Keywords: Physics education, History of Physics, Geometric Optics, digital and technological educational tools.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	10
INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO 1 - O COGNITIVISMO E A TEORIA DE APRENDIZAGEM DE DAVID AUSUBEL	16
1.1 Teoria da aprendizagem comportamental versus teoria de aprendizagem cognitiva. 16	
1.2 Principais características do cognitivismo	17
1.3 David Paul Ausubel e a teoria de aprendizagem significativa.....	20
1.3.1 Quem foi David Paul Ausubel?	20
1.3.2 O que é a estrutura cognitiva e a aprendizagem para Ausubel?	21
1.3.3 Aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica.....	22
1.3.4 Quais as condições para que ocorra uma aprendizagem significativa e a construção das Unidades de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS).	24
1.3.5 Os passos para construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS).....	25
CAPÍTULO 2 - OS CONCEITOS DE ÓPTICA ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO COM ÊNFASE NOS CONTEÚDOS REFERENTES A ESPELHOS.....	27
2.1 À Óptica Geométrica: conceitos básicos.	27
2.2 Os princípios da Óptica Geométrica.....	29
2.3 As leis da reflexão.....	30
2.4 Representação Geométrica de ponto objeto e ponto imagem	34
2.5 Formação de imagem em um espelho plano.....	35
2.6 Apresentação dos espelhos esféricos	37

2.6.1 Elementos de um espelho esférico	38
2.6.2 Condições de nitidez para o espelho esférico	39
2.6.3 Raios notáveis	41
2.6.4 Formação de imagem no espelho esférico	42
2.6.5 As equações de Gauss	46
2.6.6 Característica de uma imagem em espelho esférico usando as equações de Gauss	48
2.7 Espelhos parabólicos.....	48
CAPÍTULO 3 - APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA.	52
3.1 A importância da educação tecnológica e a utilização do Geogebra no ensino e aprendizagem.....	52
3.2 <i>Layout</i> e guias de comandos da versão <i>Classic 5</i>	54
3.3 Nomenclatura da lista de comandos	56
CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA DA PESQUISA E APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	61
4.1 O método da pesquisa científica.	61
4.2 A abordagem da pesquisa	62
4.3 O formato da sequência	62
4.4 Aplicação e composição do produto	63
CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	69
5.1 Momento 1: O conhecimento prévio.....	69
5.1.1 Questionário 1 - E1	70
5.1.2 Questionário 1 - E2	71
5.1.3 Questionário 1 - E3	72
5.1.4 Questão extra.	74

5.1.5	Questionário 2 - E1	76
5.1.6	Questionário 2 - E2	77
5.2	Momento 2 – Aprendizagem conceitual.....	78
5.2.1	Momento 2 – Questionário 3.....	79
5.3	Momento 3 – Ensaio Virtuais.....	80
5.3.1	Momento 3 – Questionário 4 - E1	81
5.3.2	Questionário 4 - E2	82
5.3.3	Questionário 4 - E3	83
5.3.4	Questionário 5 - E1	84
5.3.5	Questionário 5 - E2	86
5.4	Momento 4 - Questionário 6 – Considerações finais dos estudantes - E1 .86	
5.4.1	Questionário 6 - E2	87
5.4.2	Questionário 6 - E3	88
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	91
	REFERÊNCIAS	94
	APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL	97
A1	Apresentação e agradecimentos	97
A2	Visão global da sequência didática	98
A3	Desenvolvimento do produto educacional.	98
A 3.1	Aula 1 – Identificar os subsunçores.	98
A 3.2	Aula 2 – <i>Feedback</i> da aula 1.	99
A 3.3	Aula 3 – <i>Apresentação do tema</i>	100
A 3.4	Aula 4 à 14 – Desenvolvimento do objeto de ensino	102
A 3.5	Aula 15 – Aprofundando o estudo do objeto de ensino.....	102

A 3.6 Construção de simuladores no Geogebra.	103
A 3.7 Aula 16 – Investigando o espelho côncavo com o simulador.	108
A 3.8 Aula 17 – Investigando o espelho parabólico com o simulador.....	109
A 3.9 Aula 18 – A conclusão do aluno.	109
A 3.10 Aula 19 – Conclusão.	110
APÊNDICE B – MATERIAIS USADOS NO PRODUTO	113
B 1. Formulários.....	113
B 2. Vídeos	115
B 3. Simuladores.....	116
APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÕES.....	118
C1. Demonstração da Segunda lei da reflexão.	118
C2. Demonstração da propriedade refletora da parábola	119

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: fluxo da sondagem cognitivista.	19
Figura 2: Mapa conceitual e intermediação da aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica.	23
Figura 3: Feixes de luz.	28
Figura 4: Classificação dos meios de propagação.	28
Figura 5: Fenômenos de reflexão, refração e absorção da luz.	29
Figura 6: Tipos de reflexão.	30
Figura 7: Primeira lei da Reflexão.	31
Figura 8: Trajeto que minimiza o tempo do raio de luz refletido.	32
Figura 9: Relação entre os ângulos de incidência e de reflexão.	33
Figura 10: Demonstração da segunda lei da reflexão por contradição.	33
Figura 11: Ponto objeto, ponto imagem e natureza.	35
Figura 12: Formação de imagem no espelho plano.	36
Figura 13: Imagem da letra F.	36
Figura 14: Espelhos esféricos e representação planificada.	37
Figura 15: Elementos do espelho esférico.	38
Figura 16: Raio paraxial.	40
Figura 17: Raio incidente paralelamente ao eixo óptico.	41
Figura 18: Raio que incide no vértice.	42
Figura 19: Raio incidente no centro de curvatura.	42
Figura 20: Objeto posicionado a esquerda do centro de curvatura.	43
Figura 21: Objeto posicionado sobre o centro de curvatura.	44
Figura 22: Objeto posicionado entre o centro de curvatura e o foco.	44
Figura 23: Objeto posicionado sobre foco.	44
Figura 24: Objeto posicionado entre o foco e o vértice.	45
Figura 25: Característica da imagem de um espelho esférico convexo.	45
Figura 26: Equações de Gauss.	47
Figura 27: Propriedade refletora da parábola.	50

Figura 28: <i>Layout</i> inicial do Geogebra.....	55
Figura 29: Guia da lista de comandos.....	56
Figura 30: Questionário exercício 1 - O que é História?	70
Figura 31: Qual a importância da História para a formação da sociedade?.....	71
Figura 32: Você conhece alguma história que envolva algum físico ou conceito físico? O que mais chamou atenção nesta história?	73
Figura 33: Os físicos mais citados pelos alunos.....	74
Figura 34: Como diferenciar um fato de um mito na Física?	74
Figura 35: Qual é a sua opinião sobre a narrativa referente ao espelho da morte de Arquimedes, verdadeiro ou falso? Justifique a sua resposta.	76
Figura 36: Considerando a História verdadeira, quais seriam as dificuldades enfrentadas para conclusão deste fato?.....	77
Figura 37: Qual seria o espelho ideal para os objetivos de Arquimedes?.....	79
Figura 38: Justificativa do modelo de espelho.....	80
Figura 39: Com o auxílio do simulador, o que você observa com relação aos raios refletidos, quando fixamos $\alpha = 0^\circ$ e movimentamos o ponto C?	82
Figura 40: De que forma podemos aumentar o alcance dos raios refletidos, isto é, quais os pontos devemos movimentar?.....	83
Figura 41: Com o auxílio do simulador, o que você observa quando fixamos $\alpha=0^\circ$ e movimentamos a reta diretriz (mova pelo ponto B)?	85
Figura 42: O que você acha sobre o feito de Arquimedes, ele realmente aconteceu? ..	87
Figura 43: Supondo que o feito tenha ocorrido, qual espelho você acredita que ele utilizou?.....	88
Figura 44: Justifique a resposta dada no exercício 1, baseada nos conceitos que você aprendeu.....	89
Figura 45: Vídeo 1 - A História da Física ou a estória da Física?	100
Figura 46: O espelho mágico, era uma vez na Grécia.....	101
Figura 47: Construção do simulador do espelho côncavo.	105
Figura 48: Construção do simulador do espelho parabólico.	107
Figura 49: Questionário da aula 1	113
Figura 50: Questionário da aula 2	113

Figura 51: Questionário da aula 3	113
Figura 52: Questionário da aula 15	114
Figura 53: Questionário da aula 16	114
Figura 54: Questionário da aula 17	114
Figura 55: Questionário da aula 18	115
Figura 56: Vídeo 1	115
Figura 57: Vídeo 2	115
Figura 58:: Vídeo 3.....	116
Figura 59: Vídeo 4	116
Figura 60: Simulador do espelho côncavo	116
Figura 61: Simulador do espelho parabólico	117
Figura 62: Demonstração algébrica da segunda lei da reflexão.	118
Figura 63: Propriedade refletora.....	120

INTRODUÇÃO

O ensino de forma geral apresenta desgaste e rupturas com os modelos tradicionais de aula expositivas, baseadas somente em giz, saliva e lousa, a ineficácia do sistema tradicional de ensino são amplamente debatidos, as novas diretrizes de ensino vêm sendo divulgadas e publicadas em medidas normativas, como a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Com relação ao ensino de Física, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCN, (Brasil, 2002, p.22) aponta que:

O ensino de Física tem-se realizado frequentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado [...]. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas.

As novas metodologias de ensino apontam a necessidade do professor propiciar ambientes de estudos que condicionam o aluno ao papel de protagonista no processo de ensino e aprendizagem, se os estudantes são expostos a situações desafiadoras e que produzem estímulos para assumir essa responsabilidade, essas ações implicam em uma construção de conhecimento mais significativa, segundo SILVA e SCHIRLO (2014, p. 37):

É importante que o professor busque opções para tornar o aprendizado um processo estimulante e prazeroso para o aluno. Dentre os processos pedagógicos utilizados em sala de aula as atividades lúdicas aparecem como uma tentativa de aliar o ensino com o prazer.

O presente trabalho pretende desenvolver um produto educacional voltado para a óptica geométrica, pautado nas práticas de metodologia de ensino ativa e diversificada, contendo recursos de mídia e tecnológico.

Tomaremos como motivação a história da Física, estudaremos essencialmente a narrativa que conta que Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) teria incendiado navios utilizando a reflexão de raios solares em espelhos, o nosso produto educacional gira em torno de analisar a veracidade deste fato.

Fazer educação utilizando a história da ciência como problematização é um importante aliado metodológico, pois promove aos estudantes a compreensão da evolução do conhecimento científico, mostrando-lhes que a ciência é passiva de alterações e não se deve aceitar a literatura científica atual como verdades inquestionáveis, assim como aponta Matthews (1995, p. 172) “*que a ciência é mutável e instável e que por isso, o pensamento científico atual está sujeito a transformações*”.

Acredita-se que a exploração do tema nesses moldes promove competências e habilidades necessárias para formação científica integral do sujeito. O presente trabalho é composto por cinco capítulos, considerações finais e três apêndices.

No capítulo 1 desta dissertação iniciamos, apresentando um comparativo entre as metodologias de ensino comportamentalistas e cognitivistas, citando as principais características destes modelos. Em seguida, discutiremos os principais fundamentos da teoria de aprendizagem significativa de David Paul Ausubel, da qual utilizaremos como referencial teórico do produto educacional deste trabalho.

O capítulo 2 trata de conceitos físicos relacionados a óptica geométrica que serão necessários para o desenvolvimento do projeto. Destacaremos as concepções de raio e feixes de luz, lei da reflexão, princípio de Fermat, formação de imagem em espelho plano, convexo, côncavo e parabólico.

Já o capítulo 3 inicia discorrendo sobre a importância do uso de *softwares* educacionais para a aprendizagem, apresentamos o programa Geogebra *Classic 5*, instrumento muito interessante para construção de simuladores livres, diferente da plataforma *PhET* Colorado que contém simuladores prontos e que não tem possibilidade de realizar adaptação ou construção nos ensaios virtuais.

Os capítulos 4 e 5 descrevem como foi aplicado e quais os resultados foram alcançados, contendo nestes o desenvolvimento das aulas, a composição do produto, a análise dos resultados encontrados/interpretados e a resoluções de atividades produzidas pelos estudantes.

Depois do capítulo 5, temos as considerações, nesta etapa é descrito uma síntese do trabalho, destacando as expectativas antes da aplicação e a realidade encontrada após a finalização do produto.

Finalmente temos o Apêndice subdividido em três: Apêndice A contendo o produto educacional, Apêndice B que engloba os materiais utilizados no projeto e o Apêndice C que apresenta algumas demonstrações voltadas para o docente que leciona no Ensino Médio.

CAPÍTULO 1 - O COGNITIVISMO E A TEORIA DE APRENDIZAGEM DE DAVID AUSUBEL

Neste capítulo apresentaremos uma comparação entre teorias de aprendizagem e posteriormente indicaremos o referencial teórico que pretendemos seguir para o desenvolvimento deste trabalho. Faremos uma breve introdução da teoria de aprendizagem significativa, desenvolvida por David Paul Ausubel, que tem como sua base conceitual o cognitivismo. Não temos a finalidade de entendimento expansível dos conceitos abordados por Ausubel, por sua grande complexidade, mas explanaremos aquilo que é essencial para preparação das atividades propostas no produto educacional deste trabalho.

1.1 Teoria da aprendizagem comportamental versus teoria de aprendizagem cognitiva.

Existem ao longo da história, diversas pesquisas que procuram descobrir e analisar como adquirimos o nosso aprendizado, a principal questão que as teorias de aprendizagem tentam responder é: qual seria a estratégia que potencialize o nosso desenvolvimento intelectual? Algumas pesquisas levam a resultados bem diferentes, essa divergência se dá pelo fato de compreenderem a apropriação do conhecimento de formas diferentes. Para uma boa prática de ensino é fundamental que o docente conheça as etapas da teoria que acredite ser a ideal.

Algumas teorias conceituam aprendizagem de forma diferente porque compreendem o processo de aquisição do conhecimento de forma diferenciada. Conhecê-las é importante para propiciar uma profunda reflexão sobre a prática docente. Assim, apesar de não haver consenso de como é entendido o processo de aprendizagem, devemos ter noção de como ela ocorre e da teoria que defendemos (LAKOMY, 2008, p.18).

Dentre as teorias de aprendizagem, existem duas que são ou foram destaques e são referências para vários teóricos: teoria de aprendizagem comportamentalista e a teoria cognitivista.

Para a teoria comportamentalista (behaviorismo) o centro da educação é o docente e o discente deve seguir as instruções do seu mentor, isto é, o sujeito não produz

o seu conhecimento, deve receber as informações de forma passiva, neste modelo o aprendizado acontece por estímulos, repetições ou reforço (punição ou recompensa).

Segundo essa linha, a apropriação da informação depende necessariamente de aquisição ou mudança do comportamento. Este modelo de ensino foi amplamente aplicado de 1920 a 1960 e um dos principais teóricos desta metodologia foi o psicólogo Burrhus Frederic Skinner (1904-1990).

Skinner realizou inúmeros experimentos para corroborar a sua teoria. Em um destes, utilizou uma pomba que quando pisava em uma alavanca receberia alimento, comprovando então que até animais irracionais quando condicionados a repetições e ao reforço conseguem desenvolver habilidades, concluindo que a cognição não é o fator mais importante para aprendizagem.

As teorias cognitivistas, ao contrário dos comportamentalistas, partem do pressuposto que o discente deve ser o sujeito ativo da sua própria aprendizagem, que deve constantemente relacionar-se com o ambiente interno e externo, partindo de sua experiência de vida (conhecimentos prévios) e chegando em novas informações. A teoria de aprendizagem cognitivista tem como suas bases autores como Jean Piaget, Lev Vygotsky, Jerome Bruner, Henri Wallon, David Gardner, David Ausubel, entre outros.

1.2 Principais características do cognitivismo

A maioria dos teóricos que estudaram a teoria da aprendizagem cognitivistas eram psicólogos que se debruçaram sobre “processos centrais” do sujeito, que são caracterizados como organizamos o conhecimento. O modelo procura elucidar a construção do intelecto, a relação do desenvolvimento humano com a maturação biológica e principalmente como se interioriza o aprender, de forma geral o aprendizado cognitivo é fruto de fatores intrínsecos e extrínsecos, fortemente pautado no interacionismo.

Na abordagem cognitivista o discente deve produzir informações, conceitos, estímulos e interiorizá-los através do processo de aprendizagem, assimilando e reestruturando para, enfim, renovar, modificar o meio como resultado de seu aprendizado (MIZUKAMI, 1992, p.59).

A abordagem cognitiva abrange várias perspectivas para formação integral do sujeito como: homem, mundo, sociedade/cultural, conhecimento, educação, escola, ensino/aprendizagem, professor-aluno, metodologia e avaliação.

Cada uma destas perspectivas deve ser construída e o professor ou orientador precisa se atentar aos objetivos de cada uma delas. De acordo com Mizukami os objetivos delas são:

- Homem – na perspectiva cognitivista é considerado um ser inacabado intelectualmente, tende a sempre buscar novas informações e para isso precisa interagir com o meio;
- Mundo – com aparecimento de novas dificuldades, o homem vai elaborando e criando condições para adaptação ao mundo;
- Sociedade/cultural – no estudo cognitivista, o ser humano tem que reconhecer as regras que regem a sociedade. O sujeito passa por várias etapas ao longo de sua vida, interagindo com várias culturas das quais podem contribuir para sua formação;
- Conhecimento – segundo Mizukami (1992, p.63), “*Processo inacabado essencialmente ativo, o conhecimento acontece na interação que se reproduz na relação entre sujeito e o objeto*”;
- Educação – não devem ser meros vetores equipolentes da informação, mas que produza situações que motivem o discente a produzir o seu próprio conhecimento;
- Escola – deve propiciar um ambiente motivador para produção do conhecimento;
- Ensino/aprendizagem – é um processo complexo da estrutura do desenvolvimento mental, que deve ser precedido do conhecimento do aluno para um aprendizado mais amplo;
- Professor/aluno – no modelo cognitivista o professor deve ser um facilitador, capaz de produzir situações que levem ao discente a construção de uma aprendizagem reflexiva, o docente não pode transmitir o conhecimento para o estudante, mas que exista uma troca de experiência do professor para o aluno e do aluno para o professor;

- Metodologia – o trabalho coletivo é um método muito comum no processo cognitivista. O compartilhamento de ideias é essencial para o desenvolvimento intelectual do sujeito, portanto, deve sempre ser incentivado;
- Avaliação – Para Mizukami (1992, p. 82) *“a avaliação poderá ocorrer através de reproduções livres em que se possa verificar o aprendizado do aluno sob diferentes forma e ângulos, podendo controlar o aproveitamento, apoiando-se em múltiplos critérios”*.

Analisando os campos de abrangência da abordagem cognitivista que tem o interacionismo como fator central, podemos construir um diagrama que descreve os passos deste modelo apresentados na Figura 1.

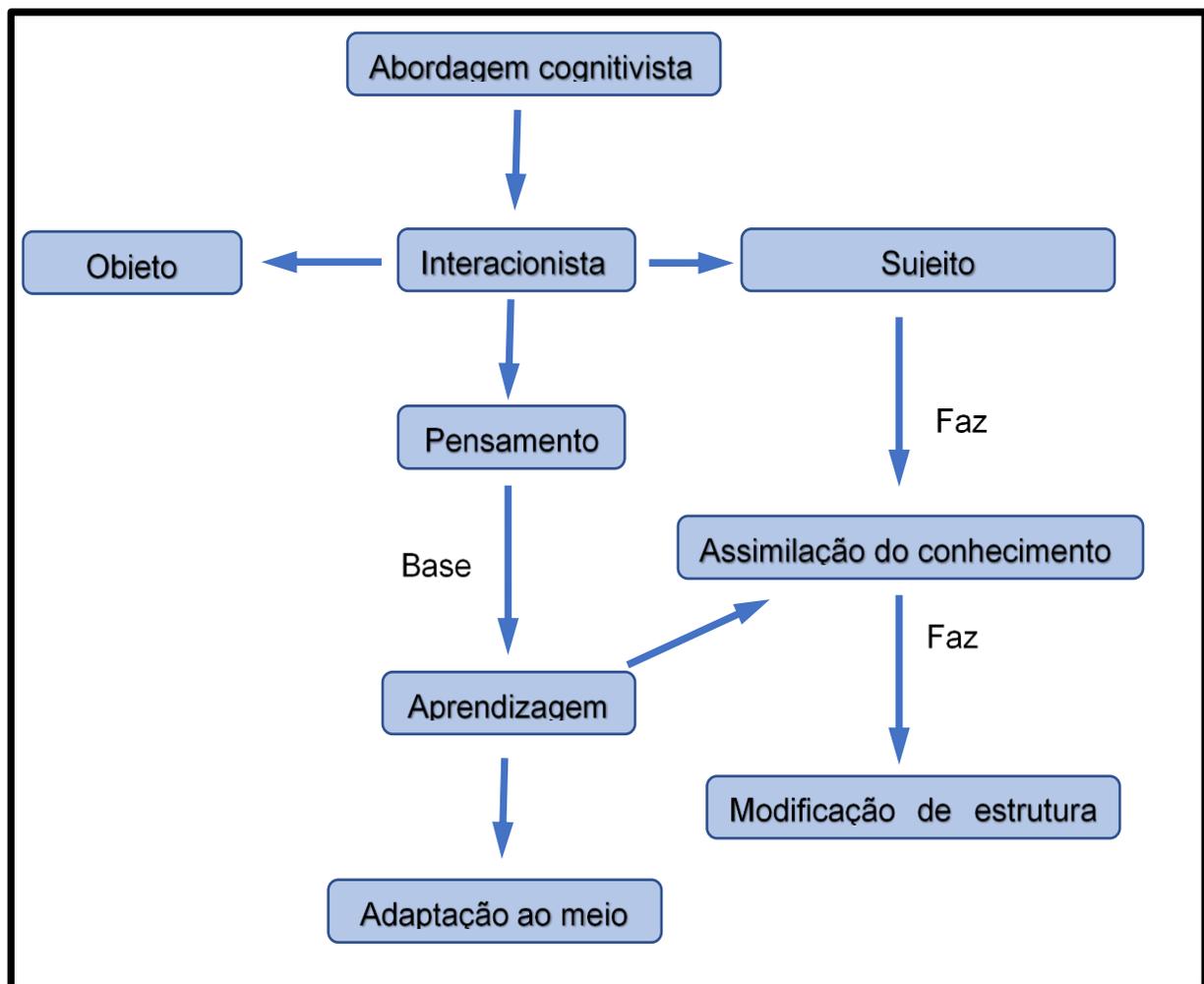


Figura 1: fluxo da sondagem cognitivista.

Fonte: Próprio autor.

1.3 David Paul Ausubel e a teoria de aprendizagem significativa.

O objetivo do restante deste capítulo é apresentar aspectos centrais da teoria da aprendizagem significativa (TAS), isto é, aquilo que seria essencial para compreender o modelo proposto por Ausubel e expor as contribuições deste modelo teórico para o ensino e aprendizagem, da qual recorreremos ao método para construção e aplicação do produto educacional referente a este trabalho.

1.3.1 Quem foi David Paul Ausubel?

Segundo Distler (2015), David Paul Ausubel nasceu 1918, no Brooklin, em Nova York, nos Estados Unidos, filho de imigrantes judeus e viveu em um tempo onde o povo judaico sofreu perseguição e discriminação. Ausubel durante a sua infância passou por uma educação comportamentalista severa, na qual sofreu castigos e uma série de humilhações, produzindo então uma insatisfação com o modelo de educação aplicada nas escolas de sua época. No seu livro *Educational Psychology: A Cognitive View*, ele narra a seguinte história:

A escola é um cárcere para meninos. O crime de todos é a pouca idade e por isso os carcereiros lhes dão castigos. (...) Escandalizou-se com um palavrão que eu, patife de seis anos, empreguei certo dia. Com sabão de lixívia, lavou-me a boca. Submeti-me. Fiquei de pé num canto o dia inteiro, para servir de escarmento a uma classe de cinquenta meninos assustados. Comer sabão é desagradável. Mas meus pais protestaram porque o sabão era feito de sebo cristão e não de kosher. Eu fora também obrigado a comer carne de porco: isso é crime contra a lei mosaica (AUSUBEL, 1968, p.31).

A narração de Ausubel mostra bem como era a educação da sua época. Os castigos deveriam ser aplicados aos sujeitos como modeladores dentro de uma educação centrada no comportamentalismo severo. Essas experiências vivenciadas na infância levam a uma reflexão sobre o sentido do que é uma educação ideal para ele, então começa trilhar a sua formação neste sentido.

Formou-se inicialmente em 1939 em psicologia pela universidade da Pensilvânia e em 1943 graduou em medicina pela universidade Middlesex. Chegou a exercer a profissão de cirurgião assistente e psiquiatra, ambas na saúde pública norte-americana. Durante os seus estudos na área de psicologia, ficou interessado na psicologia do

desenvolvimento, realizando então em 1950 o seu doutorado nesta área pela universidade de Columbia.

Em 1950 começa de fato as pesquisas e publicações no ramo da psicologia cognitiva e atuou em muitas universidades norte-americana e europeia como professor visitante, divulgando os resultados de suas pesquisas, faleceu em 9 de julho de 2008 aos 90 anos.

1.3.2 O que é a estrutura cognitiva e a aprendizagem para Ausubel?

Segundo Ausubel (1982), “a estrutura cognitiva é o conteúdo total e organizador de ideias de um dado indivíduo”, isto é, a estrutura cognitiva é toda a soma de informações ou ideias que o sujeito aprendeu, sendo normalmente organizado para seguir uma hierarquia de conceitos mais gerais aos mais específicos. Fazendo uma analogia para a educação, a estrutura cognitiva é a assimilação do conteúdo de uma dada área de conhecimento, ou seja, o aluno que está estudando óptica, adquire ao longo do estudo dos conceitos, nomenclaturas e aplicações do contexto de forma sequencial da disciplina de Física.

Podemos então destacar que o método de Ausubel está relacionada a analisar aquisição, o armazenamento e a organização das ideias no cérebro do sujeito. Ele acredita que as informações são extremamente organizadas de forma hierarquizada, onde novos conceitos são desencadeados de acordo com a relação entre eles. Ele ainda cita que as novas informações são ancoradas a experiências ou ideias pré-existentes, progressivamente esses novos conceitos vão sendo reorganizados e internalizados, gerando o aprendizado.

Para Ausubel aprendizagem nada mais é do que ampliação da estrutura cognitiva do sujeito, através de novas ideias incorporadas a ela, isto é, a medida que estamos aprendendo, ampliamos a nossa estrutura cognitiva. Ausubel enfatiza que os novos conhecimentos devem ser atrelados ou ancorados aos conhecimentos específicos do sujeito.

Dependendo das relações entre as informações âncoras com as novas informações, o indivíduo pode ter um aprendizado mecânico ou significativo.

1.3.3 Aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica

Aprendizagem significativa é um processo onde uma nova informação vai se relacionar ou interagir com aspecto relevante da estrutura de conhecimento do sujeito, ao qual Ausubel deu o nome de subsunçor.

Na aprendizagem significativa, os novos conhecimentos se relacionando de forma não arbitrária e substantivas com as ideias já existentes, isto é, existe alguma relação lógica e explícita entre o novo conceito e o conceito que já existe na estrutura cognitiva. O saber pré-existente funciona como ponto de âncora para expansão do conhecimento.

Um novo conhecimento interage com algum conhecimento prévio, especificamente relevante, e o resultado disso é que esse novo conhecimento adquire significado para o aprendiz e o conhecimento prévio adquire novos significados, fica mais elaborado, mais claro, mais diferenciado, mais capaz de funcionar como subsunçor para outros novos conhecimentos (MOREIRA, 2013, p.6).

Como este modelo apresenta uma aprendizagem substantiva, neste formato, o sujeito consegue explicar o aprendizado adquirido usando as suas próprias palavras, mas mantendo a essência da informação, o que significa que não precisa reproduzir os conceitos e sim compreendê-los. Outro fato importante é que o tempo de armazenamento desta informação é mais longo se comparado com uma aprendizagem mecânica.

Diferentemente da aprendizagem significativa, Ausubel acredita que na aprendizagem mecânica não existem pontos de ancoragem, os subsunçores não estão presentes nesta abordagem, não traz ligações com conhecimentos anteriores, portanto ela não garante nem flexibilidade no uso e nem longevidade, ou seja, são consideradas informações de reprodução literal e de curto prazo de memória, conhecida popularmente como “decoreba”. Embora a identificação entre aprendizagem mecânica e decoreba seja interessante, ela não faz parte da obra de Ausubel.

A aprendizagem mecânica é muito utilizada nas disciplinas de exatas em especial nas matérias de Física e Matemática, o aluno assiste às aulas, decorando as fórmulas, não questionando a aplicabilidade e os significados dos conceitos apresentados. O estudante fica restrito ao mero treinamento para responder questões de vestibular.

A aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica não são dissociáveis.

Segundo Ausubel, hora aprendemos de forma significativa em outros momentos de forma mecânica, mas uma aprendizagem mecânica pode ser transformada em uma aprendizagem significativa.

A aprendizagem significativa, é uma incorporação de novos conhecimentos à estrutura cognitiva com significado, compreensão, capacidade de explicar, transferir, enfrentar situações novas. Mas, assim como a aprendizagem mecânica, é o extremo de um contínuo. Grande parte do que ocorre em sala de aula, do que acontece no processo ensino-aprendizagem, situa-se na zona cinza, na zona da progressividade, da aprendizagem pelo erro, da captação de significados. Se o ensino for potencialmente significativo, ou seja, procurando facilitar, promover a aprendizagem significativa, o aluno, se apresentar a necessária intencionalidade, poderá progredir na direção dela. Contrariamente, se o ensino for comportamentalista, treinador para a testagem, para a resposta certa, a aprendizagem estará muito mais voltada para o outro extremo do contínuo, o da aprendizagem mecânica (MOREIRA, 2013, p.13).

Para Moreira (2013) a intermediação entre a aprendizagem mecânica e significativa está no que ele chama de “zona cinza”, veja Figura 2, são informações que estão na estrutura cognitiva que podem adquirir significado, elevando a aprendizagem mecânica para uma aprendizagem significativa. Um facilitador para essa transição seria o ensino potencialmente significativo, isto é, a construção ou reconstrução do conceito que deve ser feito usando um material relacionável a estrutura cognitiva do discente, de forma não aleatória e não literal.

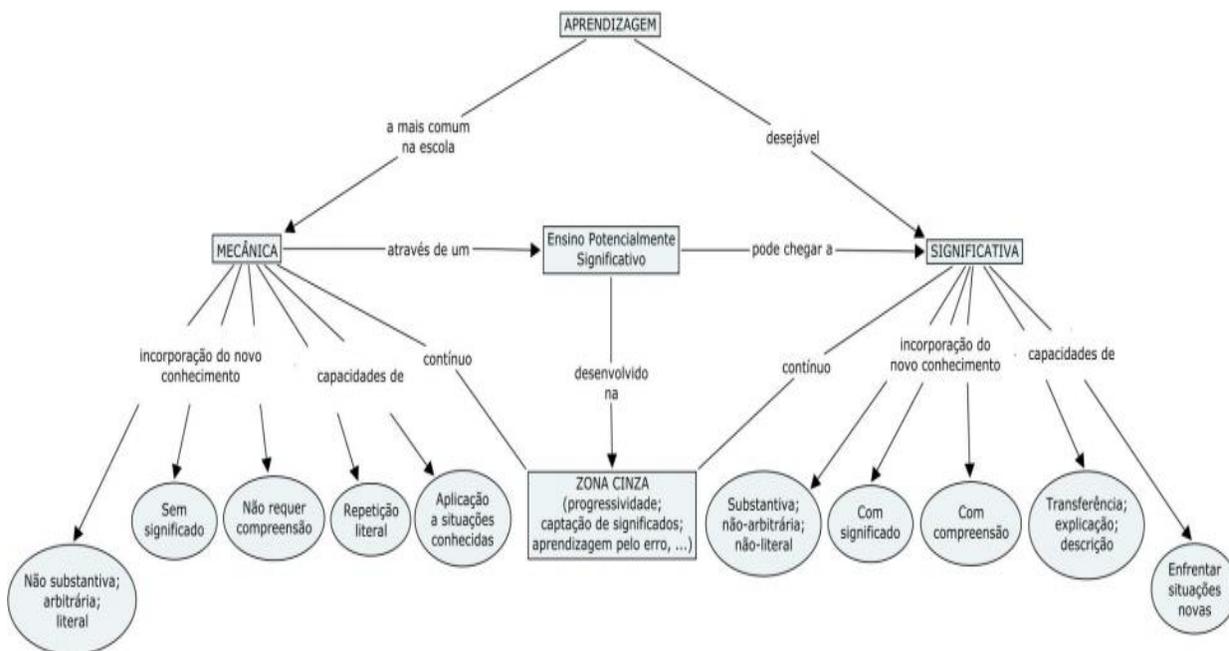


Figura 2: Mapa conceitual e intermediação da aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica. Fonte: Moreira (2013, p.12).

1.3.4 Quais as condições para que ocorra uma aprendizagem significativa e a construção das Unidades de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS).

Segundo Moreira (2013) para que exista uma aprendizagem significativa o discente deve ter o desejo de aprender, além de ter o conhecimento prévio relevante (subsunçores) e o material apresentado a ele tem que ser potencialmente significativo. Podemos observar que às três condições estão fortemente interligadas, mas não necessariamente na ordem que foram apresentadas.

Devemos comear pela elaboração metódica de um plano de aula que seja atrativo para o discente, Moreira (2011) propõe na aprendizagem significativa a chamada Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) que é uma sequência de ensino atrelada ao método da aprendizagem significativa.

A base da construção das atividades que usam a teoria de Ausubel, inclusive as UEPS, devem partir do conhecimento prévio do aluno, assim como ele coloca esse princípio como centro da sua concepção de aprendizagem. Para Ausubel (1976, p.6), “Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: de todos os fatores que influenciam a aprendizagem, o mais importante é aquilo que o aluno já sabe. Averigüe isso e ensine-o de acordo”.

Quando pensamos sobre algum assunto, várias ideias diferentes surgem na cabeça e acabam virando um emaranhado de informações, ficando difícil de organizá-las. Para facilitar a visualização ordem de desenvolvimento e a relação entre elas, usamos o mapa conceitual, sendo uma representação gráfica composta por conjunto de diagrama.

Moreira (2013) sugere que a utilização de mapas conceituais são facilitadores para abordar o conhecimento prévio dos alunos, pois possibilita ao professor uma visão geral da compreensão do aluno sobre um determinado assunto e como eles estão relacionados a estrutura cognitiva do discente.

As UEPS devem ser produzidas de forma inovadora com o propósito de seduzir o estudante, portanto, se faz necessário a utilização de ferramentas pedagógicas

diferenciadas, saindo dos tradicionais giz e lousa, sendo assim os modelos de aula meramente expositiva não devem ser incorporados nas UEPS.

1.3.5 Os passos para construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS)

Como já mencionado as Unidades de Ensino Potencialmente Significativa são sequências de ensino construídas de forma organizada que valorizam os conhecimentos prévios dos alunos, os subsunçores, abaixo sintetizamos os oito passos necessários para construção de uma UEPS, sugeridos por Moreira (2013).

- 1º passo: Seleção do conteúdo a ser abordado. Uma UEPS pode ser produzida para uma unidade inteira, como Óptica, ou assunto específico como construção de imagens em um espelho esférico;
- 2º passo: Identificar os subsunçores do estudante. Esta etapa é muito importante na teoria de Ausubel, aferir os conhecimentos prévios do discente é um dos passos mais complicados, e requer que o docente utilize das mais diversas avaliações diagnósticas, o docente pode propor discussões, questionários, mapas mentais ou conceituais e situações-problemas abertas, deixando o aluno a vontade com objetivo de medir em especial o quanto o seu conhecimento está relacionado ao senso comum ou ao científico;
- 3º passo: Propor situações problemas de nível introdutório. Diferentemente do passo 2, nesta etapa devemos propor atividades especificamente nos conhecimentos prévios do aluno, mas com grau de dificuldade relativamente baixo e de caráter introdutório;
- 4º passo: Apresentação do conteúdo. Agora o professor deve apresentar o conteúdo, considerando a evolução progressiva, saindo de aspectos mais gerais para os mais específicos. A abordagem pode ser feita de forma oral, posteriormente colaborativa e finalizando com apresentação propostas pelo grupo;
- 5º passo: Retomada da estrutura do conteúdo. Falar novamente sobre aquilo que efetivamente queremos ensinar, o professor deve realizar uma nova abordagem ao nível de dificuldade crescente, destacando semelhanças e diferenças nas situações propostas já trabalhadas, promovendo o que Moreira chama de reconciliação integradora do conhecimento o senso comum ou ao científico;

- 6º passo: Novas situações-problemas. Para finalizar a UEPS devem ser propostas e trabalhadas situações problemas em níveis de mais alta complexidade, transitando novamente entre os conceitos gerais e os específicos. Segundo Moreira (2011, p.4):

Ao final deste processo espera-se que os subsunçores que serviram de ancoradouro para os novos conceitos estejam em um nível hierárquico mais abrangente na estrutura cognitiva do aluno. Desta forma, os novos conceitos ancorados podem servir de subsunçores para ancoragens futuras.

- 7º passo: Avaliação da UEPS. O professor deve avaliar os alunos continuamente avaliando ao longo de toda a UEPS, registrando tudo que pode evidenciar aprendizagem significativa como: apresentações, debates, questionários descritivos e avaliações somativas individuais após o sexto passo;
- 8º passo: A capacidade de aplicar e explicar. Para medir o êxito da UEPS é preciso verificar a capacidade do aluno de aplicar e explicar o conteúdo abordado na solução de situações problemas, desta forma corroborando uma aprendizagem significativa.

Levaremos em consideração os passos descritos acima para confecção do produto educacional do presente trabalho, realizando adaptações quando necessário.

CAPÍTULO 2 - OS CONCEITOS DE ÓPTICA ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO COM ÊNFASE NOS CONTEÚDOS REFERENTES A ESPELHOS.

Neste capítulo abordaremos os conceitos necessários para o entendimento e aplicação do produto educacional. A proposta do trabalho é dirigida aos alunos de Física que estudam construção de imagem em espelhos, em especial, planos e esféricos, sendo normalmente abordadas no segundo ano do Ensino Médio. Acrescentaremos também um tópico especial sobre a reflexão de raios em espelhos parabólicos. O entendimento dos conceitos deste capítulo é essencial para compreensão da proposta do nosso produto que pretende analisar a veracidade da narrativa que ficou conhecida como: o raio da morte de Arquimedes. Adotaremos como livro didático para apresentação dos conceitos Físicos SEARS (2008) e o HALLIDAY(2016).

2.1 À Óptica Geométrica: conceitos básicos.

O estudo da óptica pode ser dividido em dois ramos: o primeiro é a óptica geométrica, que busca compreender a trajetória percorrida pela luz durante um fenômeno luminoso, fundamentada em conceitos relacionados nas ideias de reflexão e refração da luz. O segundo ramo procura estudar a composição da luz e a interação com a matéria, estudando dentro deste contexto, conceitos de polarização, difração, espectros, interferência, entre outros.

Neste trabalho não discutiremos a natureza ou a composição da luz e sim como as imagens são formadas em sistemas ópticos de reflexão, isto é, daremos ênfase ao funcionamento de uma parte da óptica geométrica, mas implicitamente abordaremos concepções da Óptica Física, pois o simples fato de enxergamos um objeto ou imagem é proveniente da interação da luz com a matéria.

No estudo da propagação da luz é comum representarmos por retas, semirretas ou segmento de retas, a qualquer um destes elementos chamaremos de feixe de luz. Os feixes de luz podem ser classificados em cônico convergentes, cônico divergentes e cilíndrico ou paralelos.

Os feixes de luz convergente são direcionados para um único ponto, quando a luz passa por uma lupa, por exemplo. Os feixes são ditos divergentes se partem de um ponto de luz e propagaram-se para todas as direções, uma lâmpada acesa é um bom exemplo. Os feixes cilíndricos são formados por raios de luz paralelos entre si, os feixes de luz que vem do Sol para à Terra são aproximadamente paralelos (Figura 3).

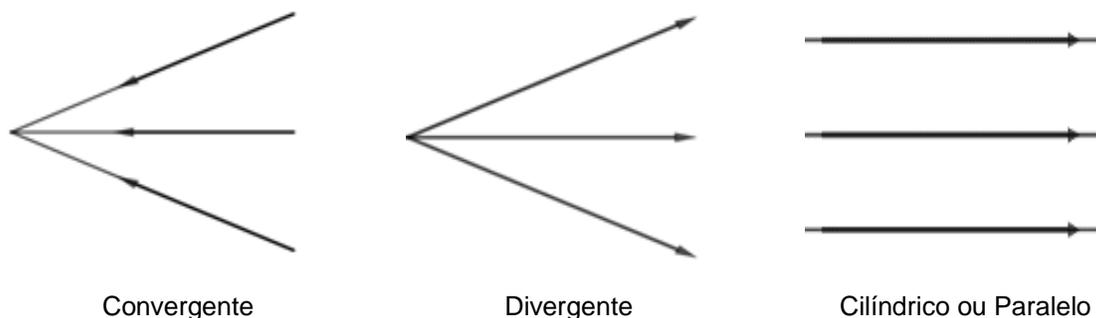


Figura 3: Feixes de luz.
Fonte: Próprio autor.

Podemos classificar os meios de propagação da luz entre: transparentes, translúcidos ou opacos. Os meios transparentes são aqueles que permitem a passagem da luz de forma bem-comportada, podemos citar as lentes dos óculos como exemplo. Os meios translúcidos são os corpos que não permitem a passagem de todos os raios de luz ou passam pelo corpo de forma indefinida, isto é, não existe uma regularidade dos raios que interagiram com o meio translúcido, papel-manteiga, é um bom exemplo. E os meios opacos são objetos que não permitem a passagem da luz, uma parede é um meio opaco. A Figura 4 apresenta as classificações e comportamento dos raios nos meios citados.

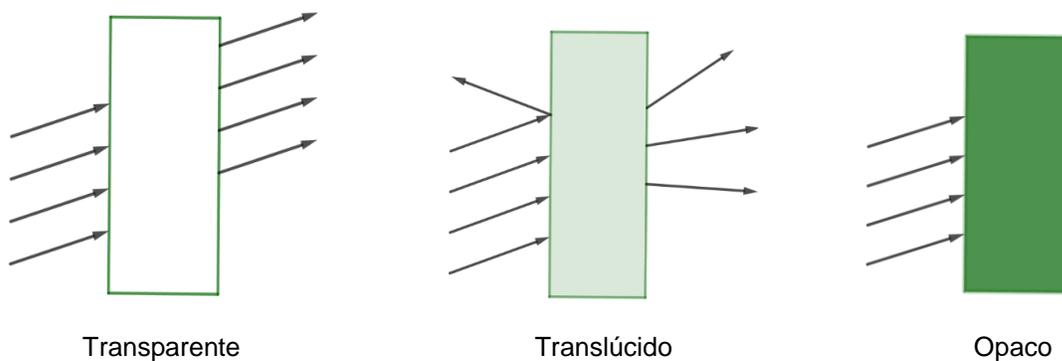


Figura 4: Classificação dos meios de propagação.
Fonte: Próprio autor.

Quando a luz incide em um corpo podem ocorrer três fenômenos distintos: reflexão, refração e/ou absorção.

A reflexão acontece quando a luz incide em uma superfície e retorna ao meio em que se propagava antes da incidência. A refração ocorre quando a luz passa de um meio *A* para um meio *B*, não homogêneos, fazendo com que a sua velocidade de propagação seja alterada e conseqüentemente sofrendo um desvio na sua trajetória. E ainda existe a possibilidade da superfície absorver a luz, elevando a temperatura da região, veja a representação dos três fenômenos na Figura 5.

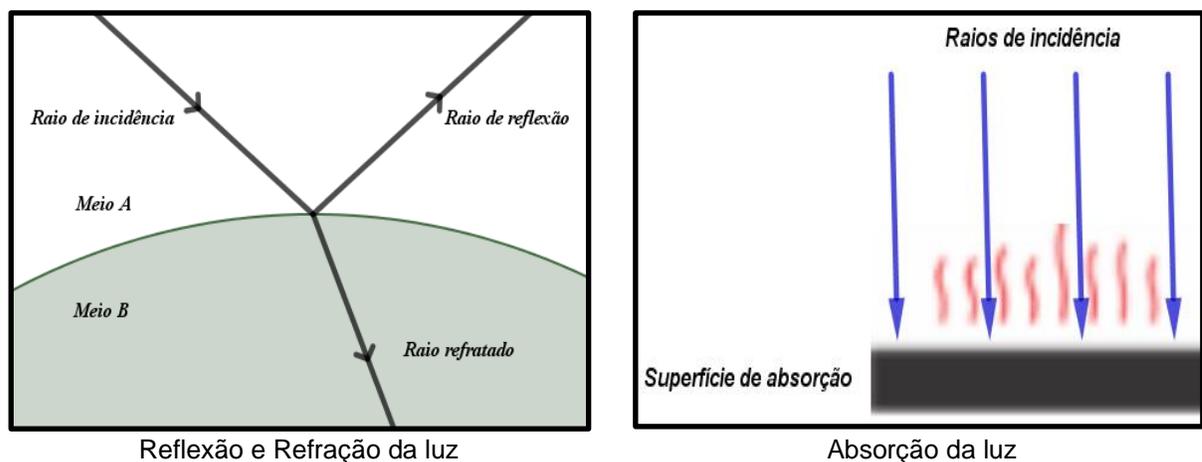


Figura 5: Fenômenos de reflexão, refração e absorção da luz.
Fonte: Próprio autor.

Os três fenômenos podem ocorrer de forma simultânea, mas para o nosso trabalho, pretendemos estudar formação de imagem em superfície refletoras, portanto, daremos ênfase ao estudo dos conceitos relacionados ao fenômeno da reflexão.

2.2 Os princípios da Óptica Geométrica

A Óptica Geométrica é desenvolvida fundamentalmente em quatro princípios:

- I. **Princípio da propagação retilínea da luz** – a luz se propaga em meios homogêneos e transparentes em linha reta;
- II. **Princípio da reversibilidade da luz** – a trajetória de um raio de luz é independente do seu sentido;

- III. **Princípio da independência** – a interseção entre dois os mais pincéis de luz não alteram as suas características, isto é, o sentido, a direção e a natureza antes do encontro é o mesmo após encontro;
- IV. **Princípio do tempo mínimo de Fermat** – em qualquer trajeto a luz sempre gastará o menor tempo possível.

Os quatro princípios são fundamentais para a construção dos conceitos da Óptica Geométrica, sendo os três primeiros associados com a forma que a luz se propaga e o quarto princípio analisa o caminho que gastará o menor tempo, sendo o último responsável pelo desenvolvimento algébrico da Óptica.

2.3 As leis da reflexão

Conforme dito anterior, o fenômeno da reflexão acontece quando a luz incide sobre uma superfície refletora e o raios de luz retornam ao meio de origem. A reflexão, dependendo do meio refletor, pode ocorrer de duas formas: regular ou difusa. É considerada regular quando o meio refletor é liso e polido fazendo que os raios refletidos sejam orientados para uma mesma direção. A reflexão é difusa (irregular) quando os feixes refletidos não seguem a mesma orientação, isso acontece devido a irregularidades existentes no meio refletor (Figura 6).

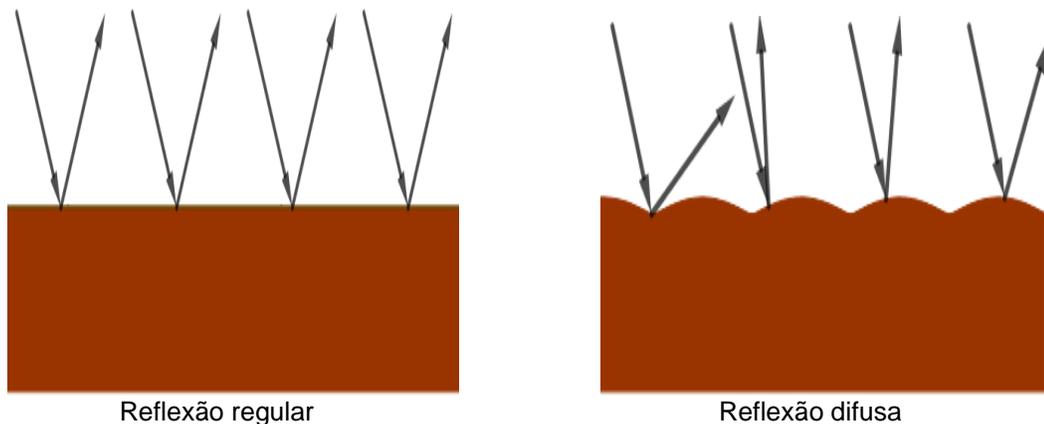


Figura 6: Tipos de reflexão.
Fonte: Próprio autor.

A formação de imagem produzida por uma superfície refletora é baseada nos quatro princípios já citados e em duas leis, conhecidas como as leis da reflexão:

- **Primeira lei da Reflexão** – o raio incidente, o raio refletido e a reta normal (reta perpendicular à superfície passando pelo ponto de incidência) pertencem a um mesmo plano;
- **Segunda lei da Reflexão** – o ângulo entre o raio de incidência e a reta normal, ângulo de incidência, e o ângulo entre a reta normal e o raio refletido, ângulo de reflexão, são congruentes.

A primeira e a segunda lei já eram conhecidas empiricamente pelos gregos antigos, podemos encontrar os enunciados das leis nos trabalhos de Heron (I a.C) e Ptolomeu (II d.C), somente entre a Idade Média e Moderna surgiram demonstrações formais destas leis.

A primeira lei diz que se desenhados em uma folha de papel o raio de incidência e a reta normal, o raio de reflexão tem que estar contido no papel, isto é, o raio de incidência, a reta normal e o raio refletido são coplanares (pertencem ao mesmo plano, veja a Figura 7).

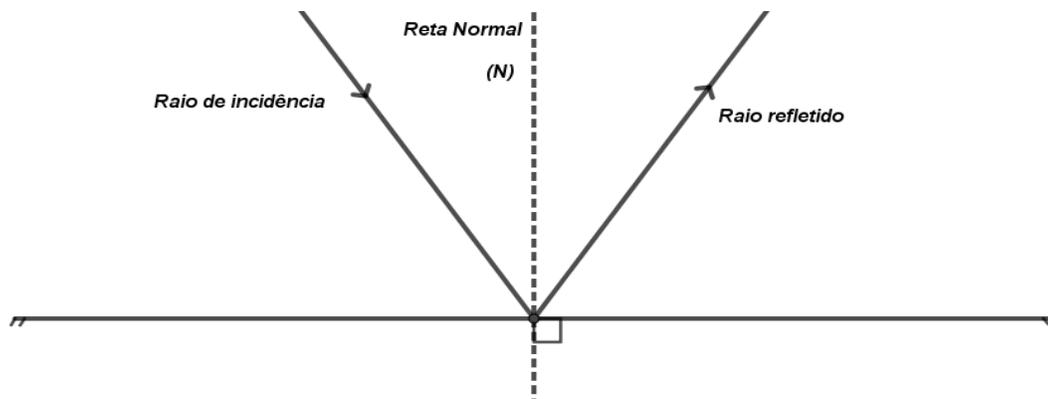


Figura 7: Primeira lei da Reflexão.
Fonte: Próprio autor.

A segunda lei é uma consequência do quarto princípio da Óptica Geométrica, descrito em uma carta direcionada a Monsieur Cureau de la Chambre, escrita pelo matemático francês Pierre Fermat (1601-1665), em agosto de 1657, documento que destacava a frase: “*A natureza sempre escolhe os menores caminhos*” ficando conhecida como o princípio do tempo mínimo. Em resumo a segunda lei afirma que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

A seguir apresentaremos uma demonstração geométrica da segunda lei, onde o docente pode apresentá-la ao discente e no [Apêndice C – Demonstrações](#), temos uma segunda demonstração com um caráter algébrico, sugerida para apreciação do professor, pois ela requer conhecimentos de ensino superior.

Demonstração da segunda lei da reflexão:

Considerando um feixe de luz de origem em A , que incide sobre a reta r (objeto refletor) é refletido no ponto B , queremos mostrar que segundo o princípio de Fermat, existe um único ponto em $P \in r$, tal que o percurso $AP + PB$ gasta-se o menor tempo possível e por consequência o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido (Figura 8).

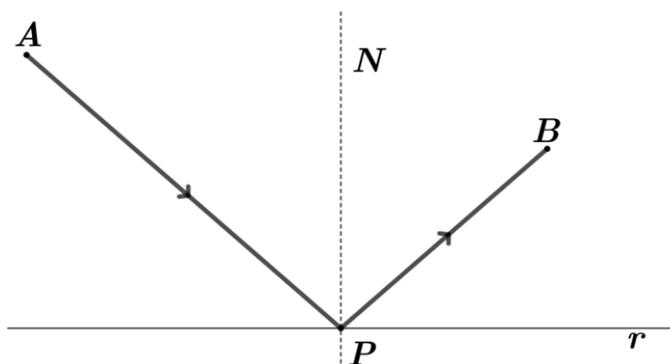


Figura 8: Trajeto que minimiza o tempo do raio de luz refletido.
Fonte: Próprio autor.

De fato, o meio de origem e o de destino são os mesmos, ao longo do trajeto a luz manteve a velocidade v . Seguindo a definição de velocidade:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta S}{v}$$

Como a velocidade da luz é constante, podemos concluir que o tempo é diretamente proporcional à distância, $\Delta t \propto \Delta S$, logo o tempo será mínimo quando a trajetória for mínima. Pela Geometria Euclidiana a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta.

Seja C a projeção ortogonal de A em r e A' o ponto simétrico de A com relação a mesma reta, desta construção, temos que A' , P e B pertencem a um mesmo segmento de reta.

Temos por simetria

$$A'P + PB = AP + PB$$

Logo P é o único ponto pertencente a r , tal que $AP + PB$ é o menor trajeto.

Agora vamos mostrar que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão.

Os triângulos APC e $A'PC$ são congruentes, pois por simetria $AP \equiv A'P$, $AC \equiv A'C$ e PC é comum. O ângulo entre BP e a reta N e o ângulo entre AP e a mesma reta são opostos pelo vértice, então são iguais a ϕ_r , note que $\phi_i + A\hat{P}C = \phi_r + A'\hat{P}C = 90$ (Figura 9) e pela congruência dos triângulos APC e $A'PC$, temos, $A\hat{P}C \equiv A'\hat{P}C$, logo o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão ($\phi_i = \phi_r$).

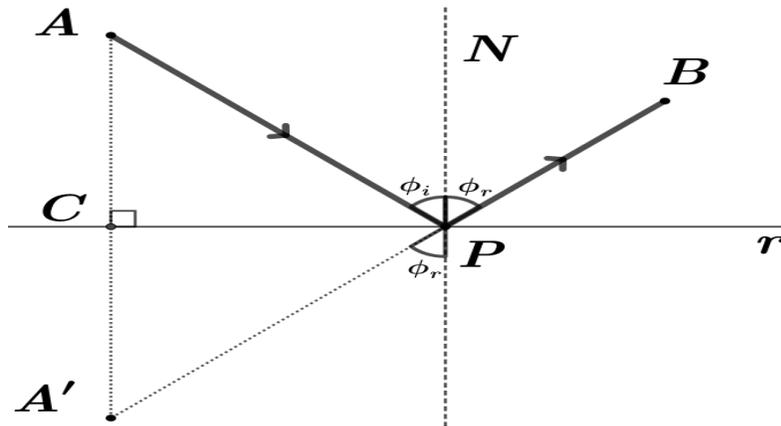


Figura 9: Relação entre os ângulos de incidência e de reflexão.

Fonte: Próprio autor.

Caso ainda exista dúvida sobre a unicidade do ponto P , vamos supor por absurdo que exista um ponto P' pertencente a r e distinto de P , tal que $AP' + P'B < AP + PB$ (Figura 10).

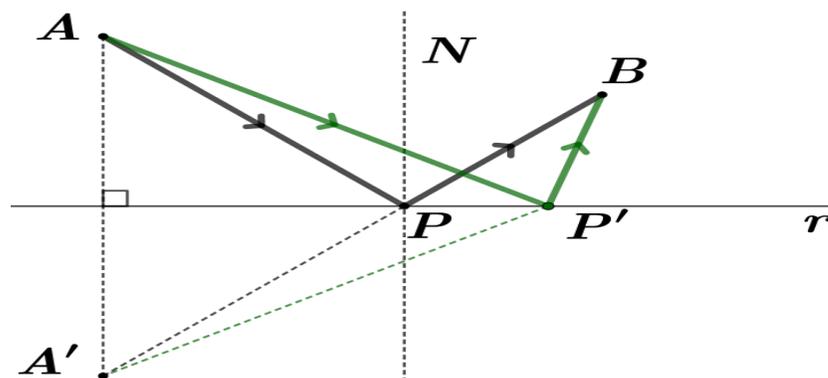


Figura 10: Demonstração da segunda lei da reflexão por contradição.

Fonte: Próprio autor.

Usando a desigualdade triangular (a soma de dois lados quaisquer em um triângulo é sempre maior do que o terceiro lado) no triângulo $A'BP'$, temos que $A'B < A'P' + P'B$, como $A'B = AP + PB$ e $A'P' + P'B = AP' + P'B$, implica em $AP + PB < AP' + P'B$. Logo P é o ponto que minimiza o trajeto $AP + PB$.

As leis da reflexão independem do formato do meio refletor, isto é, funciona da mesma forma em superfícies refletoras planas ou curvas, regulares ou irregulares e independe da natureza da luz, podendo variar a cor, a espessura ou a intensidade do raio de luz, para qualquer caso são validas às duas leis da reflexão.

2.4 Representação Geométrica de ponto objeto e ponto imagem

Para identificar o ponto objeto e ponto imagem em uma construção geométrica, definiremos que o ponto objeto e o vértice dos feixes de luz incidem no meio refletor e o ponto imagem e o vértice dos feixes de luz que emergem do sistema óptico. Lembrando que no tópico 2.1 À Óptica Geométrica: conceitos básicos., apresentamos os possíveis tipos de feixes de luz: cônico convergentes, cônico divergentes e cilíndrico (paralelos), esses modelos determinam a natureza do ponto objeto ou do ponto imagem.

Segue abaixo descrição das classificações.

- **Ponto Objeto Real (POR)** – quando os raios de luz incidentes divergem a partir do ponto;
- **Ponto Objeto Virtual (POV)** – quando os raios de luz incidentes convergem para o ponto (representamos os raios por um segmento tracejado após o sistema óptico);
- **Ponto Objeto Impróprio (POI)** – quando os feixes de luz incidentes são paralelos, o ponto objeto tende ao infinito;
- **Ponto Imagem Real (PIR)** – quando os raios de luz emergentes convergem a partir do ponto;
- **Ponto Imagem Virtual (PIV)** – quando os raios de luz emergentes divergem do ponto (representamos os raios por um segmento tracejado após o sistema óptico);

- **Ponto Imagem Imprópria (PII)** – quando os feixes de luz emergentes são paralelos, o ponto imagem tende ao infinito;

Na Figura 11 temos a representação geométrica do ponto objeto, ponto imagem e a sua respectiva natureza.

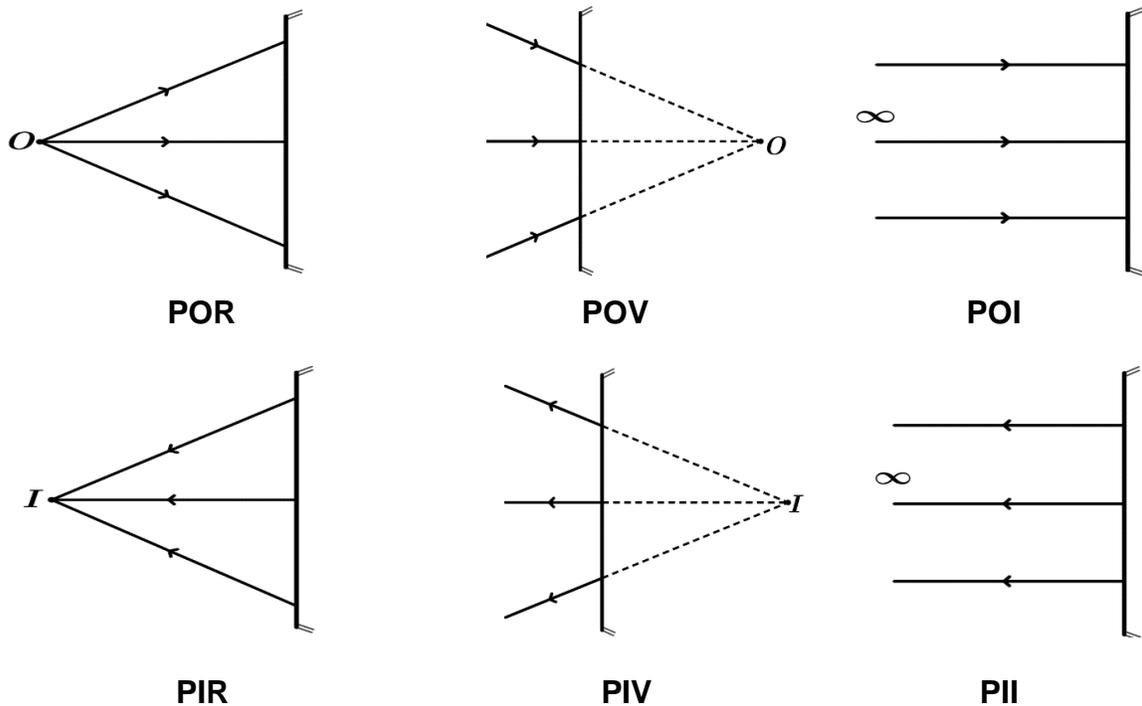


Figura 11: Ponto objeto, ponto imagem e natureza.
Fonte: Próprio autor.

2.5 Formação de imagem em um espelho plano

O estudo de formação de imagem começa normalmente pelos espelhos planos, pois é a superfície refletora mais simples, sendo um sistema óptico estigmático (o objeto e a imagem tem a mesma isometria, não sofrem distorções). O espelho plano será representado por um segmento de reta e a construção da imagem é produzida por simetria, onde o próprio espelho representa o eixo de simetria entre o objeto e a imagem.

Vamos analisar a imagem de um ponto material. Considere um ponto A emissor de luz, um espelho plano E e um observador situado no ponto B recebendo o feixe de luz indiretamente, isto é, o raio de luz saiu de A e incidiu no espelho E e por reflexão chegou em B . De acordo com o princípio de Fermat e as leis da reflexão, estudado no tópico

2.3 As leis da reflexão, para o observador, os raios parecem que vieram em linha reta de um ponto A' (ponto imagem), localizado atrás do espelho (Figura 12), assim A é um ponto objeto real (POR) e A' é o ponto imagem virtual (PIV).

Conforme já demonstrado (tópico 2.3 As leis da reflexão) os triângulos APC e $A'CP$ são congruentes, logo a medida $AC = A'C$, essa relação é a propriedade fundamental de um espelho plano.

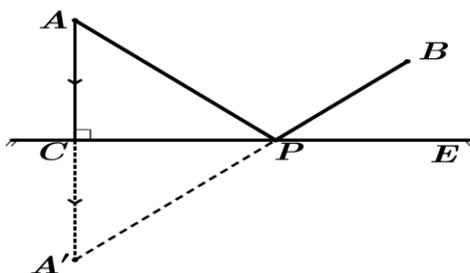


Figura 12: Formação de imagem no espelho plano.
Fonte: Próprio autor.

P. 2.1 - Propriedade fundamental do espelho plano.

A distância do objeto ao espelho é a mesma que a distância da imagem ao espelho.

Podemos interpretar um objeto de corpo extenso constituído por um conjunto infinito de pontos e cada ponto objeto teríamos o seu ponto imagem, mas utilizando esse raciocínio, seria impossível realizar tal construção, então para produzir a imagem podemos limitar o corpo extenso a um conjunto finito de pontos, os quais definem muito bem o objeto.

Para exemplificar vamos supor que queremos construir a imagem da letra “F”, tomando como pontos objeto A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 e usando a P. 2.1 construiremos A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 e A'_5 que representam as imagens dos pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 , respectivamente (Figura 13).

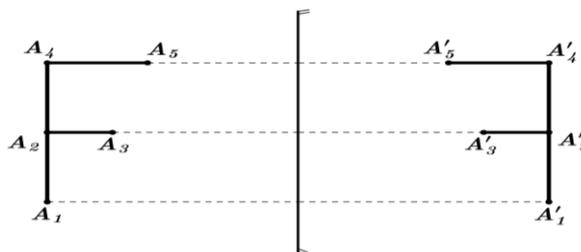


Figura 13: Imagem da letra F.
Fonte: Próprio autor.

Analisando a Figura 13 e a definição adotada no tópico 2.4 Representação Geométrica de ponto objeto e ponto imagem, podemos considerar que a letra F representa um objeto real e a sua imagem é representada por uma imagem virtual, esse exemplo caracteriza a natureza de qualquer imagem produzida por um espelho plano:

A imagem formada em um espelho plano é sempre virtual, direita e do mesmo tamanho que o objeto.

Os espelhos planos são muito utilizados, pois fornecem imagem com boa nitidez, excelente resolução e idêntica ao objeto. Porém, existem situações que precisamos alterar o tamanho da imagem, os espelhos de maquiagem produzem imagens maiores que o objeto, enquanto os espelhos usados para monitorar lojas refletem imagens menores que o objeto, para essas situações utilizamos normalmente os espelhos esféricos, tema do nosso próximo tópico.

2.6 Apresentação dos espelhos esféricos

Seccionado a esfera por um plano qualquer, a superfície esférica fica dividida em duas partes, chamadas de calotas esféricas. Tomando a calota de menor área para estudo dos espelhos esféricos (Figura 14(a)).

Chamamos de espelho convexo quando a região externa da calota é um sistema refletor e se a região refletora for a interna denominamos essa superfície de espelho côncavo. Para simplificar os desenhos, adotaremos as planificações das Figura 14(b) e 14(c) para representar os espelhos côncavo e convexo, respectivamente.

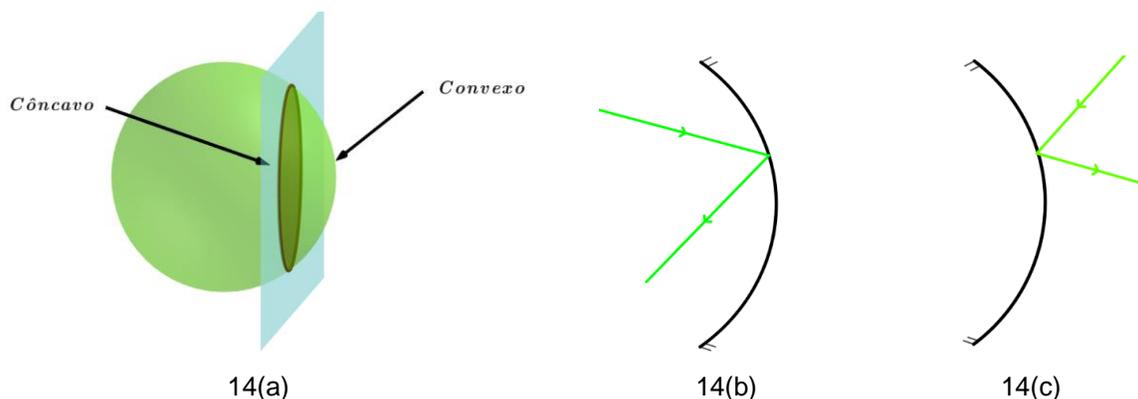


Figura 14: Espelhos esféricos e representação planificada.
Fonte: Próprio autor.

2.6.1 Elementos de um espelho esférico

A construção de imagem no espelho esférico vai depender de algumas referências geométricas, e que chamaremos de elementos do espelho esférico, tomaremos como exemplo um espelho côncavo (Figura 15), mas as nomenclaturas e as definições também são válidas para os convexos.

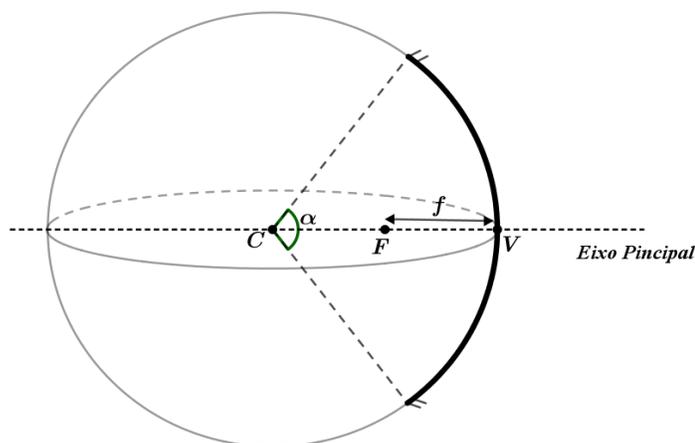


Figura 15: Elementos do espelho esférico.
Fonte: Próprio autor.

- **Centro de curvatura (C)** – centro da esfera que contém o espelho;
- **Eixo óptico ou eixo principal (EP)** – reta imaginária que passa por C e divide o espelho simetricamente;
- **Vértice (V)** – é o ponto de intersecção entre o espelho e o eixo principal;
- **Ângulo de abertura (α)** – é a abertura de centro em C e que contém os extremos do espelho;
- **Foco principal (F)** – considerando as condições de nitidez de Gauss, da quais estudaremos no tópico 2.6.2 Condições de nitidez para o espelho esférico, é o ponto médio entre os pontos C e V;
- **Distância focal (f)** – é a distância entre V e F.

Representando o raio da esfera que contém o espelho por R e considerando as condições de nitidez de Gauss, podemos concluir que a distância focal pode ser dada por:

$$f = \frac{R}{2} \quad (2.1)$$

2.6.2 Condições de nitidez para o espelho esférico

Os espelhos planos diferentes do esférico apresenta uma relação biunívoca entre ponto objeto e ponto imagem, isto é, para cada ponto objeto o espelho associa um único ponto imagem, logo os espelhos planos são considerados estigmáticos. Há grande maioria dos espelhos esféricos são astigmáticos, ou seja, cada ponto objeto produz mais de um ponto imagem, o que provoca produção de imagens não nítidas (aberrações esféricas).

O matemático e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) notou que sobre certas condições geométricas, era possível produzir imagens aproximadamente nítidas em um espelho esférico, essas duas propriedades ficaram conhecidas como condições de nitidez dos espelhos esféricos de Gauss, segue a descrição delas em P. 2.2.

P. 2.2 – Condições de nitidez dos espelhos esféricos de Gauss

- I. O ângulo de abertura do espelho esférico deve ser mínimo ($\alpha \cong 10^\circ$);
- II. Os raios que incidem no espelho devem ter pouca inclinação com relação ao eixo principal (aproximação paraxial).

Nos casos em que essas condições não são consideradas, teremos imagens distorcidas, isso ocorre devido à geometria esférica. Os raios que incidem no espelho mais distantes de EP produzirão pontos imagens mais longe de F , caso contrário, se os raios vão se aproximando do eixo principal os pontos imagens vão tendendo ao foco principal (F).

Quando os raios de luz incidem no espelho paralelamente ao eixo principal a reflexão tende a passar por F a medida que os raios de incidência se aproxima de EP .

Os livros do ensino médio normalmente mencionam que os espelhos esféricos são do tipo gaussiano, mas raramente apresentam as condições ou demonstram as propriedades expressas em P. 2.2. Acreditamos que para uma aprendizagem significativa devemos analisar e provar essas condições.

Demonstração de P. 2.2.

Dado um raio de luz paralelo ao eixo principal, passando por A e incidido no espelho

esférico em B , seja D o ponto de intersecção do raio refletido com eixo óptico, sabendo que C , F e V representam o centro de curvatura, o foco, vértice do espelho esférico, respectivamente, e que toda reta normal a uma esfera passa por C . Pelo ponto D traçamos um segmento DE perpendicular a BC (Figura 16: Raio paraxial).

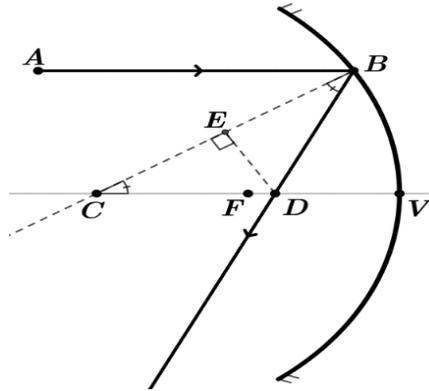


Figura 16: Raio paraxial.
Fonte: Próprio autor.

Tomando o ângulo de incidência $\widehat{ABC} = \phi_i$, pela segunda lei da reflexão, $\widehat{CBD} = \phi_i$, e como $AB \parallel CV$, implica que $\widehat{BCD} = \phi_i$, por consequência $\widehat{EDC} \equiv \widehat{BDE}$. Logo pelo caso ALA (ângulo, lado e ângulo) os triângulos BDE e CDE são congruentes pois:

$$\begin{cases} \widehat{BDE} \equiv \widehat{EDC} \\ DE \text{ é comum} \\ \widehat{BED} \equiv \widehat{DEC} = 90^\circ \end{cases}$$

Aplicando a relação cosseno no triângulo CDE , temos

$$\cos \phi_i = \frac{CE}{CD} \Rightarrow \cos \phi_i = \frac{\frac{R}{2}}{CD}$$

$$CD = \frac{R}{2 \cos \phi_i} \quad (2.2)$$

Como CD é a distância do centro de curvatura ao ponto de intersecção do raio refletido com o eixo principal e que depende de ϕ_i , para variações pequenas do ângulo de incidência teremos também distâncias pequenas de B ao segmento CV .

Vamos supor que $0 \leq \phi_i \leq 5^\circ$ (lembrando que o ângulo de abertura do espelho α para as condições de nitidez era de aproximadamente 10°) e usando a equação $CD = \frac{R}{2 \cos \phi_i}$ para estimar aproximação do ponto D ao ponto F .

$$\frac{R}{2 \cos 0} \leq CD \leq \frac{R}{2 \cos 5^\circ}$$

$$\frac{R}{2 \cdot 1} \leq CD \leq \frac{R}{2 \cdot 0,996}$$

$$\frac{R}{2} \leq CD \leq \frac{R}{1,992}$$

Considerando a equação (2.1) ($f = \frac{R}{2}$), temos que CD é aproximadamente igual a f . O resultado pode nos fornecer o desvio (erro) do raio de luz com relação ao foco que é de aproximadamente 0,4%, isso implica dizer que se um espelho tem raio de curvatura igual a 40 cm e para que atenda as condições de nitidez de Gauss, o diâmetro da calota deve ter no máximo 6,98 cm. Para os próximos tópicos levaremos em consideração que os espelhos esféricos citados são do tipo gaussiano.

2.6.3 Raios notáveis

Para construção de imagem em espelhos esféricos precisamos conhecer a trajetória dos raios, da incidência até a reflexão. A maioria dos raios que incidem em um espelho esférico precisa de um instrumento de medir ângulo para determinar a sua reflexão e assim determinar o trajeto da luz, mas existem três raios, conhecidos como raios notáveis, que podemos determinar o trajeto sem necessidade de instrumentos de medir, simplificando consideravelmente a construção da imagem. Segue uma breve descrição dos raios notáveis e suas representações geométricas:

- I. Todo raio que incide no espelho paralelamente ao eixo principal reflete passando pelo foco. Considerando o princípio da reversibilidade da luz, a recíproca é verdadeira, todo raio que passa pelo foco e incide no espelho, reflete de forma paralela ao eixo óptico (Figura 17);

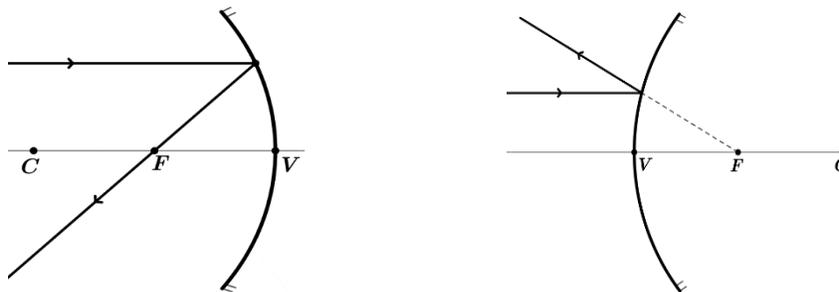


Figura 17: Raio incidente paralelamente ao eixo óptico.
Fonte: Próprio autor.

- II. Os raios de luz que incidem no vértice do espelho refletem de forma simétrica com relação ao eixo óptico (Figura 18);

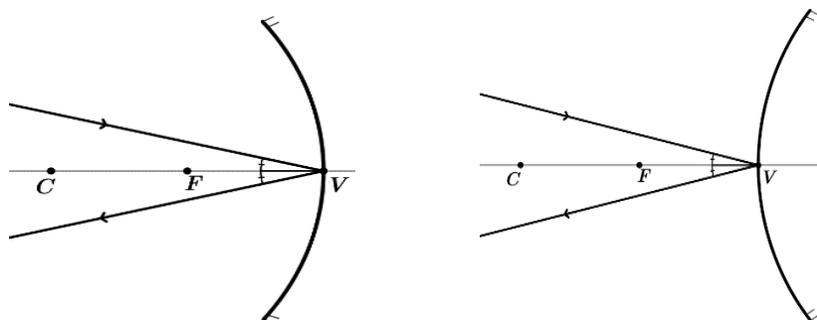


Figura 18: Raio que incide no vértice.
Fonte: Próprio autor.

- III. Os raios que incidem no espelho e que passam pelo centro de curvatura refletem em si mesmo (Figura 19);

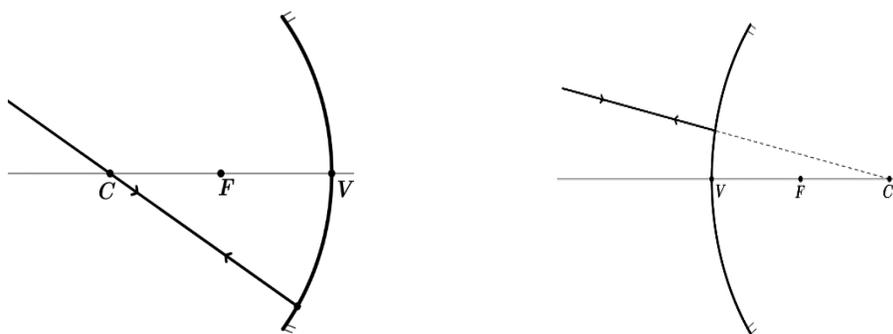


Figura 19: Raio incidente no centro de curvatura.
Fonte: Próprio autor.

A combinação dos raios notáveis facilitam na produção das imagens nos espelhos esféricos, conforme veremos no próximo tópico.

2.6.4 Formação de imagem no espelho esférico

Para facilitar a construção das imagens de objetos extensos, consideraremos que o objeto estará posicionado perpendicularmente ao eixo óptico e do lado esquerdo do espelho, analisaremos os objetos e as imagens de forma linear (unidimensional), por isso, os representaremos por uma seta.

A imagem ficará caracterizada pela intersecção da reflexão de dois raios notáveis. A descrição da imagem com relação ao objeto considerará:

- **Tamanho** – a imagem pode ser maior, menor ou igual ao objeto;
- **Orientação (direita ou invertida)** – quando a imagem tem o mesmo sentido que objeto, dizemos que ela é direita, caso contrário a imagem será considerada invertida;
- **Natureza (real, virtual ou imprópria)** - a imagem será considerada real quando a reflexão dos raios notáveis se interceptarem efetivamente, será virtual quando prolongamos dos segmentos que representam a reflexão dos raios notáveis para que ocorra a intersecção e será considerada imprópria quando os raios refletidos forem paralelos.

Para produzir a representação geométrica das imagens utilizaremos os raios notáveis do tipo I (Todo raio que incide no espelho paralelamente ao eixo principal reflete passando pelo foco do espelho) e do tipo II (Os raios de luz que incidem no vértice do espelho refletem de forma simétrica com relação ao eixo óptico), escolhemos esses modelos arbitrariamente.

O espelho esférico côncavo pode produzir imagens com diferentes tamanhos, orientação e natureza de um mesmo objeto, as características vão depender exclusivamente da posição do objeto sobre o eixo óptico.

Descreveremos a seguir a caracterização das possíveis imagens formadas pelo espelho côncavo.

- I. Objeto posicionado antes do centro de curvatura (esquerda de C), nesta posição a imagem é menor que o objeto, invertida e real (Figura 20);

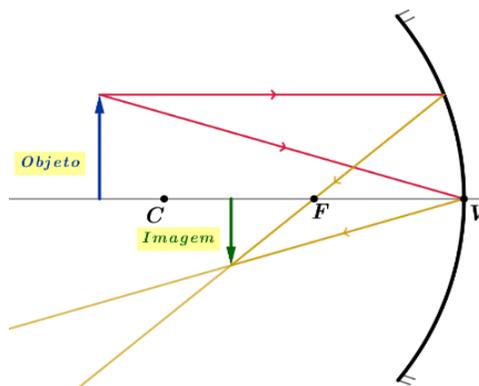


Figura 20: Objeto posicionado a esquerda do centro de curvatura.
Fonte: Próprio autor.

- II. Objeto posicionado sobre o centro de curvatura, nesta posição a imagem tem o mesmo tamanho que o objeto, invertida e real (Figura 21);

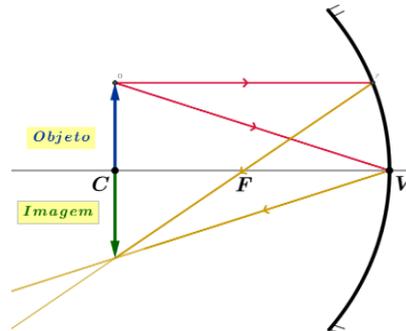


Figura 21: Objeto posicionado sobre o centro de curvatura.
Fonte: Próprio autor.

- III. Objeto posicionado entre o centro de curvatura e o foco, nesta posição a imagem é maior que o objeto, invertida e real (Figura 22);

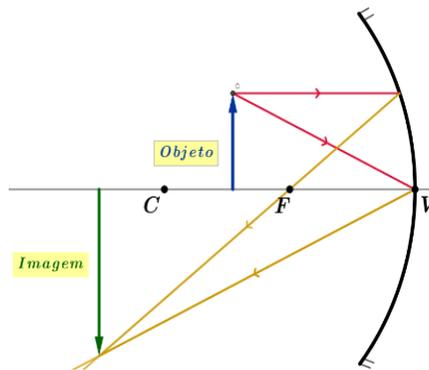


Figura 22: Objeto posicionado entre o centro de curvatura e o foco.
Fonte: Próprio autor.

- IV. Objeto posicionado sobre o foco, nesta posição a imagem é imprópria (Figura 23);

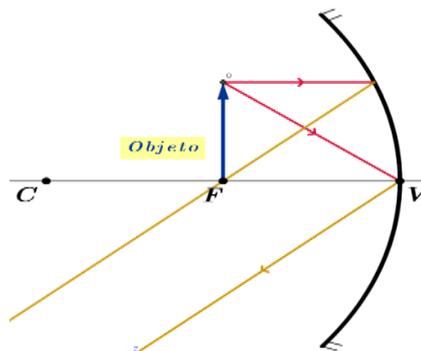


Figura 23: Objeto posicionado sobre foco.
Fonte: Próprio autor.

- V. Objeto posicionado entre o foco e o vértice, nesta posição a imagem é maior que o objeto, direita e virtual (Figura 24).

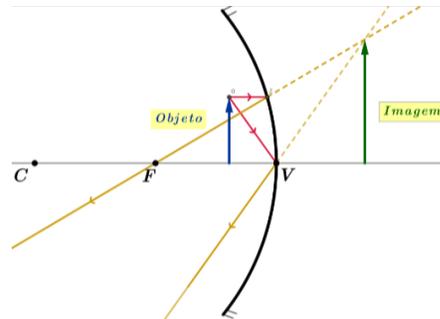


Figura 24: Objeto posicionado entre o foco e o vértice.
Fonte: Próprio autor.

Para o espelho esférico convexo a imagem sempre terá a mesma característica, independentemente da posição do objeto, a produção sempre será menor que o objeto, direita e virtual (Figura 25).

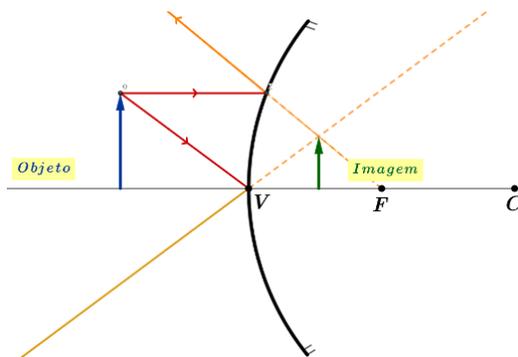


Figura 25: Característica da imagem de um espelho esférico convexo.
Fonte: Próprio autor.

Os espelhos esféricos têm uma vasta aplicação no nosso cotidiano, o modelo convexo permite uma ampliação visual do ambiente e devido a isso muito requisitado em espaços de monitoramento como lojas, supermercados, retrovisores, entre outras utilidades.

O espelho do tipo côncavo tem a tendência de focalizar os raios incidentes ou refletir raios paralelamente, esse modelo é muito útil nos refletores atrás das lâmpadas de sistema de iluminação e projeção (lanternas e faróis, por exemplo), nas objetivas de telescópios, etc.

2.6.5 As equações de Gauss

As características das imagens produzidas em espelhos esféricos podem ser determinadas de forma geométrica (no tópico 2.6.4 Formação de imagem no espelho esférico) ou de forma algébrica, conforme veremos neste tópico.

Para estudar as equações de Gauss adotaremos um sistema de eixo ortogonal, onde o vértice coincide com a origem, a coordenada horizontal será posicional sobre o eixo óptico do espelho. Por convenção, a orientação vertical será positiva acima do eixo do vértice e negativa abaixo dele, já o eixo horizontal será positivo à esquerda do espelho e negativo à direita dele.

A primeira relação conhecida como equação do aumento linear de Gauss diz que se um objeto e a sua imagem têm tamanhos lineares o e i , respectivamente, sendo a distância do objeto ao espelho dado por p e a distância da imagem ao espelho p' , então:

$$\frac{i}{o} = - \frac{p'}{p} \quad (2.3)$$

A segunda expressão é conhecida como equação do foco conjugado de Gauss, é uma continuidade da primeira, se f é a distância focal, logo:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \quad (2.4)$$

As equações nos permitem determinar o tamanho, a orientação e a natureza da imagem sem precisar desenhá-la. A seguir demonstraremos as equações e em seguida mostraremos como utilizar as expressões para determinar as características da imagem.

Demonstração das equações de Gauss:

Traçando os raios notáveis do tipo I e do tipo II em um espelho que atendam as condições de nitidez de Gauss, chamando de o o tamanho do objeto e de i o tamanho da imagem, considerando a distância do objeto ao espelho $AV = p$, a distância da imagem ao espelho $DV = p'$ e a distância focal $FV = f$.

Tomando o ponto H como a projeção ortogonal no eixo óptico do ponto P (Figura 26).

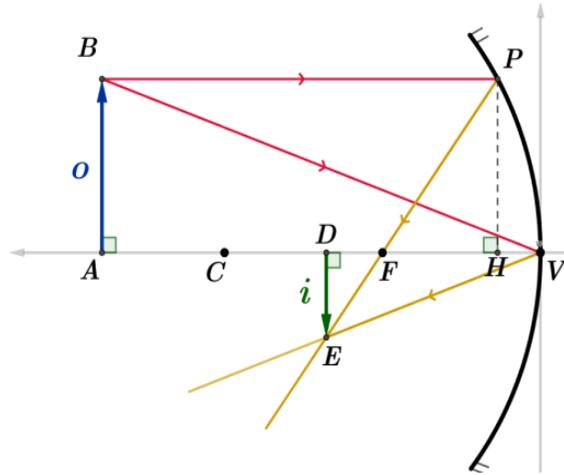


Figura 26: Equações de Gauss.
Fonte: Próprio autor.

Note $B\hat{A}V \equiv E\hat{D}V = 90^\circ$ e $B\hat{V}A \equiv D\hat{V}E$, então os triângulos ABV e DEV são semelhantes e lembrando que de acordo com a conversão do nosso sistema ortogonal DE tem orientação negativa,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DV}{AV} \Rightarrow -\frac{i}{o} = \frac{p'}{p} \Rightarrow \frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} \quad \text{C.Q.D (como queríamos demonstrar)}$$

Agora vamos demonstrar a segunda equação, observe que $F\hat{H}P \equiv E\hat{D}F = 90^\circ$ e $P\hat{F}H \equiv D\hat{F}E$, segue que os triângulos PFH e DEF são semelhantes,

$$\frac{DE}{PH} = \frac{DF}{FH} \quad (I)$$

Nas condições de nitidez de Gauss o ponto H tende a V e por consequência FH tende a FV , usando essa aproximação e a primeira equação de Gauss em (I), temos

$$\begin{aligned} \frac{DE}{PH} = \frac{DF}{FV} &\Rightarrow -\frac{i}{o} = \frac{p' - f}{f} \\ \frac{p'}{p} = \frac{p' - f}{f} &\Rightarrow fp' = pp' - pf \\ f(p' + p) = pp' &\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{p + p'}{pp'} \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} &\quad \text{C.Q.D} \end{aligned}$$

2.6.6 Característica de uma imagem em espelho esférico usando as equações de Gauss

Observando as imagens construídas no tópico 2.6.4 Formação de imagem no espelho esférico e da conversão de sinal adotada em 2.6.5 As equações de Gauss, podemos caracterizar as imagens de um objeto real ($p > 0$) produzidas em um espelho esférico depende exclusivamente das grandezas p' e i . Para determinar se o espelho é côncavo ou convexo precisamos olhar para f .

Para definir a orientação da imagem de objeto real, basta analisar o sinal de i , se i for positivo terá a mesma orientação que objeto (imagem direita), para i negativo teremos a imagem e o objeto com orientações diferentes (imagem invertida).

Já o tamanho da imagem com relação ao objeto, basta comparar os valores do $|i|$ e o (tamanho do objeto):

- Se $|i| > o$, a imagem é maior que o objeto;
- Se $|i| = o$, a imagem é do mesmo tamanho que o objeto;
- Se $|i| < o$, a imagem é menor que o objeto;

A natureza da imagem depende simplesmente do sinal de p' :

- Se $p' > 0$, imagem real;
- Se $p' < 0$, imagem virtual.

Para determinar se o espelho é côncavo ou convexo, basta observar o sinal de f :

- Se $f > 0$, o espelho será côncavo;
- Se $f < 0$, o espelho será convexo.

2.7 Espelhos parabólicos

Os estudos anteriores apontam que determinados espelhos côncavos (Gaussianos) são capazes de refletir raios passando aproximadamente no foco, mas qual seria a superfície refletora que concentraria os raios refletidos exatamente em um único ponto? A resposta para o problema são as superfícies refletoras do tipo parabolóide.

Os espelhos parabólicos ou paraboloides são superfícies refletoras produzidas pela revolução de uma parábola. Diferente dos espelhos côncavos, quando raios de luz incidem de forma paralela ao eixo óptico da parábola, os raios refletidos, sem restrição, interceptam no foco.

Quando precisamos focalizar um sinal ou refletir raios paralelos, os espelhos parabólicos são mais precisos do que os côncavos. Os paraboloides são aplicados em antenas de televisão por assinatura, telescópios, geradores termoelétricos, fogões solares, entre outras utilidades. Para compreender a propriedade refletora da parábola precisamos defini-la.

Seja F um ponto fixo e r uma reta qualquer no plano, a parábola é formada pelo conjunto de todos os pontos P , tais que F (foco da parábola) a P é equidistante de P a r (reta diretriz). Podemos representar a definição algebricamente por:

$$d(F, P) = d(P, r) \quad (2.5)$$

Vamos demonstrar a propriedade refletora da parábola de duas formas: a primeira será abordada neste tópico, tem características geométricas e utilizando conhecimentos do ensino médio, cabendo ao professor verificar a viabilidade ou não da apresentação para o aluno em sala de aula, a segunda demonstração será estará disponível no apêndice C2. Demonstração da propriedade refletora da parábola, e usa de conceitos do ensino superior, portanto, é destinada apreciação do docente.

Para demonstração geométrica consideraremos que a parábola divide o plano em dois semiplanos, os pontos $X_i, i \in \mathbb{N}$, contidos no semiplano interno (que contém o foco) são tais que $d(F, X_i) < d(X_i, r)$ e os pontos Y_i , pertencente ao semiplano externo, atende a desigualdade $d(F, Y_i) > d(Y_i, r)$.

Demonstração da propriedade refletora da parábola:

Seja a parábola Y de foco F e de reta diretriz r , considere um ponto $P \in Y$, tomando um ponto $P' \in r$, tal que $d(F, P) = d(P, P')$, dada a reta t bissetriz do ângulo $F\hat{P}P'$, vamos mostrar inicialmente que P é o único ponto pertencente a reta t que é tangente a Y .

Vamos supor por absurdo que exista outro ponto qualquer $Q \in t$, diferente de P , tal que t seja tangente Y no ponto Q .

congruente ao ângulo formado por FP e t , atendendo a segunda lei da reflexão (página 30). Como PW é ortogonal a reta diretriz r , esse segmento é paralelo ao eixo óptico da parábola, portanto, todo raio que incide na parábola de forma paralela ao eixo óptico, serão refletidos de tal forma a passarem pelo foco.

Os conceitos descritos neste tópico são raramente abordados no ensino médio, em alguns livros existem apenas pequenas ilustrações ou citações referentes aos espelhos parabólicos, e dentro deste contexto não apresentam a importância deste instrumento no nosso cotidiano.

Como já foi citado anteriormente pretendemos analisar a narrativa que ficou conhecida como o “raio da morte de Arquimedes”, e para termos uma posição sobre a veracidade do fato, precisamos avaliar as possibilidades, dentre elas a superfície refletora parabolóide, portanto, é necessário conhecer minimamente as características deste objeto.

CAPÍTULO 3 - APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA.

Neste Capítulo descreveremos sobre a origem do Geogebra, a sua importância e contribuição para o ensino, em especial para a disciplina de Física. Como Utilizaremos esse *software* no produto educacional do presente trabalho e na confecção de algumas figuras do capítulo 2, descreveremos um manual de comandos para auxiliar e simplificar as orientações para que o leitor compreenda o desenvolvimento das atividades propostas no produto.

3.1 A importância da educação tecnológica e a utilização do Geogebra no ensino e aprendizagem

A nossa proposta de ensino está atrelada à teoria da aprendizagem significativa, queremos desenvolver atividades pautadas nas Unidades de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), sugerida por Moreira (2011). Para essa aplicação devemos pensar: qual a melhor maneira de abordar o tema e como motivá-los a estudar o assunto proposto? Acreditamos que o uso das tecnologias educacionais é um bom meio para atingir esse objetivo.

Parte dos alunos da educação básica, em especial os do ensino médio, tem acesso as várias ferramentas tecnológicas, em especial as de mídias sociais (*WhatsApp, Facebook, Instagram, Twitter*, entre outras). Corriqueiramente nos deparamos com alunos em sala de aula usando *smartphones* sem objetivos educacionais, a falta de orientação pedagógica para utilização do celular nas aulas, afetam na produção dinâmica de conhecimento que o aparelho poderia contribuir, o seria um grande aliado para o desenvolvimento de conceitos, se tornando um inimigo no processo de ensino.

O formato das aulas precisa passar por uma reestruturação, realizar abordagens expositivas usando somente o giz e a lousa, dificilmente chamará a atenção do discente e não fará frente as redes sociais. O estudante requer ferramentas mais dinâmicas de ensino, das quais poderá interagir e ter o prazer de apreender. Os professores precisam

incorporar as ferramentas tecnológicas as suas metodologias de ensino. Para Silva e Corrêa (2014, p.27):

Educandos chegam às escolas com celulares de última geração e preferem estar a usar o *Facebook*, ou *Twitter* durante as aulas do que prestar atenção aos conteúdos elencados pela escola como importantes para sua formação. Os educadores preferem entender o ato de educar apenas com quadro-negro e giz e assim perpetuam um modelo já desgastado, com resultados mínimos. Nesse cenário, cabe refletir sobre a importância das novas tecnologias para a aprendizagem. Elas realmente podem contribuir para esse processo ou isso é algo utópico, ilusório? Os educandos só aprendem da forma como se aprendia trinta anos atrás?

Olhando para o cenário tecnológico que vivemos e apoiada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que apontam que as tecnologias são ótimas ferramentas de apoio para o professor:

Analisar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento, científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) (BRASIL, 2018, p.539).

Pretendemos utilizar o dinamismo do *software* Geogebra para abordar o tema proposto da UEPS do presente trabalho.

O Geogebra é um *software* multiplataforma gratuito, criado no ano de 2001, originalmente como um programa de geometria dinâmica plana, foi produzido durante a tese de doutorado do matemático austríaco Markus Hohenwarter.

Atualmente o *software* tem uma infinidade de aplicações para todos os níveis no ensino de matemática como: geometria tridimensional, álgebra, tabelas, gráficos (funções), estatística, cálculo diferencial e integral. Ganhador de vários prêmios na Europa e nos Estados Unidos ao longo de sua existência, se tornou um dos mais populares do mundo, usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais 300 000 *downloads* mensais, existem 62 institutos em 42 países que trabalham em criação de novas ferramentas para serem incorporadas ao programa. O desenvolvimento do Geogebra está expandindo rapidamente para outras disciplinas como Química e Física, por exemplo.

O Geogebra tem na sua origem, o estudo de conceitos matemáticos, acreditamos que devido a isso não tenha uma divulgação mais efetiva entre os docentes de Física, diferentemente do prestígio que recebe entre os professores de Matemática.

Um dos *softwares* mais utilizados no ensino de Física é a plataforma de simulação gratuita *PhET* Colorado (<https://phet.colorado.edu/>), no site existem várias simulações prontas de conceitos físicos. A grande pergunta que temos é: porque utilizar o Geogebra e não o *PhET*?

O *PhET* é um simulador que já está pronto basta utilizar, isso pode ser interpretado como vantajoso, já que é só pegar o simulador e apresentar o conceito físico que deseja ensinar, mas se a plataforma não tiver o simulador para o nosso objeto de estudo? O que era uma vantagem se tornou uma desvantagem. Já o Geogebra é escrito em JAVA, a construção dos simuladores normalmente parte do zero, podendo construir uma infinidade de simulações, adaptando de acordo com as nossas necessidades e com os parâmetros desejados.

Existe ainda a possibilidade de encontrar um simulador pronto no Geogebra, acessando o site <https://www.geogebra.org/materials> e digitando na busca um assunto de interesse, em seguida aparecerá trabalhos compartilhados por usuários do programa das mais diversas nacionalidades.

A instalação do programa nas múltiplas plataformas pode ser realizada pelo endereço <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Para a confecção do nosso produto utilizaremos a versão *classic 5* para computador, mas para facilitar aplicação do produto educacional, podemos utilizar a versão para *smartphone* Geogebra *Graphing Calculator*, já que o aparelho celular é muito mais acessível para os estudantes do que um computador, às duas versões têm as mesmas ferramentas, mas com *layouts* diferentes.

3.2 Layout e guias de comandos da versão *Classic 5*.

O produto anexado a este trabalho é referente a análises de figuras planas, portanto, apresentaremos os comandos essenciais a construção de objetos em duas

dimensões. Não temos a intenção de produzir simuladores neste capítulo, mas apresentar uma visão geral dos comandos do programa.

A Figura 28 apresenta o *Layout* inicial do programa, onde destacamos a versão, as abas, lista de comandos, campo de entrada e janelas algébricas e de ilustração.

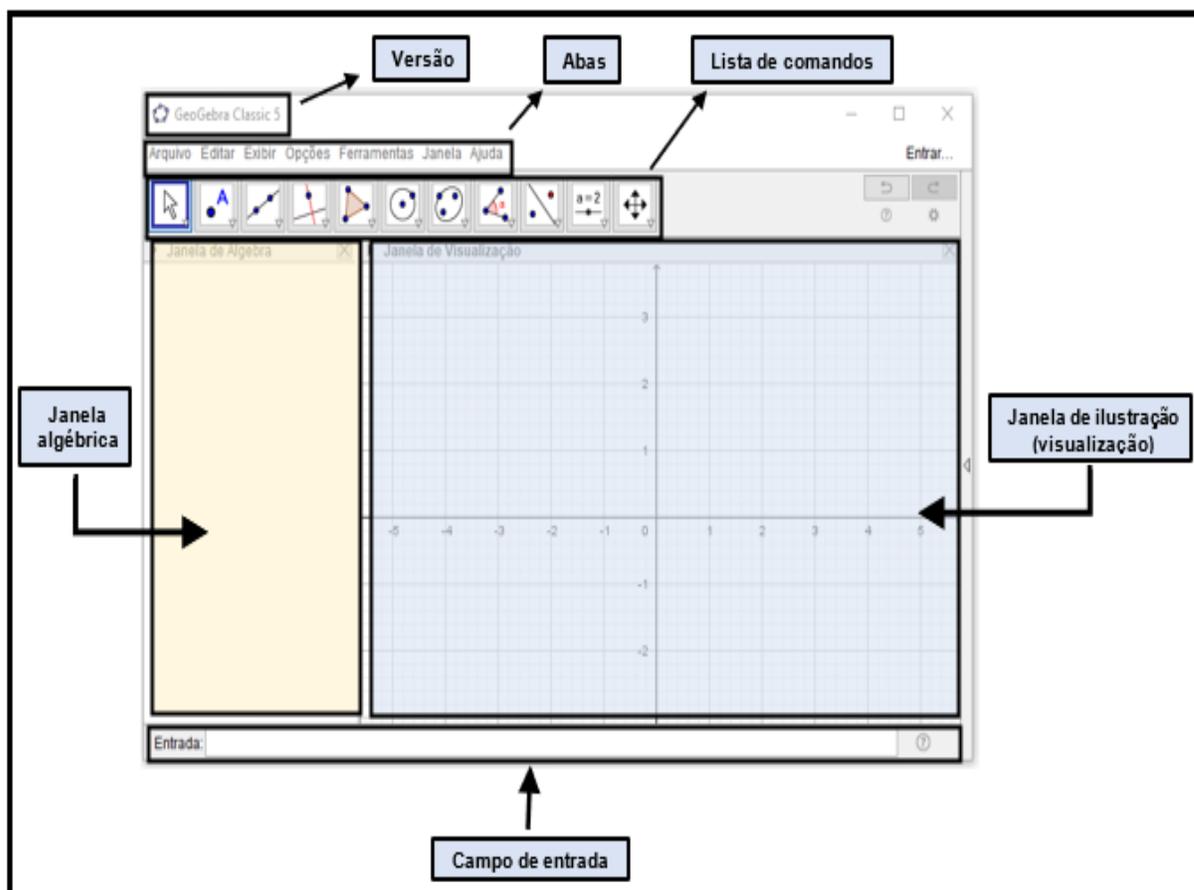


Figura 28: *Layout* inicial do Geogebra.
Fonte: Próprio autor.

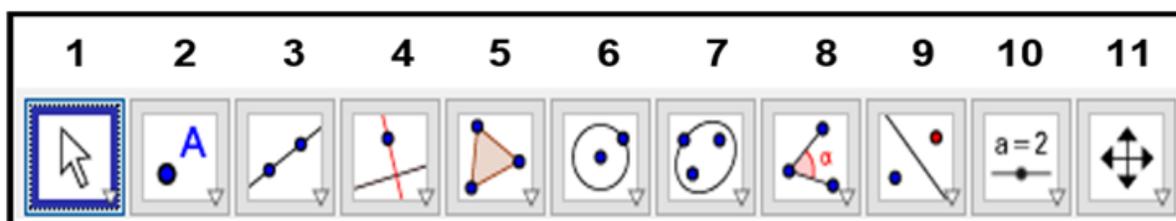
Descreveremos a seguir a funcionalidade destes campos.

- a) **As abas** - são guias gerais do programa, nelas encontramos funções tradicionais como: novo, abrir, salvar, fonte, desfazer, refazer, inserir figuras, modos de exibição entre outras ações específicas do programa;
- b) **Campo de entrada** – é utilizado para descrição literal de objetos matemáticos (pontos, equações, funções e operações entre outros objetos), o campo de entrada com a lista de comandos são essenciais para construção de atividades no Geogebra;

- c) **Janelas algébricas e de ilustração** – a janela algébrica apresenta literalmente a construção do objeto (coordenadas, equações, listas, parâmetros, funções, entre outros) e a janela de ilustração mostra as figuras que representam o objeto;
- d) **A lista de comando** – são objetos geométricos ou aritméticos, ou algébricos que podemos utilizar na construção do tema abordado, e como já mencionado é um campo muito utilizado, para facilitar a compreensão do nosso produto, adotaremos nomenclaturas para cada comando.

3.3 Nomenclatura da lista de comandos.

Na lista de comandos temos onze ícones e para cada item temos certa quantidade de opções, para servir de orientação numeraremos os ícones da esquerda para a direita e as opções acrescentaremos as letras do alfabeto para representá-los, no exemplo da Figura 29(a), ao clicarmos no primeiro símbolo aparecem 4 opções, rotulando-os em 1a, 1b, 1c e 1d (Figura 29(b)).



29(a)



29(b)

Figura 29: Guia da lista de comandos.
Fonte: Próprio autor.

A Tabela 1 apresenta os ícones, a descrição e o seu respectivo comando de acordo com a nomenclatura adotada neste capítulo, da qual faremos referência durante a produção do produto educacional.

Tabela 1: Ícones, descrição e comandos do Geogebra.

Ícone	Descrição	comando
	Mover	1a
	Rotação em torno de um ponto	1b
	Função a mão livre	1c
	Caneta	1d
	Ponto	2a
	Ponto em objeto	2b
	Vincular/Desvincular ponto	2c
	Interseção de dois objetos	2d
	Ponto médio ou centro	2e
	Número complexo	2f
	Otimização	2g
	Raízes	2h
	Reta	3a
	Segmento	3b
	Segmento com comprimento fixo	3c
	Semirreta	3d
	Caminho poligonal	3e

	Vetor	3f
	Vetor a partir de um ponto	3g
	Reta perpendicular	4a
	Reta paralela	4b
	Mediatriz	4c
	Bissetriz	4d
	Reta tangente	4e
	Reta polar ou diametral	4f
	Reta de regressão linear	4g
	Lugar geométrico	4h
	Polígono	5a
	Polígono regular	5b
	Polígono rígido	5c
	Polígono semideformável	5d
	Círculo dado o centro e um de seus pontos	6a
	Círculo dado o centro e o seu raio	6b
	Compasso	6c
	Círculo definido por três pontos	6d
	Semicírculo	6e
	Arco circular	6f
	Arco circuncircular	6g
	Setor circular	6h

	Setor circuncircular	6i
	Elipse	7a
	Hipérbole	7b
	Parábola	7c
	Cônica por cinco pontos	7d
	Ângulo	8a
	Ângulo com amplitude fixa	8b
	Distância, comprimento ou perímetro	8c
	Área	8d
	Inclinação	8e
	Lista	8f
	Relação	8g
	Inspetor de funções	8h
	Reflexão em relação a uma reta	9a
	Reflexão em relação a um ponto	9b
	Inversão	9c
	Rotação em torno de um ponto	9d
	Translação por um vetor	9e
	Homotetia	9f
	Controle de deslizante	10a
	Texto	10b
	Inserir imagem	10c

	Botão	10d
	Caixa para exibir/ esconder objeto	10e
	Campo de entrada	10f
	Mover janela de visualização	11a
	Ampliar	11b
	Reduzir	11c
	Exibir/ esconder objeto	11d
	Exibir/ esconder rótulo	11e
	Copiar estilo visual	11f
	Apagar	11g

Fonte: Próprio autor.

O produto educacional a que se refere esse trabalho visa analisar acontecimento histórico de uma ação realizada pelo grego Arquimedes, por volta 212 a.C., conhecida na literatura como “O raio da morte de Arquimedes”. Pretendemos através deste tema, desenvolver o conceito de formação de imagem em espelhos planos, esféricos e parabólicos, além desenvolver no discente o pensamento crítico sobre narrações que podem ser fatos ou mitológicos e para determinar entre uma ou outra, só existe um caminho, apresentar evidências científicas plausíveis do conceito estudado.

A ideia do nosso trabalho é utilizar o recurso computacional flexível e de fácil acesso, como o Geogebra, para apresentar as evidências científicas sobre a narração citada no parágrafo anterior em que o aluno saiba diferenciar um fato de uma lenda na história das ciências.

CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA DA PESQUISA E APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo apresentaremos a metodologia da pesquisa e os detalhes da aplicação, destacando o local, o público-alvo, as atividades e os questionários explorados na sequência. O Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) solicita que o produto seja aplicado e avaliado em sala de aula, desta forma o mestrando (criador do produto) pode analisar e indicar adequação para outros professores aplicarem no futuro.

4.1 O método da pesquisa científica.

Uma dissertação de mestrado é uma pesquisa científica, isto é, abordamos um problema e buscamos informações sobre ele, em seguida organizamos essas informações, fazemos uma análise delas, e para finalizar verificamos se os resultados dessas análises são compatíveis com a solução do problema.

A pesquisa científica é distinta dos outros conhecimentos, pois da elaboração do problema a produção de resultados, devemos passar por fases como apontam PRODANOV e FREITAS (2013, p 48),

A pesquisa, como atividade científica completa, é mais do que isso, pois percorre, desde a formulação do problema até a apresentação dos resultados, a seguinte sequência de fases:

- a) preparação da pesquisa: seleção, definição e delimitação do tópico ou problema a ser investigado; planejamento de aspectos logísticos para a realização da pesquisa; formulação de hipóteses e construção de variáveis;
- b) trabalho de campo (coleta de dados);
- c) processamento dos dados (sistematização e classificação dos dados);
- d) análise e interpretação dos dados;
- e) elaboração do relatório da pesquisa.

Neste processo é importante que a coleta das informações e análise delas, seguem um modelo organizado e que possa ser refeita por outra pessoa, isto é, se outro indivíduo partir do mesmo problema e usar métodos iguais, espera-se que encontre informações e resultados similares ou reavaliar os resultados da primeira pessoa, ou ainda utilizar as informações da primeira pesquisa para buscar soluções ainda mais avançadas do problema.

Essas cadeias de referências entre os trabalhos desenvolvidos são importantes para a evolução e aprimoramento dos conhecimentos da ciência, como apontam KNEUBIL e PIETROCOLA (2017, p. 3) “é essencial que haja uma análise do processo inteiro e não apenas do produto final, pois os resultados tirados dessa análise deverão ser incorporados na própria metodologia visando seu aprimoramento”.

4.2 A abordagem da pesquisa

O produto educacional deste trabalho pretende abordar os conceitos de óptica geométrica, instigados pela análise de um acontecimento da História da Física e usaremos ferramentas tecnológicas como laboratório experimental.

Atrelando conceito, história e tecnologia, buscamos propor uma sequência pautada no espírito da ciência, isto é, dando importância não somente para o desenvolvimento do conteúdo mais extrair do aluno um pensamento crítico e experimental, como indica Forato et al. (2011, p.32),

Conhecer sobre as ciências e não apenas os conteúdos científicos, mas também alguns de seus pressupostos e limites de validade, permite criticar o dogmatismo geralmente presente no ensino de ciências, além de promover o pensamento reflexivo e crítico.

Para uma análise mais ampla sobre os dados e resultados extraídos desta pesquisa devido ao formato da sequência didática, adotaremos como abordagem de investigação um modelo qualiquantitativo, ou seja, usaremos o método de pesquisa qualitativo e quantitativo.

Optamos por essa abordagem acreditando que o modelo de avaliação do produto tem questões fechadas, mas a maioria são questões abertas e somente a manipulação estatística das variáveis não seriam suficientes para o objetivo final da pesquisa.

4.3 O formato da sequência

A sequência didática do produto educacional foi construída pensando em instigar ao máximo o aluno, colocando-o como investigador dos fatos e conceitos abordados nas aulas, desta forma acreditamos que a unidade de ensino ficaria mais atrativa, produziria uma aprendizagem significativa, potencializando a unidade de ensino.

A unidade de ensino foi construída para ser aplicada em um mês e meio (entre 12 a 20 aulas de 50 minutos, dependendo da opção de aplicação e do sistema de ensino adotado na instituição educacional).

O desenvolvimento das atividades da unidade de ensino foi diversificado em vídeos, *software Geogebra classic 5* e aulas expositivas. A aplicação da sequência foi realizada em 19 aulas de 50 minutos, e devido aos problemas pandêmicos referentes a COVID 19, adotou-se o sistema de ensino híbrido. Detalharemos no próximo tópico as características e aplicação da sequência.

4.4 Aplicação e composição do produto

O produto educacional foi aplicado para uma turma de 20 alunos do segundo ano do Ensino Médio, a sequência didática foi desenvolvida no colégio particular onde leciono chamado Objetivo Plenitude, localizado na região de Guarulhos, São Paulo.

A instituição de ensino fica situada em uma região nobre de Guarulhos, a maioria dos estudantes são de classe média e a comunidade escolar tem como principal objetivo a aprovação dos estudantes em vestibular.

Tendo em vista essa situação, das quatro aulas semanais que tinha com os alunos, foi liberado pela equipe gestora do colégio, a utilização de uma aula para o desenvolvimento do produto, desta forma a aplicação do trabalho ficou estendida entre os meses de abril a junho de 2021.

A sequência didática ficou caracterizada ou composta pela utilização dos seguintes materiais didáticos:

- Seis questionários e mais uma questão para casa, distribuídos em sete formulários Google;
- Quatro vídeos produzidos pelo próprio autor, dois destinados aos estudantes e dois de orientação para o professor;
- *Software Geogebra Classic 5* para construção dos simuladores pelo professor e manipulação da ferramenta já construída pelo aluno;
- Materiais convencionados da sala de aula como apostila do aluno, lousa, computadores, celulares, projetor, entre outros.

Como já mencionado anteriormente, aplicação do produto foi em formato de aula com duração de 50 minutos cada, das quais especificaremos o andamento de cada uma no tópico seguinte.

4.4.1 O desenvolvimento do produto nas aulas

A maioria das aulas foram realizadas em formato híbrido, isto é, parte da turma em sala e os demais estudantes acompanhando em tempo real por videoconferência de casa, mas devido a problemas de contaminação pela COVID-19 na instituição, tivemos as aulas presenciais suspensas em curto período, ficando disponível somente o formato remoto de ensino.

Durante a confecção do produto sugerimos que a sala fosse dividida em grupos de estudantes, acreditando que a interação entre eles seria importante para o entendimento da proposta, porém devido aos problemas epidemiológicos não foi possível realizar aplicação neste formato. Os discentes desenvolveram os questionários individualmente, todavia discutimos de forma coletiva as soluções apresentadas nas avaliações.

Para implementação da proposta foram aplicados questionários com intuito de averiguar os conhecimentos específicos dos alunos. Esse processo nos ajudou no entendimento prévio que os discentes possuíam sobre a história da ciência.

Aula 1 - Conhecendo os subsunçores.

Na primeira aula pretendemos identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o que é história e refletir a importância dos registros para o entendimento da relação entre passado e futuro. Dentro deste contexto, buscamos diagnosticar a compreensão do aluno referente a história da física e usar os conhecimentos específicos do sujeito para motivar o estudo dos conceitos da óptica geométrica.

Nesta aula mensuramos os conhecimentos prévios dos estudantes utilizando o Questionário da aula 1 (disponível para visualização ou *download* na página 113). Essa atividade foi desenvolvida de forma virtual usando o *Google* formulário e a duração desta atividade foi de 50 minutos.

Aula 2 – Feedback da aula 1 e ampliação do conhecimento.

Os primeiros 25 minutos da aula 2 foram destinados para a discussão das soluções mais comuns do questionário 1, realizando reflexões sobre o que poderia estar certo e o que poderia estar errado nas repostas dadas por eles.

Nos 10 minutos seguintes foi realizada uma exposição pelo professor sobre as origens da terminologia e significados das palavras história e estória, abrindo uma nova discussão sobre o que é um fato e um mito na história da ciência.

Para os próximos 5 minutos apresentamos o Vídeo 1 (disponível na página 115), com objetivo de apresentar algumas narrativas da história da física com fundamentações controversas.

Nos minutos finais desta aula foi sugerido para casa o Questionário da aula 2 (disponível para visualização ou *download* na página 113). A atividade foi desenvolvida de forma virtual usando o *Google* formulário.

Aula 3 – Apresentação do tema.

Começamos a aula fazendo um desdobramento da atividade proposta na aula anterior (como diferenciar um fato de um mito na Física?), debatendo sobre as respostas dadas na questão, essa reflexão durou cerca de 20 minutos.

E dando continuidade na mesma linha de raciocínio exibimos nos 5 minutos seguintes o Vídeo 2 (disponível na página 115), com intuito de estimular a curiosidade de uma narrativa específica da História da Física.

O objeto avaliativo desta aula foi o Questionário da aula 3 (veja na página 113). Os alunos começaram a responder às questões durante a aula, mas concluíram os exercícios em casa.

Aula 4 à 14 – Desenvolvendo o objeto de conhecimento.

Nessa etapa abordamos os conceitos fundamentais da óptica geométrica descritas no Capítulo 2. Como cada instituição possui o seu material didático, não propusemos atividades específicas destes conceitos, cabendo ao professor aplicador do produto educacional, avaliar os temas abordados com os instrumentos de ensino utilizados no cotidiano da escola.

Sabemos que o tópico 2.7 Espelhos parabólicos (página 48) não é tradicionalmente abordado no Ensino Médio, logo, o aplicador pôde utilizar esse tópico para o estudo dos espelhos parabólicos ou utilizar material similar.

Para o desenvolvimento dos conceitos do produto, seguimos a descrição da Tabela 2: Aulas e conceitos (construída na página 102), utilizando como instrumento avaliativo os exercícios propostos na apostila do sistema de ensino Objetivo.

Aula 15 – Aplicando os conceitos teóricos.

Essa aula visa mensurar o poder de investigação científica dos discentes, aplicando os conceitos teóricos apresentados entre as aulas 4 e 14, e relacionando-os à narrativa histórica desenvolvida na aula 3.

Enfatizamos ao aluno, que ele deveria usar argumentos científicos, isto é, durante a resolução do exercício proposto deve citar as propriedades estudadas da óptica geométrica.

Aplicamos como ferramenta para fomentar a reflexão o Questionário da aula 15 (página 114). Essa atividade foi desenvolvida de forma remota e teve uma duração de 50 minutos.

Aula 16 – Explorando o espelho côncavo com auxílio do simulador.

Os 20 primeiros minutos desta aula apresentando o *software* de geometria dinâmica chamado de Geogebra Classic 5* versão para computador, mostramos o funcionamento de comandos fundamentais para o desenvolvimento das atividades que seriam propostas. Os alunos baixaram a versão para smartphone** e acompanharam as instruções pelo aparelho.

Depois que os estudantes compreenderam as instruções, disponibilizamos o *link* do Simulador do espelho côncavo (disponível na página 116) que foi construído previamente pelo aplicador usando os passos descritos no : Vídeo 3 (página 116). A utilização do programa pretende conciliar a teoria com a prática.

* Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Acesso em: 12 de agosto de 2021

** Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.geometry>. Acesso em: 12 de agosto de 2021.

Nos 30 minutos finais da aula foi proposto aos estudantes que utilizassem o simulador para resolverem o Questionário da aula 16 (página 114), mas alguns alunos tiveram dificuldade com a atividade, necessitando de um tempo maior para a sua conclusão, finalizando a resolução em casa.

Aula 17 – Explorando o espelho parabólico com auxílio do simulador.

O desenvolvimento desta aula foi análogo ao da aula 16, nos 10 primeiros minutos apresentamos as funcionalidades e o significado de cada traçado do Simulador do espelho parabólico (página 117). Lembrando que o objeto de ensino pode ser construído pelo aplicador seguindo os passos do Vídeo 4 (página 116), acreditamos que a produção passo a passo do programa representaria um melhor entendimento das propriedades do espelho parabólico.

Os 40 minutos finais foram destinadas para responder o Questionário da aula 17 (página 114) utilizando a manipulação do simulador do espelho parabólico. Assim como na aula anterior essa aula visa entrelaçar os conceitos teóricos com a prática.

Aula 18 – A conclusão do discente.

Os primeiros 30 minutos da presente aula foi dedicada a uma breve reflexão dos assuntos abordados até o momento, dando ênfase as propriedades dos espelhos planos, côncavos e parabólicos.

Nos 10 minutos seguintes apresentamos o Questionário da aula 18 (página 115), de modo esclarecer os objetivos das questões que compõem esse questionário, realizamos a leitura de cada questão coletivamente e no término da aula foi proposto que desenvolvessem essa atividade em casa, podendo inclusive realizar pesquisas para servir como base da argumentação do terceiro exercício questionário. Salientei a importância da credibilidade da fonte consultada e a necessidade de ser referenciada seguindo os padrões da ABNT.

Aula 19 – Debate final.

Na última aula dispusemos a sala em formato de “U” para criação de um debate em que todos os membros pudessem interagir. Apresentei os dados estatísticos do questionário 6 e usamos o conceito de sala de aula invertida, solicitando que o aluno

apresentasse a sua pesquisa e o seu ponto de vista sobre as atividades desenvolvidas na aula anterior.

Acreditamos que os debates são importantes sobre o olhar da pedagogia, pois colocar o aluno em uma situação que precisa defender uma ideia, propícia, desenvolvimento de competências e habilidades argumentativas. Segundo VIEIRA e BAZZO (2007, p.7):

O debate é uma estratégia de ensino que possibilita a exposição de pontos de vista diferentes sobre uma mesma questão e que pode contribuir para desenvolver o poder de argumentação dos alunos. Por se tratar de uma atividade em que os alunos assumem papéis distintos e posicionamentos contrários acerca de determinada questão, sem que, necessariamente, concordem com o que estão defendendo [...].

Nesse ambiente, tivemos conflitos de ideias relativas ao acontecimento ou não do feito de Arquimedes, em alguns momentos desviando-se dos objetivos da atividade, cabendo ao aplicador, mediar a discussão direcionada em conceitos, criando um debate de forma racional, com construções lógicas e desta forma aplicando o método científico. No final da aula os estudantes relataram como foi participar da aplicação deste produto educacional, considerando-os a experiência muito positiva, em especial a manipulação do experimento que usamos durante o desenvolvimento do trabalho.

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Segundo o regimento do MNPEF, é indispensável nas dissertações do curso, apresentarmos a análise dos resultados obtidos com aplicação do produto, sendo necessário o relato das experiências vivenciadas em sala de aula, desta forma, cabe aos futuros aplicadores, o desenvolvimento desta atividade de forma integral, parcial ou adaptada para o seu público de ensino.

Conforme descrito anteriormente, a sequência didática do produto foi composta por questionários, vídeos e *software*, sendo aplicado para uma turma de 20 alunos do segundo ano do ensino médio. Podemos dividir a pesquisa em quatro momentos, o primeiro seria o levantamento prévio do conhecimento do estudante, o segundo avaliará o aprendizado conceitual, o terceiro momento aborda a capacidade do discente de analisar e interpretar ensaios virtuais e o quarto momento está relacionado as considerações finais dos estudantes.

Os quatro momentos foram desenvolvidos de forma gradual e neste capítulo procuraremos apresentar a evolução da produção científica dos estudantes quando passaram de um momento para outro.

5.1 Momento 1: O conhecimento prévio

O primeiro momento visa realizar um levantamento prévio do conhecimento do estudante sobre o conceito da História da Física, para realizar essa análise aplicamos como atividade diagnóstica o Questionário da aula 1 (página 113) que contém três questões dissertativas, e nomearemos os exercícios por E_1 , E_2 e E_3 . Dos 20 alunos da turma 19 entregaram o questionário 1 e classificamos os argumentos produzidos em cada questão por:

- Conhecimento satisfatório – o aluno apresentou uma boa linha de raciocínio e com embasamento científico;
- Conhecimento parcial – o discente descreveu em sua resolução uma mescla de conhecimento científico e senso comum;

- Desconhece - o estudante não fez uso adequado do conhecimento científico necessário para responder à questão;
- Plágio – Recorreu à fundamentação de terceiro sem referenciá-los e não apresentou argumentação própria em nenhuma parte da solução.

5.1.1 Questionário 1 - E_1

A pergunta levantada em E_1 (exercício 1) foi: “O que é História?”, adotando a classificação de resposta citada anteriormente e analisando as soluções chegamos na representação gráfica expressa na Figura 30.

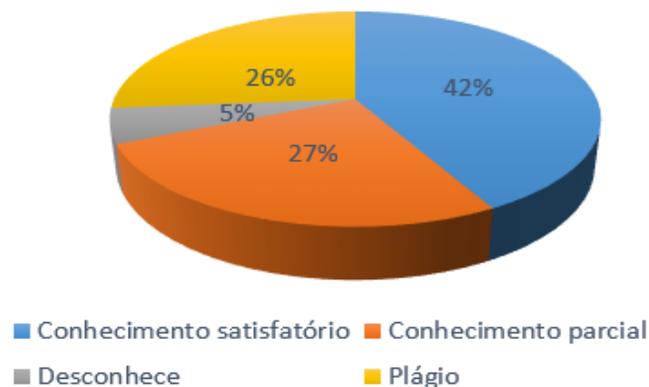


Figura 30: Questionário exercício 1 - O que é História?

Para exemplificar a divisão disposta no gráfico, apresentaremos como modelo uma resposta de cada uma das classificações. Manteremos o sigilo dos discentes, identificando os alunos somente pela primeira letra do nome e do sobrenome do estudante.

- Conhecimento satisfatório – argumentação do aluno JB:
 “História é o acúmulo de conhecimentos adquiridos temporalmente, sejam eles da atualidade ou do passado, os quais utilizamos para entender o porquê de determinados acontecimentos hoje. Esses conhecimentos que juntos formam o que chamamos de História, podem ser adquiridos através de livros, na escola, experiência pessoal ou de outras pessoas”.
- Conhecimento parcial – aluno YM:
 “É chamado de história o conhecimento que estuda as ocorrências do passado”.
- Desconhece – aluno JP:
 “História é algo que estuda o passado, um fato contado, fictício ou não”.

- Plágio – O aluno EB retirou a resolução da questão do site significado.com.br^{*}, não usou em nenhum momento argumento próprio:

“O termo “história” é originado do vocábulo grego *historie*, que tem como conceito a ideia de investigação, ou seja, do entendimento vindo por meio da pesquisa. A história é uma ciência que investiga o passado da humanidade e o seu processo de evolução, tendo como referência um lugar, uma época, um novo ou um indivíduo específico. Através do estudo histórico, obtém-se um conjunto de informações sobre processos e fatos ocorridos no passado que contribuem para a compreensão do presente”.

Analisando podemos observar que quase a metade (42%) dos discentes possui conhecimento prévio do significado do que é História, mas o que nos chamou atenção foi a quantidade de alunos que apresentaram soluções de terceiros, isto é, retiradas em sua grande maioria da *internet*, os plágios, lembrando que aplicação da atividade foi realizada de forma remota, apresentando desta forma a falta de autonomia do estudante ou desconhecimento das normas técnicas da ABNT.

5.1.2 Questionário 1 - E₂

O exercício 2 (Qual a importância da História para a formação da sociedade?) visa analisar a compreensão dos alunos com relação à necessidade do estudo de História para a sociedade e o quanto o passado, presente e futuro estão interligados dentro desta área de conhecimento. Analisando as respostas dadas pelos estudantes e usando a classificação de dados anterior, esboçaremos o gráfico apresentado na Figura 31.

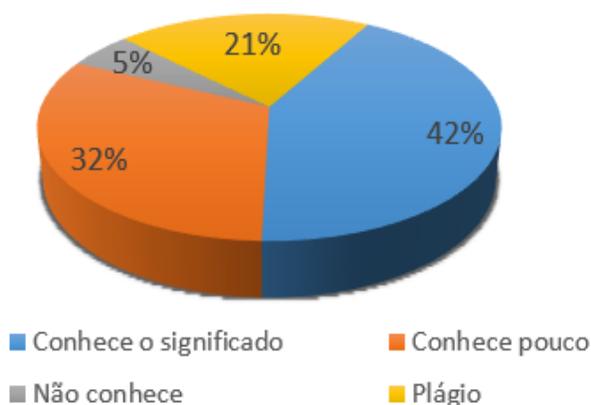


Figura 31: Qual a importância da História para a formação da sociedade?

^{*}Disponível em: <https://www.significados.com.br/historia/#:~:text=Hist%C3%B3ria%20>. Acesso em: 20 de agosto de 2021.

Podemos notar que os discentes têm uma boa compreensão do conceito de História, pois 42% dos estudantes apresentaram conhecimento significativo. Utilizaremos como exemplo o aluno JB, que diz:

“A história nos dá a base para construirmos sentido, isto é, para conseguirmos entender como as coisas que se passam no mundo atual têm conexão com os fatos passados, ela também fornece elementos para ação na vida prática. Elementos como a compreensão da sociedade e da cultura, perspectiva crítica sobre fenômenos políticos, entendimento das diferenças entre as pessoas, os países e as civilizações, e entre muitos outros. Por exemplo, a xenofobia e o racismo que, infelizmente, estão muito presentes na nossa sociedade, geralmente existem por falta de conhecimento histórico ou por um mal conhecimento da história”.

Mas infelizmente também nesse exercício podemos observar uma quantidade razoável de plágios, podemos destacar o que escreveu o aluno GC (retirado parcialmente do site Refletindo a História*):

“O ensino de história nos faz conhecer uma realidade que nos permite reproduzir transformações pelas quais a sociedade está se passando. A formação social é fundamentada na história de cada povo o tempo histórico passado e presente são essenciais para compreender a formação estrutural de cada civilização”.

Acreditamos que as resoluções plagiadas tenham chegado a esses números devido à aplicação do produto educacional ter sido realizada de forma remota e não existiu uma orientação prévia sobre o assunto, já que os três exercícios do questionário foram aplicados simultaneamente.

5.1.3 Questionário 1 - E_3

O exercício preza por analisar o quanto o estudante conhece da História da Física e os personagens inseridos nela. Para a reflexão do assunto elaboramos o E_3 com a seguinte indagação “Você conhece alguma história que envolva algum físico ou conceito físico? O que mais chamou atenção nesta história?”.

* Disponível em <http://professorjairohistoria.blogspot.com/2014/01/a-importancia-da-historia-para-sociedade.html>. Acesso em: 20 de agosto de 2021.

Analisando as soluções e classificando os dados chegamos ao gráfico representado na Figura 32.

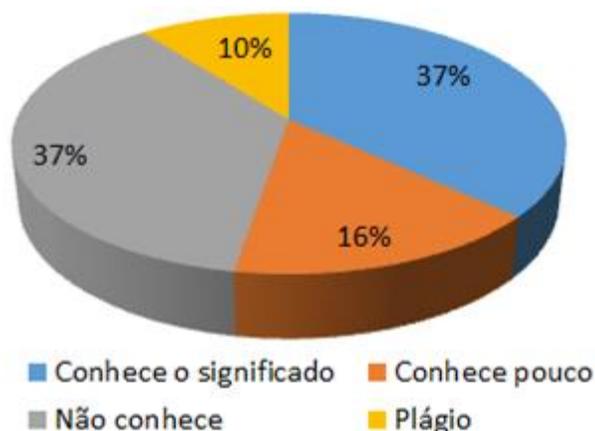


Figura 32: Você conhece alguma história que envolva algum físico ou conceito físico? O que mais chamou atenção nesta história?

Notamos que a turma foi dividida em alunos que conhece a história de algum físico e aqueles que alegam que não conhecem (37% para cada) e o número de questões plagiadas caíram pela metade com relação ao questionário anterior. Dos estudantes que apresentaram alguma narrativa sobre a História da Física, destacamos a do aluno ME:

“Conheço a história de Benjamin Franklin, onde ao empinar uma pipa em meio a uma tempestade de raios, resolveu fazer um experimento, usou um fio de metal para empinar uma pipa de papel. Este fio estava preso a uma chave, também de metal, Franklin a soltou e observou que a carga elétrica dos raios descia pelo dispositivo. A experiência comprovou que o raio é uma corrente elétrica de grandes proporções, desenvolvendo assim o para-raios. O mais interessante desta história foi a ideia em si, onde amarrar uma chave numa pipa e empiná-la poderia ser um experimento de sucesso”.

Os físicos mais citados entre os pesquisadores foram Isaac Newton, Albert Einstein, Galileu Galilei e Marie Curie. Acreditamos que Newton tenha sido o personagem mais citado, pois seja o mais acessível a eles, já que o público para quem foi direcionada a atividade é uma turma de segundo ano do Ensino Médio. Já o Albert Einstein foi consideravelmente apontado pelos estudantes devido à divulgação midiática dos seus trabalhos.

Podemos observar também a falta de conhecimento do aluno sobre personagem da física moderna, o que mostra a pouca divulgação desta matéria no ensino básico. Veja no gráfico (Figura 33) os quatro físicos mais citados pelos discentes.

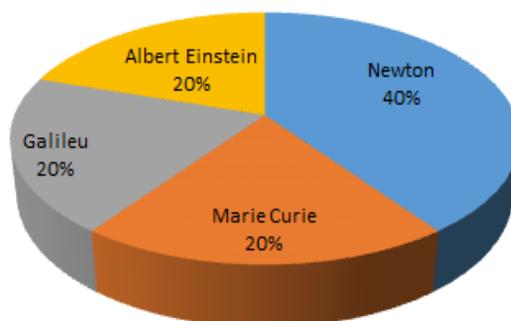


Figura 33: Os físicos mais citados pelos alunos.

5.1.4 Questão extra.

Dando continuidade sobre os levantamentos prévios do público-alvo, elaboramos um vídeo (100) e o apresentamos para os estudantes, tendo como finalidade promover a reflexão sobre fatos e mitos em torno da História da Física. Para ponderar sobre o tema convidamos os discentes a responder a seguinte questão: “Como diferenciar um fato de um mito na Física?”.

Não identificamos questões plagiadas da *web* nas soluções promovidas pelos discentes e fazendo uso novamente da classificação de dados em que o aluno: conhece o significado, conhece pouco e não conhece, chegaremos no gráfico representado na Figura 34.

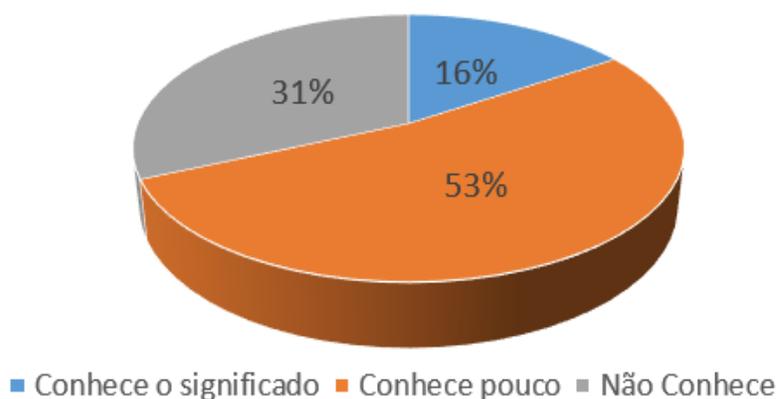


Figura 34: Como diferenciar um fato de um mito na Física?

Analisando os resultados podemos observar que mais de 50% (exatamente 53%) foram classificados como conhece pouco sobre a questão discutida na atividade ou

deram respostas confusas, contemplando parcialmente o objetivo da atividade, nesse requisito, podemos destacar o que foi escrito pelo aluno GM:

“Um mito é algo que recebemos informação sem saber se são verdadeiras ou não, já um fato são informações e suas comprovações, por exemplo: o sol é amarelo (sendo um fato) o sol já foi roxo (um mito)”.

Identificamos nos dados coletados que o número de alunos que conseguiram apresentar uma argumentação interessante (conhece o significado) foram apenas de 16%, podemos apontar dentro desta modalidade o estudante EB:

“Primeiramente nós temos que entender o que é fato e mito. De uma forma mais resumida, o fato são coisas que foram provadas/comprovadas, na realidade e natureza na qual estamos inseridos, já o mito, são superstições que foram criadas para explicar os fatos da natureza, mas de uma forma ilógica. A palavra história por exemplo, seria utilizada para a história enquanto ciência e para narrativas de acontecimentos reais, já a palavra “estória”, faz referência a narrativas ficcionais. A física está no nosso dia a dia, por isso é muito importante o estudo dela, sempre temos uma descoberta nova, algumas teorias que só foram comprovadas depois de anos, que foi o caso de algumas descobertas de Albert Einstein. A verdade é que nem sempre podemos diferenciar o fato de um mito na física, pois estamos descobrindo algo novo o tempo todo, e muitas coisas ainda são um mistério, mas a melhor forma de sabermos e entendermos alguns fatos na física, é a partir dos estudos, pesquisas e ensaios, pois como eu disse antes, a física está inserida no nosso cotidiano, desde uma forma mais específica, até de uma forma mais sutil, e é muito importante para nós. Não podemos esquecer o fato da ciência e a tecnologia serem grandes amigas da física, ou podemos dizer que a física é uma grande amiga dessas duas? Sinceramente, eu não tenho argumentos para isso, mas posso dizer que uma ajuda a outra. A verdade é que precisamos estudar os conceitos já existentes, e estarmos preparados para novas descobertas também, a fins de evoluirmos”.

5.1.5 Questionário 2 - E_1 .

Ainda fazendo levantamento do conhecimento do discente, a respeito do que é científico ou senso comum nas histórias relatadas nos materiais didáticos, propusemos novamente a exibição de um vídeo (página 101), tratando de alguns feitos do matemático, físico e engenheiro grego conhecido como Arquimedes, e tomamos como objeto de estudo um dos contos que ficou conhecido como “O Raio Da Morte de Arquimedes”.

Após a exibição do filme, aplicamos o questionário 2, composto de duas questões (E_1 e E_2), o primeiro exercício apresenta a seguinte questão “Qual é a sua opinião sobre a narrativa referente ao espelho da morte de Arquimedes, verdadeiro ou falso? Justifique a sua resposta”.

Classificamos os dados coletados do E_1 em verdadeiro, falso ou que não souberam responder, podemos representar a pesquisa realizada com os estudantes pelo gráfico da Figura 35.

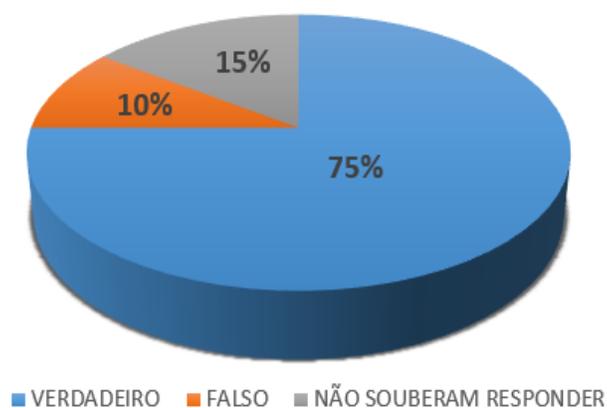


Figura 35: Qual é a sua opinião sobre a narrativa referente ao espelho da morte de Arquimedes, verdadeiro ou falso? Justifique a sua resposta.

Vamos destacar algumas repostas apresentadas pelos alunos, entre os estudantes que consideram a narração verdadeira, podemos indicar o que foi escrito pelo discente YI:

“Na minha opinião esse fato é verdadeiro pois o Arquimedes criou o raio da morte utilizando um espelho côncavo para concentrar os raios solares nas embarcações e esse espelho é capaz de refletir sim os raios de luz fazendo possível concentrar os raios nas embarcações para elas queimarem”.

Já os alunos que acreditam que o evento não aconteceu, isto é, a narrativa é apenas um mito, apresentaremos o que discorreu o estudante JI:

“Eu acho que é falso, pois acredito que para queimar navios por meio de raios solares concentrados por um espelho levaria muito tempo e as invasões aconteceriam de qualquer forma, além de que os marinheiros seriam capazes de acabar rapidamente com pequenos focos de incêndio”.

Podemos observar que as justificativas dadas pelos estudantes são pobres, conceitualmente, existem poucas teorias físicas em suas argumentações, a óptica geométrica é praticamente não mencionada na maioria das resoluções.

5.1.6 Questionário 2 - E_2 .

O segundo exercício (E_2) é um complemento do primeiro exercício do mesmo questionário, visamos nesta questão discutir se por hipótese a História do espelho da morte de Arquimedes é verdadeiro, qual seria as dificuldades enfrentadas por ele para execução deste possível fato.

Visando esse objetivo elaboramos e aplicamos a seguinte questão: “Considerando a História verdadeira, quais seriam as dificuldades enfrentadas para conclusão deste fato?”. Separamos as respostas em duas classificações: argumento científico e não científico.

Consideramos argumentação científica as soluções que têm na redação fundamentações científicas, isto é, mencionar teorias e propriedades comprovadas na literatura e quando a solução não fizer uso dessas premissas será considerada não científica. Analisando as respostas dos estudantes podemos representá-las pelo gráfico expresso na Figura 36.

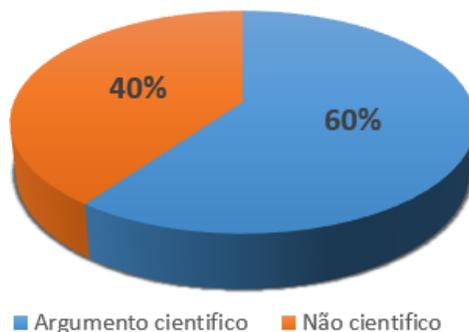


Figura 36: Considerando a História verdadeira, quais seriam as dificuldades enfrentadas para conclusão deste fato?

Diante dos resultados obtidos podemos observar que a maioria dos estudantes desenvolveram o exercício recorrendo de algum elemento científico dentro da sua redação, conforme podemos observar na descrição do aluno JB:

“Para concluir esse fato, levaria um tempo muito grande, já que a embarcação é grande e o processo para incendiá-la seria demorado demais, teria que calcular com precisam os ângulos dos raios incidentes, foco, objeto e imagem, o que é extremamente difícil já que se trata de uma embarcação em movimento e que ele provavelmente não sabe exatamente a distância que está posicionada em relação ao espelho nem o Sol”.

Já 40% dos pesquisados propuseram soluções sem nexos científicos e descreveram as respostas de forma confusa, o que podemos evidenciar na descrição promovida pelo estudante JP:

“O sol não tem capacidade de queimar o navio sem queimar o espelho e sem ferir quem estava perto. Tinha que ter muito sol para os navios serem queimados”.

Na descrição do aluno JP podemos observar que dificilmente os raios solares conseguiriam queimar o espelho, poderia no máximo derretê-lo e com relação ao trecho “tinha que ter muito sol” a frase seria uma referência a quantidade de Sóis ou um nível elevado de temperatura? Ainda existem problemas claros de concordâncias verbais e gramaticais na sua descrição.

5.2 Momento 2 – Aprendizagem conceitual.

Depois da sondagem sobre o conhecimento dos estudantes, realizamos um levantamento dos conceitos necessários para analisar a nossa situação-problema que é verificar a veracidade da ação descrita em alguns livros didáticos, inclusive no material da escola onde foi aplicado o produto, alegando que Arquimedes teria incendiado navios romanos usando espelhos.

Os conceitos básicos relacionado a óptica geométrica que precisaríamos estudar para desenvolver a problematização seriam os descritos na Tabela 2 (página 102), distribuídos em 10 aulas de 50 minutos cada. Para essas aulas foi utilizado o material da escola, apostilas do Sistema Objetivo De Ensino, e o artigo do professor Eduardo Wagner

do Instituto de Matemática Pura Aplicada (IMPA), cujo título é: Por que as antenas são parabólicas? Depois do desdobramento dos materiais citados acima, aplicamos a avaliação descrita no próximo tópico.

5.2.1 Momento 2 – Questionário 3.

Para avaliar a evolução conceitual dos estudantes construímos e aplicamos o questionário 3, que tem como motivação a seguinte pergunta: “Dos espelhos que você estudou (côncavo, convexo, plano ou parabólico), na sua opinião, qual seria o espelho ideal para os objetivos de Arquimedes? Justifique o seu argumento usando as propriedades do espelho escolhido”.

Subdividimos a análise dos dados da questão em duas partes. A primeira destacaremos a opção do aluno entre os espelhos: côncavo, convexo, plano e parabólico, e obtivemos o gráfico disponível na Figura 37. Podemos observar que a opção mais votada foi a do espelho côncavo e segundo lugar o espelho parabólico.

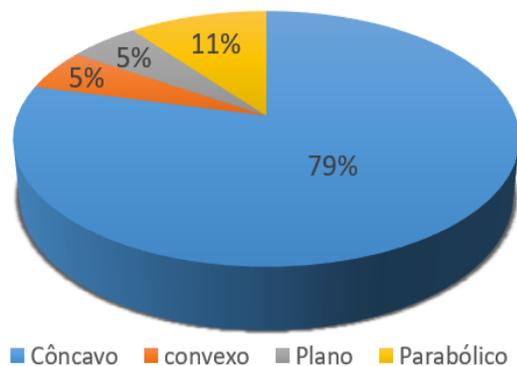


Figura 37: Qual seria o espelho ideal para os objetivos de Arquimedes?

A segunda parte da análise de dados está relacionado a justificativa do aluno sobre a escolha do espelho, a intenção é verificar o quanto o estudante se apropriou dentro da sua resolução dos conceitos e propriedades expostas durante as aulas. Para mensurar a evolução conceitual separamos as resoluções dos discentes em:

- Coerente – o aluno usou perfeitamente argumentos físicos na argumentação;
- Não coerente – o estudante não citou nenhuma propriedade ou não fez uma descrição coerente da sua justificativa;

- Plágio – a sua argumentação foi retirada parcial ou totalmente de fontes de terceiro e sem citação.

Considerando a classificação descrita acima e as justificativas efetuadas pelos alunos podemos esboçar o gráfico representado na Figura 38.

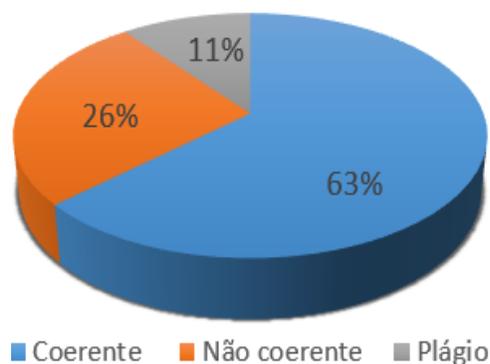


Figura 38: Justificativa do modelo de espelho.

Comparando o gráfico deste tópico (Figura 38) com o da Figura 36 (página 77), podemos notar evolução conceitual dos estudantes, utilizando como modelo o que foi descrito JB:

“Para concluir esse fato, levaria um tempo muito grande, já que a embarcação é grande e o processo para incendiá-la seria demorado demais, teria que calcular com precisão os ângulos dos raios incidentes, para refletir no foco e sem falar do processo calórico para combustão do material, o que é extremamente difícil já que se trata de uma embarcação em movimento e que ele provavelmente não sabe exatamente a distância que está posicionada em relação ao espelho nem o Sol”.

Ainda existe uma minoria (26%) que não desenvolvem argumentos plausíveis no que foi trabalhado durante as exposições das aulas, no próximo tópico faremos experimentos virtuais visando melhorar o entendimento dos conceitos.

5.3 Momento 3 – Ensaio Virtuais.

Neste tópico iremos analisar os resultados obtidos pelos alunos ao observar e manipular um experimento, afinal as teorias precisam ser testadas, a construção do método científico depende muito deste casamento, entre a parte teórica e a prática, a aprendizagem para ser significativa precisa ser compreendida, o estudante

necessita ter os conceitos ancorados a sua vivência e como mencionou Freire (1997), “*para compreender a teoria é preciso experimentá-la*”.

A Base Nacional Curricular Comum menciona a importância da experimentação e da investigação para o ensino de Ciências, conforme com o documento:

Os processos e práticas de investigação merecem também destaque especial nessa área. Portanto, a dimensão investigativa das Ciências da Natureza deve ser enfatizada no Ensino Médio, aproximando os estudantes dos procedimentos e instrumentos de investigação, tais como: identificar problemas, formular questões, identificar informações ou variáveis relevantes, propor e testar hipóteses, elaborar argumentos e explicações, escolher e utilizar instrumentos de medida, planejar e realizar atividades experimentais e pesquisas de campo, relatar, avaliar e comunicar conclusões e desenvolver ações de intervenção, a partir da análise de dados e informações sobre as temáticas da área (BNCC, 2018, p.550).

Nesse sentido, as orientações sugerem a implementação dos ensaios experimentais incorporados no plano de ensino dos professores que lecionam as disciplinas vinculadas a área de Ciência da Natureza e suas tecnologias.

5.3.1 Momento 3 – Questionário 4 - E_1 .

O questionário 4 visa analisar com o auxílio de um simulado (página 116, Figura 60) as propriedades do espelho côncavo, em especial as relações entre o raio de incidência, raio refletido e ângulo de abertura do sistema óptico. A expectativa era que ao manipular o espelho virtualmente, o estudante pudesse compreender e vincular com mais naturalidade os conceitos teóricos com os observados no *software*, produzindo desta forma uma aprendizagem significativa.

O primeiro exercício deste questionário (E_1) tem como norte a seguinte reflexão: “Com o auxílio do simulador, o que você observa com relação aos raios refletidos, quando fixamos $\alpha = 0^\circ$ e movimentamos o ponto C?”.

O objetivo desta questão é que o aluno observe que os raios tendem a se concentrar no foco, quando incidem paralelos ao eixo principal do espelho e essa convergência vai ficando cada vez mais precisa, conforme o espelho côncavo tende a um espelho plano, conforme as condições de nitidez de Gauss.

Separamos as soluções dos alunos em três categorias: dizemos que a solução foi coerente quando o aluno contemplou o que foi descrito no parágrafo anterior, a resolução será considerada parcialmente quando a resposta descrita apresentou parte do que foi

pautado no parágrafo anterior e será classificada em não coerente quando diverge totalmente do objetivo da atividade. Considerando essa divisão de dados e analisando as argumentações dos discentes, podemos representar a pesquisa com o gráfico apresentado na Figura 39.

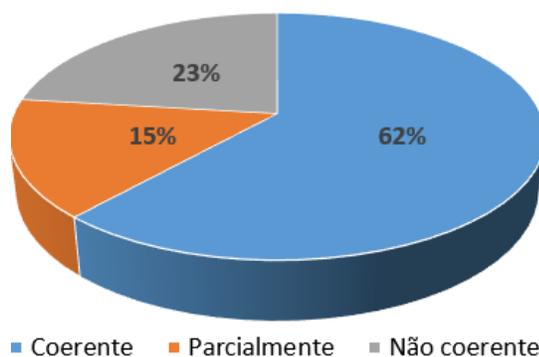


Figura 39: Com o auxílio do simulador, o que você observa com relação aos raios refletidos, quando fixamos $\alpha = 0^\circ$ e movimentamos o ponto C?

Podemos observar que 62% fizeram uma descrição coerente com o esperado no exercício, atrelando muito bem as aulas teóricas com a observação feita no ensaio virtual, para exemplificar veja o que foi descrito pelo estudante JB:

“Ao fixarmos $\alpha = 0^\circ$ e movimentarmos o ponto C, é possível perceber que o ângulo de reflexão é alterado de acordo com os movimentos desenvolvidos por esse ponto, diminuindo o tamanho do espelho e conforme trocamos ele (ponto C) de posição, os raios refletidos se aproximam um do outro ou se afastam”.

O gráfico também apresenta uma redução significativa nas soluções sem embasamento científico (23%), desta forma, podemos deduzir que a aprendizagem está fluindo, o aluno está se apropriando dos conceitos da óptica geométricas.

5.3.2 Questionário 4 - E_2 .

No segundo exercício do questionário 4 (E_2) pretendemos que o aluno reflita sobre como podemos melhorar o alcance focal de um espelho côncavo, lembrando que a nossa problemática está relacionada ao feito de Arquimedes em queimar navios usando luz solar refletidas em um espelho, tendo em vista que essas embarcações supostamente estão a uma distância considerável do sistema óptico. Com base no que foi descrito

elaboramos a seguinte questão: “De que forma podemos aumentar o alcance dos raios refletidos, isto é, quais os pontos devemos movimentar?”.

A finalidade do exercício é que o estudante perceba a relação de alcance de convergência focal entre centro de curvatura e os raios paraxiais, desta forma dividimos os resultados entre sim (percebeu a relação), não (não conseguiu identificar a relação) e os que não responderam. Assim esboçamos o gráfico conforme Figura 40.

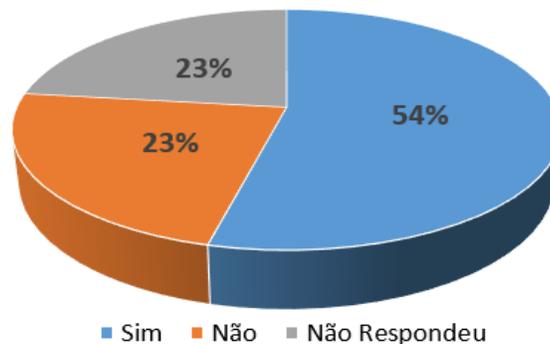


Figura 40: De que forma podemos aumentar o alcance dos raios refletidos, isto é, quais os pontos devemos movimentar?

O aluno GS fez uma boa descrição, compreendendo a finalidade da atividade, veja o que ele escreveu:

“Raios de luz paralelos que incidem sobre espelhos côncavos são refletidos sobre o ponto focal, no espelho côncavo, são os prolongamentos dos raios de luz que se cruzam em seu foco chamado de foco virtual, os pontos a serem movimentados são A e C”.

O ponto A representa o centro de curvatura e o ponto C o extremo móvel da borda superior do espelho (veja o *link* do simulador disponível na página 116, Figura 60), a movimentação de ambos produz um maior alcance de convergência focal.

5.3.3 Questionário 4 - E₃.

O terceiro exercício do questionário 4 tem caráter de resposta pessoal, isto é, a atividade pode ser interpretada de forma qualitativa, mas o aluno deverá apresentar justificativas ligados aos objetos de conhecimento, desdobradas durante a aplicação do produto educacional. A questão disparadora é: “Quais seriam as vantagens e

desvantagens da utilização deste espelho (côncavo) no suposto feito de Arquimedes?”. Observe o que foi escrito pelo aluno JS:

“Vantagem: com o espelho côncavo seria mais fácil captar e refletir os raios de luz do sol para atingir as embarcações, já que ele consegue concentrar os raios solares. desvantagem: a formação da imagem no espelho côncavo depende da posição do objeto sobre o eixo principal, ou seja, Arquimedes não poderia fazer isso a qualquer momento, teria que ser no horário em que o sol estivesse em uma posição na qual o espelho refletiria seus raios na direção das embarcações ou quase o sol deveria estar quase que paralelo ao eixo principal”.

Podemos notar elementos conceituais na redação do aluno, mencionando a importância da concentração dos raios solares e que só seria possível se o Sol realizasse uma trajetória paralela ao eixo principal do espelho, mas ainda existem estudantes que não perceberam ou não descreveram sobre importância da relação nas suas redações.

Os estudantes apontam como principais dificuldades para execução deste fato, a movimentação dos navios romanos, a distância das embarcações ao espelho côncavo e as condições climáticas ideais para obter sucesso na queima dos navios.

5.3.4 Questionário 5 - E_1

O questionário 5 será executado de forma análogo ao descrito no tópico anterior, mas desta vez colocaremos como objeto de estudo os espelhos parabólicos, isto é, queremos que aluno observe com o auxílio do simulador (página 117, Figura 61) a relação entre raios de incidência, refletido e a convergência focal.

O primeiro exercício do questionário 5 (E_1) visa analisar duas relações: a primeira seria o alcance do ponto focal do espelho com a abertura da concavidade da parábola, isto é, distanciando da reta diretriz aumentaremos a distância focal, e a segunda está relacionada ao ângulo α com os raios convergente, ou seja, os raios incidentes só convergiram se os raios incidentes são paralelos ao eixo principal do parabolóide, logo α tem que ser necessariamente igual a zero.

Para o desdobramento desta reflexão propomos o seguinte exercício: “ Com o auxílio do simulador, o que você observa quando fixamos $\alpha = 0^\circ$ e movimentamos a reta diretriz (mova pelo ponto B)? E se variarmos α , o que acontece com os raios refletidos?

Separaremos os resultados obtidos em: coerente (quando o estudante notou às duas relações descritas no penúltimo capítulo), parcialmente (quando aluno observa apenas uma das relações) e não coerente (não citou nenhuma das relações em sua solução). Considerando essa divisão de dados chegaremos no gráfico ilustrado na Figura 41.

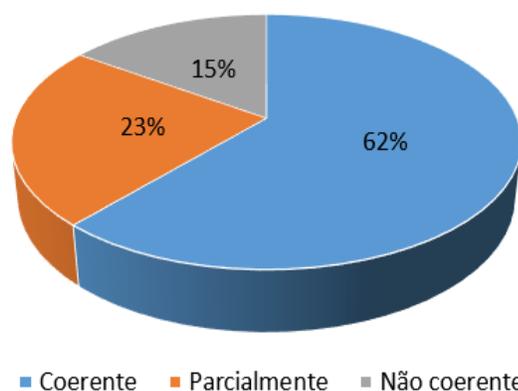


Figura 41: Com o auxílio do simulador, o que você observa quando fixamos $\alpha=0^\circ$ e movimentamos a reta diretriz (mova pelo ponto B)?

O gráfico aponta que a maioria dos discentes conseguiram observar às duas relações e como exemplo, veja o que foi descrito pelo estudante JB:

“Ao fixar $\alpha = 0^\circ$ e movimentar a reta diretriz é possível perceber que ocorre uma aproximação ou um distanciamento do espelho em relação ao observador. Variando α , os raios refletidos têm o foco alterado, convergindo ou divergindo”.

Ainda podemos observar uma melhora significativa no entendimento da questão, basta comparar com os resultados alcançados no tópico anterior (veja a Figura 40), acreditamos que o subsunçores da questão anterior (5.3.1 Momento 3 – Questionário 4 - E_1 .) foram importantes para o entendimento da manipulação do *software*, já que o aluno está tendo o segundo contato com o programa.

5.3.5 Questionário 5 - E_2

A segunda questão do questionário 5 optamos por analisá-la qualitativamente e tem como abordagem a seguinte reflexão: “Quais seriam as vantagens e desvantagens da utilização deste espelho no suposto feito de Arquimedes?”.

Temos como objetivo nesta questão a comparação relativa à precisão de convergência dos espelhos parabólicos, ou seja, se os raios incidem paralelamente ao eixo principal de espelho em formato parabolóide, os raios refletidos serão concentrados no foco, já no espelho côncavo esse fato não acontece, os raios que incidem próximos aos extremos do espelho não convergem exatamente para o foco, nessa perspectiva o espelho parabólico teria uma excelente concentração dos raios, produzindo uma boa quantidade de calor. Uma boa parte dos estudantes conseguiram notar essa propriedade, como aponta o estudante JS:

“No espelho parabólico, haveria concentração de todos os raios solares no foco (do espelho), aumentando a temperatura e queimando as embarcações mais rápido [...]”.

Por outro lado, uma grande desvantagem seria a dificuldade de produzir um espelho parabólico naquela época, já que possui uma geometria mais complexa do que um espelho esférico. Mas infelizmente não obtivemos respostas neste sentido, por mais que trabalhamos durante as aulas expositivas a construção geométrica e algébrica da curva. A desvantagem mais citada pelos alunos foi alcance do ponto focal da parábola.

5.4 Momento 4 - Questionário 6 – Considerações finais dos estudantes - E_1

O sexto e último questionário é composto por três questões, sendo duas primeiras objetivas e a última dissertativa, pretendemos fechar aplicação do produto educacional analisando a opinião dos estudantes sobre o acontecimento relatado em vários livros didáticos sobre o feito de Arquimedes, seria possível incendiar embarcações com o auxílio de espelhos?

Para análise dessa problemática buscamos desenvolver junto ao estudante o método científico, mostrando no decorrer do produto que para fazer ciência devemos

considerar fundamentações teóricas e comprovações experimentais e que nem tudo que está nos livros podem ser consideradas verdades irrefutáveis, principalmente tratando da história da Física .

No primeiro exercício do questionário 6 perguntamos para aluno: “ O que você acha sobre o feito de Arquimedes, ele realmente aconteceu?”. E as alternativas propostas são:

- a) Sim.
- b) Não.

Analisando as respostas emitidas pelos estudantes, podemos representar os resultados da pesquisa pelo gráfico da Figura 42.

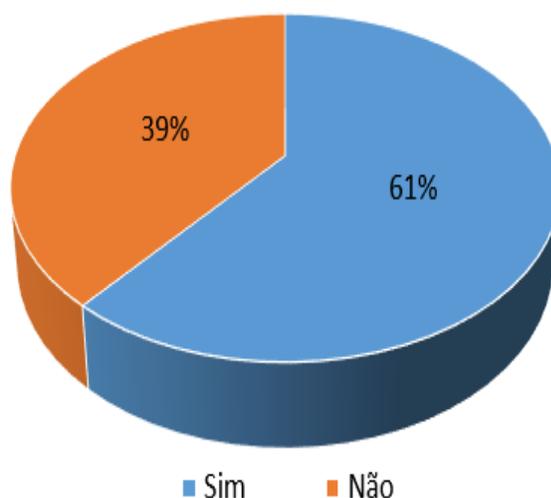


Figura 42: O que você acha sobre o feito de Arquimedes, ele realmente aconteceu?

Os dados apontam que a maioria (61%) acreditam que a narrativa do raio da morte de Arquimedes é verídica, isto é, concordam que seria possível incendiar embarcações com auxílio de espelhos.

5.4.1 Questionário 6 - E₂

O segundo exercício do questionário 6 propõe verificar a opinião dos estudantes sobre qual espelho mais se adequa ao feito de Arquimedes, para reflexão elaboramos a seguinte questão: “Supondo que o feito tenha ocorrido, qual espelho você acredita que ele utilizou?”. A questão foi elaborada de forma objetiva e possui três alternativas:

- a) espelho plano.
- b) espelho côncavo.
- c) espelho parabólico.

Considerando as alternativas propostas e as respostas dadas pelos discentes, podemos elaborar o gráfico da Figura 43.

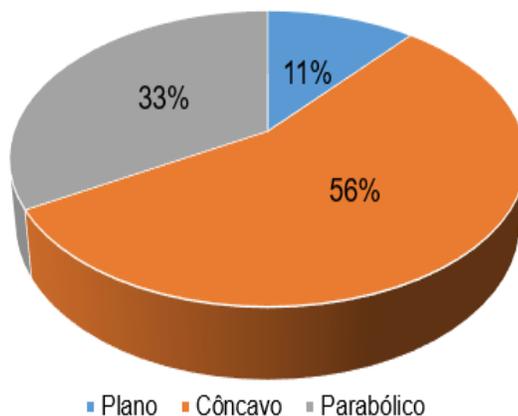


Figura 43: Supondo que o feito tenha ocorrido, qual espelho você acredita que ele utilizou?

O resultado aduz o espelho côncavo como o ideal para incendiar as embarcações (56%), seguido do parabólico (33%) e por último o espelho plano (11%). Acreditamos que os estudantes tenham indicado o espelho côncavo devido à influência do material que foi trabalhado nas aulas, o tempo de estudo deste modelo de espelho foi maior que os das outras opções.

5.4.2 Questionário 6 - E_3

A terceira atividade do questionário 6 pretende concluir a problematização proposta no produto educacional. Para alcançar esses objetivos, utilizaremos os objetos de conhecimento estudados no decorrer da aplicação, isto é, tomamos como ponto de partida a história dos espelhos de Arquimedes, motivando o aluno a estudar os conceitos de óptica geométrica para a resolução do problema, e desta forma desenvolvemos o pensamento científico.

O enunciado desta atividade propõe a seguinte questão: “Justifique a resposta dada no exercício 1 (O que você acha sobre o feito de Arquimedes, ele realmente aconteceu?), baseada nos conceitos que você aprendeu”.

A realização desta atividade foi direcionada para ser realizada em casa, onde os estudantes poderiam realizar pesquisas sobre a narrativa de Arquimedes, mas sendo alertados sobre a importância da qualidade e necessidade da citação das fontes examinadas, mas que no final do discurso deveriam dar a sua opinião sobre o tema.

Dividimos as resoluções dos estudantes em três categorias relacionados ao nível de conhecimento científico expresso nas suas redações, sendo nível 1 (conhecimento baixo), nível 2 (conhecimento médio) e nível 3 (conhecimento alto), considerando essas divisões, podemos representar os resultados pelo gráfico da Figura 44.

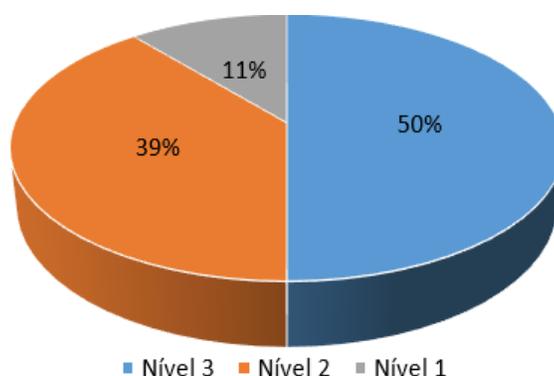


Figura 44: Justifique a resposta dada no exercício 1, baseada nos conceitos que você aprendeu.

Os resultados apontam que a metade dos estudantes conseguiram alcançar o objetivo da atividade, utilizaremos como exemplo o aluno ME que foi classificado no nível 3 e que escreveu:

“Ao que tudo indica um espelho côncavo juntamente dos raios solares não seriam o suficiente para criar um raio mortal que atingisse barcos a uma certa distância. Pesquisas feitas mostram que uso de espelhos contra navios em movimento seria contestável. Além disso, os soldados dos barcos conseguiriam acabar rapidamente com pequenos focos de incêndio. Um experimento feito por um engenheiro americano, David Wallace, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), deu certo, porém foram necessários 127 espelhos quadrados com 30 cm de lado com o sol das 13h e cerca 10 minutos para queimar um Pequeno pedaço de madeira. O fogo grego é visto historicamente como uma armadilha mortal para os navios da Antiguidade. Tendo isso em vista, concluiu-se que, o raio mortal de Arquimedes não passa de uma lenda, ao que

tudo indica. Luciano de Samosata, historiador do 2º século da Era Comum (uns 300 anos após ter acontecido), teria descrito que Arquimedes teria utilizado canhões de vapor para derrotar inimigos”.

Para uma boa aplicação de uma metodologia de ensino baseada na teoria de aprendizagem significativa devemos nos propor a fazer o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, para a partir deste, traçar a rota ideal para apropriação de novos conceitos. Segundo Ausubel et al. (1980, p.137), *“o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que sabe e baseie nisso seus ensinamentos”*.

Acreditando nas concepções de Ausubel, produzimos o produto utilizando a metodologia de ensino ativa. Durante o andamento do produto os estudantes são os pesquisadores, construtores de seu conhecimento, usamos modelos diversificados de aula e os resultados apresentados neste capítulo corroboram para uma aprendizagem sólida e significativa dos participantes deste produto educacional de ensino.

Podemos notar pelos resultados apresentados e discutidos neste capítulo que não houve um consenso entre os estudantes com relação narrativa sobre o espelho da morte de Arquimedes, se consideravam verdadeira ou falsa, a intenção do trabalho também não era essa, mas sim de construir um cenário de investigação usando os métodos científicos para o desdobramento do ensino da óptica geométrica, diante do que foi exposto, acreditamos que o desenvolvimento do produto educacional foi considerado satisfatório.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se iniciou o trabalho de pesquisa constatou que os estudantes do colégio onde foi aplicado o produto eram carentes de vocabulário e conceitos físicos. A maioria dos alunos reproduziam o que estava descrito no material letivo, não existia uma reflexão epistemológica do contexto, estavam acostumados ao ensino de Física linear e matematizado, isto é, eram passivos no processo de aprendizagem, pautadas ao modelo de aulas expositivas, reprodução de atividades que exigiam simplesmente aplicação de fórmulas, sem contextualização e fora da realidade dos educandos. Essas práticas implicavam em falta de significado dos conteúdos estudados, implicando em problemas de engajamento dos estudantes.

Diante deste cenário e com a intenção de melhorar o engajamento dos estudantes, propusemos um produto educacional relacionado a óptica geométrica baseado nas metodologias de ensino ativa e utilizando diferentes tipos de materiais de aprendizagem.

Durantes os anos de ensino de Física observei que os estudantes têm interesse, quando bem direcionada, na história das ciências. Aproveitando deste fato, utilizei para motivar os nossos estudos, a história que ficou conhecida como o espelho da morte de Arquimedes, e a partir desta narrativa linkar os conceitos de: raio e feixes de luz, lei da reflexão, princípio de Fermat, formação de imagem em espelhos planos, convexos, côncavos, parabólico e as equações de Gauss aplicada aos espelhos esféricos.

Constatamos que o objetivo geral do projeto foi contemplado, pois, efetivamente o trabalho conseguiu obter uma participação mais efetiva dos estudantes, produzindo uma aprendizagem mais reflexiva, próxima da realidade dos alunos e gerando uma aprendizagem significativa.

Para implantação do trabalho foram utilizados os princípios da aprendizagem significativa de David Paul Ausubel, que tem como uma das suas concepções, os levantamentos prévios dos estudantes. Um dos primeiros passos foi executar essa ideia, elaboramos situações que levem o aluno a refletir sobre o que lembram sobre

História da Física. Outro ponto importante da teoria de Ausubel é utilizar os conhecimentos existentes para a produção de novos, isto é, âncora os novos conhecimentos aos existentes.

Os materiais didáticos utilizados no desenvolvimento foram assertivos, a exibição dos vídeos produzidos pelo próprio autor fez os alunos adentrarem em grandes problemas da humanidade e as soluções construídas pelos cientistas em suas respectivas épocas, fato que deve ser ressaltado. As problematizações são fruto de situações temporais, isto é, para cada momento da nossa História nos deparamos com situações que precisamos resolver para melhorar a nossa qualidade de vida.

Os simuladores produzidos no Geogebra são excelentes ferramentas de ensaios virtuais. Sabemos que no Brasil são poucas escolas que tem uma infraestrutura satisfatória para a exploração de experimentos. A escola onde foi aplicado o produto está entre essas, diante destas dificuldades, foi utilizado o *software* como ferramenta de apoio experimental, afinal a experimentação é um ponto importantíssimo para o método científico.

Utilizando os simuladores instalados em *smartphones*, os estudantes conseguiram corroborar as propriedades dos espelhos côncavo e parabólico, isto é, a prática experimental é um facilitador pedagógico, pois possibilita, como já mencionado anteriormente, a integração da teoria com a prática. A experimentação pretende instigar o interesse dos alunos pelo conteúdo e constrói habilidades socioemocionais como (Brasil, 2018): paciência, curiosidade, autonomia, criatividade, disciplina e resiliência.

Nos anos de 2020 e 2021 (período da construção do produto) o mundo passa por um grande problema epidemiológico, a humanidade vem enfrentando dificuldades com a pandemia do Coronavírus (COVID-19), muitos setores foram adaptados, sendo a educação um destes e tivemos momentos de ensino remoto e híbrido.

Devido as circunstâncias, realizamos adequação ao sistema avaliativo do presente produto, em vários momentos utilizamos o *Google Forms* para produção de atividades. A aplicação dos formulários possibilitou avaliar os resultados atingidos com a implementação do produto e mensurara a evolução da aprendizagem dos estudantes.

Diante das limitações geradas pela pandemia, especialmente com relação à interação social, acreditamos que os resultados seriam mais satisfatórios se o desenvolvimento do produto fosse presencial e em grupos e não individual, infelizmente, o distanciamento social não permitiu aplicação neste formato. A produção de atividades colaborativas permite uma ajuda mútua entre os integrantes. Nos grupos existem alunos com mais dificuldades do que outros e a exposição de ideias promovem um conhecimento mais homogêneo entre os pares.

Outro ponto importante que podemos recomendar para futuras aplicações deste produto é a produção dos simuladores do Geogebra de forma interdisciplinar com o professor de Matemática. Os estudantes inicialmente tiveram dificuldade para entender o funcionamento do programa e como o software é uma poderosa ferramenta para construção de conceitos de geometria e poderem, serem aproveitados para estudos da óptica geométrica, sendo assim, seria muito proveitoso uma parceria entre os professores de física e matemática.

Mesmo diante das dificuldades do ensino híbrido e dos entraves apontados neste trabalho, especialmente nos dois últimos parágrafos, os resultados indicam que os métodos e os recursos agregados neste projeto contribuíram para o engajamento, introduzindo alfabetização científica e aprimoramento da visão epistemológica dos estudantes com relação à disciplina de Física.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Educational psychology: A cognitive.** 1ª. ed. Nova York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

AUSUBEL, D. P. **Psicologia educativa: um ponto de vista cognoscitivo.** México: Trillas, 1976.

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa: A teoria de David Ausubel.** São Paulo: Moraes, 1982.

AUSUBEL, D. P. et al. **Psicologia educacional.** Tradução de Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BRASIL. **PCN+ Física Ensino Médio Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências.** Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, p. 22. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular,** Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 27 de ago. de 2021.

DISTLER, R. R. Pepsic. UNASP – Centro Universitário. **Contribuições de David Ausubel para a intervenção psicopedagógica,** 2015. ISSN ISBN. Disponível em: <<http://pepsic.bvsalud.org/pdf/psicoped/v32n98/09.pdf>>. Acesso em: 16 de nov. de 2020.

FORATO, T. C. D. M.; PIETROCOLA, M.; MARTINS, R. **Historiografia e natureza da ciência na sala de aula.** Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 28, p. 27-59, 2011. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/2175-7941.2011v28n1p27>>. Acesso em: 12 de jul. de 2021.

FREIRE, P. R. N. **Pedagogia da Autonomia.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física. Óptica e Física Moderna.** 10ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. 4, 2016.

JOSEPH, B.; JANDA, R. **The Handbook of Historical Linguistics.** Oxford: Blackwell Publishing, 2008. p. 162-163.

KNEUBIL, F. B.; PIETROCOLA, M. **A Pesquisa Baseada em Design: Visão geral e contribuição para o ensino de ciências**. Investigações em Ensino de Ciências, 2017. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/310>>. Acesso em: 22 de jul. de 2021.

LAKOMY, A. M. **Teorias Cognitivas da Aprendizagem**. Curitiba: IBPEX, 2008. p. 18.

MATTHEWS, M. R. **História, filosofia e ensino de ciências: as tendências**. Caderno Catarinense de Ensino de Física, v. 12, n. 3, p. 164-214, Dezembro 1995. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/7084/6555>>. Acesso em: 10 de out. de 2021.

MIZUKAMI, M. D. G. N. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: E.P.U, 1992.

MOREIRA, M. A. **Unidade de Ensino Potencialmente Significativas - UEPS**. Aprendizagem Significativa em Revista, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa em mapas conceituais**. 6ª. ed. Porto Alegre: Instituto de Física - UFRGS, v. 24, 2013.

MOURA, R.; CANALLE, J. B. G. **Os Mitos dos Cientistas e suas Controvérsias**. Revista Brasileira de Ensino de Física, p. 238-251, 2001.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. **Metodologia do trabalho científico: Métodos e técnicas de pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2ª. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

REVISTA de Pesquisa FAPESP. **O raio da Mortal de Arquimedes**, n. 117, p. 38, 2005. Disponível em <<https://revistapesquisa.fapesp.br/o-raio-mortal-de-arquimedes/>>. Acesso em: 21 de dez. de 2021.

SEARS, F. et al. **Física 2 - Óptica e Física Moderna**. 12ª. ed. São Paulo: Pearson, v. 2, 2008.

SILVA, R. F. D.; CORREA, E. S. **Novas tecnologias e educação: A evolução do processo de ensino e aprendizagem na sociedade contemporânea.** Educação e Linguagem, Paraná, p. 23-35, 2014.

SILVA, S. D. C. R. D.; SCHIRLO, A. C. **Teoria da aprendizagem significativa de Ausubel: reflexões para o ensino de Ciências frente às novas realidades da sociedade.** Imagens da Educação, Paraná, v. 4, n. 1, p. 36 - 42, 2014.

THUILLIER, P.; DUQUE-ESTRADA, M. **De Arquimedes a Einstein. A face oculta da invenção científica.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1994.

VIEIRA, K. R.; BAZZO, W. A. **Discussões acerca do Aquecimento Global: Uma proposta CTS para abordar esse tema controverso em sala de aula.** 1. ed. Florianópolis: Ciência & Ensino, v. 1, 2007. p. 1-12.

WAGNER, E. **Porque as antenas são parabólicas?** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 33, p. 15-19, 1997. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>>. Acesso em: 16 de set. de 2021.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL

A1 Apresentação e agradecimentos

Prezado (a) professor (a),

Quero agradecer o leitor pela oportunidade da apresentação deste trabalho, que é fruto de uma pesquisa com finalidade de abordar conceitos do ensino de Física utilizando metodologias diferenciadas.

Pretendemos desenvolver o tema “formação de imagem em espelhos”, conceito abordado normalmente no segundo ano do ensino médio, usaremos como motivação ideias relacionadas a história da Física, precisamente a narrativa que ficou conhecida como “o raio da morte de Arquimedes”. Segundo alguns livros didáticos, o filósofo grego Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) teria incendiado navios invasores usando o fenômeno de reflexão dos raios solares, utilizando espelhos como meio refletor.

A veracidade do feito de Arquimedes é constantemente colocada a prova, o nosso trabalho será direcionado a investigar essa história e determinar a diferença entre fato e mito. Buscaremos incentivar o aluno a procurar evidência do feito, utilizando-se dos conceitos abordados no capítulo 2, e, em paralelo, buscaremos desenvolver o pensamento científico crítico.

O desenvolvimento do trabalho será baseado na teoria de aprendizagem significativa de David Paul Ausubel e a implementação no ambiente escolar será pela produção de sequência de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) do professor Marco Antônio Moreira.

O presente material faz parte do trabalho final de conclusão de curso do programa de Mestrado Profissional Nacional em Ensino de Física (MNPEF) ministrado na Universidade Federal do ABC (UFABC), organizado pela Sociedade Brasileira de Física (SBF) e com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), quero agradecer a essas instituições e ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Augusto Leigui de Oliveira, por possibilitar a realização deste trabalho.

Bom trabalho!

A2 Visão global da sequência didática

O desenvolvimento das atividades deste produto foi construído para que sejam aplicadas em paralelo aos conceitos abordados no Capítulo 2, normalmente estudado ao longo de um mês e meio (entre 12 até 20 aulas, dependendo da opção de aplicação e do sistema de ensino), sendo desta forma, indicada para motivar os estudos das ideias que são tratadas no capítulo.

A quantidade de aulas para aplicação do produto vai depender exclusivamente do aplicador, pois sugerimos em dois tópicos a construção de simuladores de espelho côncavo e de um espelho parabólico, deixamos para o professor duas opções:

- I. Construir os simuladores em tempo real juntamente com o aluno, para depois os estudantes fazerem as possíveis manipulações;
- II. Construir o simulador e levar o arquivo pronto para que o discente faça as investigações que são solicitadas nos questionários propostos.

A Primeira opção requer um tempo maior, já que o aluno vai precisar compreender a linguagem dos comandos do *software*, portanto, essa aplicação levará uma quantidade de aula maior, cabendo ao docente avaliar a flexibilização do tempo de aplicação.

O produto é composto por vídeos animados que apresenta uma breve reflexão sobre a História da Física e a forma como que ela é normalmente retratada nos livros do Ensino Médio. O trabalho ainda conta com orientações em audiovisual das construções dos simuladores e um conjunto de questionários que articulam os vídeos ao nosso objeto de estudos.

A3 Desenvolvimento do produto educacional.

Para aplicação do produto sugerimos dividir as etapas a serem desenvolvidas em aulas com duração de 50 minutos.

A 3.1 Aula 1 – Identificar os subsunçores.

Orientação ao professor:

Na aula inaugural o professor pode sugerir o questionário 1, tendo como objetivo promover reflexão sobre a importância da História para nossa sociedade. Avaliação pode

ser feita de forma individual ou em grupo de 4 pessoas, sugerimos a realização em grupo.

Vamos à aula:

Começaremos a aula promovendo uma reflexão sobre a importância da História para formação e desenvolvimento da sociedade, faremos levantamento prévio do conhecimento do estudante, propondo o questionário 1.

Questionário 1

1. O que é História?
2. Qual a importância da História para a formação da sociedade?
3. Você conhece alguma história que envolva algum físico ou conceito físico?
O que mais chamou atenção nesta história?

A 3.2 Aula 2 – *Feedback* da aula 1.

Orientação ao professor:

Para o desenvolvimento desta aula o professor deverá ter analisado as respostas dadas no questionário 1, a intenção é que o docente discuta juntamente com os seus alunos as questões 1, 2 e 3.

Vamos à aula:

O professor inicia aula falando sobre o que é história, que segundo Joseph (2008, p. 163) a palavra é de origem grega e atribuída Heródoto (século V a.C.), que foi um dos primeiros a investigar narrações antigas de forma crítica, aplicando cruzamento de dados de diversas fontes. A história é o estudo do homem na evolução do tempo, compreender as ações do homem no passado ajuda a entender o nosso presente e realizar previsões do nosso futuro.

Neste momento o professor poderia mencionar algumas respostas do exercício 3 dadas pelos grupos de estudantes, com o objetivo de socializar os contextos

históricos da Física. E para finalizar a aula o professor deverá reproduzir o vídeo 1 “A história da Física ou a estória da Física”, disponível na plataforma *Youtube*. Clique na Figura 45 ou utilize o *link* abaixo da figura para ser direcionado ao filme.



Figura 45: Vídeo 1 - A História da Física ou a estória da Física?
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=rePFBwTYvPI&t=3s>

Do que trata o vídeo 1 – A História da Física ou a estória da Física?

Apresenta uma narração com animações sobre a importância da Física para a formação da sociedade e em um segundo momento alerta sobre as possíveis controvérsias da forma que as histórias foram publicadas.

Após apresentação do vídeo o professor pode deixar uma questão para os grupos refletirem na próxima aula: como diferenciar um fato de um mito na Física?

A 3.3 Aula 3 – Apresentação do tema.

Orientação ao professor:

Nessa aula o professor deverá promover o desdobramento da questão deixada em aberto na aula anterior (como diferenciar um fato de um mito na Física?), para isso analisaremos um fato específico na história da Física e posterior ao vídeo 2, aplicar o questionário 2.

Vamos à aula:

Começaremos a aula exibindo o vídeo 2, cujo título é “O espelho mágico, era uma vez na Grécia...” disponível também no *Youtube* e para reproduzir clique na Figura 46 ou no link disponível abaixo da legenda da figura.



Figura 46: O espelho mágico, era uma vez na Grécia...

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=5LNx2CUXdiQ&t=8s>

Do que trata o vídeo 2 – O espelho mágico, era uma vez na Grécia...

Apresenta uma narração com animações sobre a vida do matemático, físico e inventor grego Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), no vídeo mencionamos algumas de suas invenções e destacando no final do filme um feito que ficou conhecido como “O espelho da morte de Arquimedes”, tomaremos a análise da veracidade deste, como motivação para o estudo da óptica geométrica.

Finalizaremos essa aula com a aplicação do questionário 2, os estudantes devem responder às duas questões propostas em aula.

Questionário 2

1. Qual é a sua opinião sobre a narrativa referente ao espelho da morte de Arquimedes, verdadeiro ou falso? Justifique a sua resposta.
2. Considerando a História verdadeira, quais seriam as dificuldades enfrentadas para conclusão deste fato?

A 3.4 Aula 4 à 14 – Desenvolvimento do objeto de ensino.

Orientação ao professor:

Nesta etapa o docente precisa abordar os conceitos de Física que estão presentes no capítulo 2, podendo a quantidade de aulas necessárias para conclusão das ideias variar dependendo das dificuldades apresentadas pelos estudantes, mas acreditamos que o estudo dos tópicos do capítulo 2, leva em média 10 aulas.

Vamos à aula:

O material teórico não precisa ser necessariamente o do capítulo 2 deste trabalho, pois sabemos que existe uma necessidade de cumprir o sistema próprio (apostila ou livro, compostos por teorias e exercícios) da qual o aplicador deste produto está inserindo, mas o material didático utilizado deve ser equivalente em temas. Segue abaixo uma sugestão da subdivisão das aulas de acordo com os tópicos do capítulo 2.

Tabela 2: Aulas e conceitos

Aula	Tópico/Tema
4	2.1 À Óptica Geométrica: conceitos básicos; 2.2 Os princípios da Óptica Geométrica.
5 e 6	2.3 As leis da reflexão; 2.4 Representação Geométrica de ponto objeto e ponto imagem.
7	2.5 Formação de imagem em um espelho plano.
8 e 9	2.6.1 Elementos de um espelho esférico; 2.6.2 Condições de nitidez para o espelho esférico
10 e 11	2.6.3 Raios notáveis; 2.6.4 Formação de imagem no espelho esférico.
12	2.6.5 As equações de Gauss.
13	2.6.6 Característica de uma imagem em espelho esférico usando as equações de Gauss
14	2.7 Espelhos parabólicos.

A 3.5 Aula 15 – Aprofundando o estudo do objeto de ensino.

Orientação ao professor:

A proposta desta aula é o que o aluno após estudar os tópicos do capítulo 2, tenha adquirido conhecimento do funcionamento dos espelhos e que queremos avaliar o aprendizado com aplicação do questionário 3.

Vamos à aula:

O professor vai solicitar que o aluno responda o questionário 3, baseando-se nos conceitos científicos estudados nas aulas 4 à 14.

Questionário 3.

Dos espelhos que você estudou (côncavo, convexo, plano ou parabólico), na sua opinião, qual seria o espelho ideal para os objetivos de Arquimedes? Justifique o seu argumento usando as propriedades do espelho escolhido.

O aluno terá apenas essa aula para responder essa questão. Após entregue, o professor deverá analisar as respostas e aponta dentro da sua correção o que não é um argumento científico.

A 3.6 Construção de simuladores no Geogebra.

Neste tópico apresentaremos os comandos para construção de simuladores de espelho côncavo e de um espelho parabólico, como mencionado no tópico A2 Visão global da sequência didática deixamos para o professor duas opções:

- I. Construir os simuladores em tempo real com o aluno, para depois os estudantes fazerem as possíveis manipulações;
- II. Construir o simulador e levar o arquivo pronto para que o discente faça as investigações que são solicitadas nos questionários propostos.

Descreveremos o produto supondo que o professor escolheu a segunda opção, sendo desta forma, esse tópico não acrescentará aulas ao nosso produto, já que o professor levará o arquivo pronto para os alunos.

A 3.6.1 Construção do simulador do espelho côncavo.

Nessa atividade construiremos um espelho côncavo no *software* geogebra, seguiremos a nomenclatura dos comandos apresentados na Tabela 1, do Capítulo 3, e

os passos da execução estão na Tabela 3, deste tópico.

Produziremos o simulador para que auxilie o estudante na manipulação de um espelho côncavo, com objetivo de investigar as suas propriedades.

Tabela 3: Comando para construção do simulador do espelho côncavo

Passos	Construção	Comando/execução
1°	Circunferência de centro $A = (4,0)$ e raio 4	Clique no comando 6a, depois na coordenada $(4,0)$ e em seguida em $(0,0)$, os pontos serão nomeados automaticamente de A e B .
2°	Ponto C sobre a circunferência	Acione o comando 2a e depois em qualquer local sobre a circunferência, criando o ponto C
3°	Ponto D , simétrico a C com relação ao eixo y	No campo de entrada digite $D = (x(C), -y(C))$, esconda a circunferência
4°	Construção do arco CD	Clique no comando 6f e nos pontos A, C e D , nesta ordem. Esconder a circunferência. Movimente C para que o arco fique semelhante a uma superfície de um espelho côncavo.
5°	Criar o ponto E	Acione o comando 2a e depois clique sobre a coordenada $(-3,0)$, criando o ponto E
6°	Criar o parâmetro α	Clique no comando 10a e depois adicione o comando em qualquer lugar da janela gráfica, mas que não atrapalhe a visualização do arco CD . Coloque o parâmetro em formato de ângulo e no intervalo min. -5° e máximo 5° .
7°	Construir o ponto F	No campo entrada digite $F = (\cos(\alpha) - 3, \sin(\alpha))$
8°	Produzir o vetor $u = \overrightarrow{EF}$	Acionando o comando 3f e em seguida selecione os pontos E e F .
9°	Construção dos pontos G, H e I sobre o arco CD	Acione o comando 2a e clique três vezes seguidas em diferentes pontos do arco CD , criando os pontos G, H e I .

10°	Construção de três semirretas com origens em G , H e I .	No campo entrada digite semirreta (G,u) . Faça o mesmo processo trocando o ponto G , pelo ponto H e depois trocando para o ponto I .
11°	Criar a reta simétrica a semirreta (G,u) com relação a reta normal a circunferência no ponto G .	Selecione o comando 3b, clique no ponto A em seguida no ponto G . Acione o comando 9a, selecione a semirreta (G,u) e o segmento AG respectivamente. Esconda o segmento AG .
12°	Criar a reta simétrica a semirreta (H,u) com relação a reta normal a circunferência e de forma análoga construir a reta simétrica a semirreta (I,u) .	Repetindo os comandos do 11° passo, substituindo G por H e posteriormente alterando G por I .

Para finalizar a construção podemos destacar os raios refletidos e esconder objetos que não são necessários para o estudo do experimento (vetor, rótulos, entre outros). O professor pode acompanhar os passos da construção também por vídeo, que está disponível na plataforma do *Youtube*, clique na Figura 47 ou utilize o link disponível abaixo da figura.

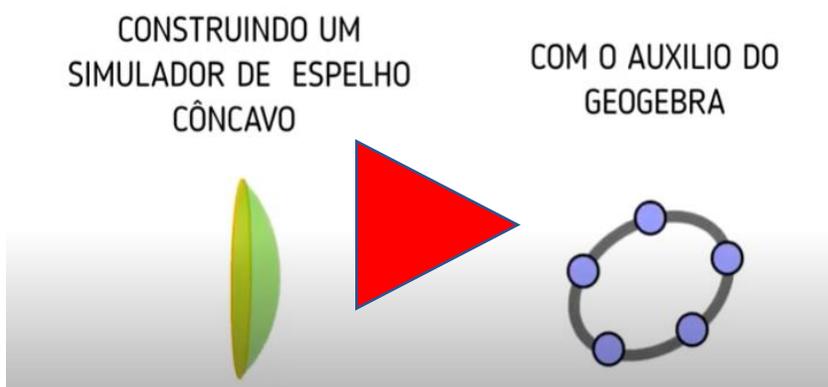


Figura 47: Construção do simulador do espelho côncavo.
 Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=nGOH2rV1zs&t=16s>

Do que trata o vídeo 3 – Construção do simulador do espelho côncavo.

O vídeo apresenta uma descrição detalhada em formato de áudio visual dos passos descritos na tabela 2, isto é, todos os comandos necessários para a construção do simulador do espelho côncavo utilizando o *software* Geogebra.

A 3.6.2 Construção do simulador do espelho parabólico.

Nessa atividade construiremos um espelho parabólico no *software* Geogebra, e de forma análoga ao tópico anterior (A 3.6.1 Construção do simulador do espelho côncavo.) seguiremos os comandos apresentados na Tabela 1, do Capítulo 3, e os passos estão descritos na Tabela 4, deste tópico.

Tabela 4: Comandos da construção do simulador do espelho parabólico.

Passos	Construção	Comando/execução
1°	Foco A e a reta diretriz f da parábola.	Clique no comando 2a, depois na coordenada (2,0) e em seguida em (-2,0), os pontos serão nomeados automaticamente de A e B . Utilizando o comando 4b, acione o ponto B e depois clique no eixo y .
2°	Parábola de foco A e reta diretriz f	Acione o comando 7c, clique no ponto A e em seguida na reta f . Com essas instruções, construiremos a parábola. Esconda os pontos A e B .
3°	Criar o parâmetro α	Clique no comando 10a e depois adicione o comando em qualquer lugar da janela gráfica, mas que não atrapalhe a visualização da parábola. Coloque o parâmetro em formato de ângulo e no intervalo min. -10° e máximo 10° .
4°	Construir os pontos C e D .	Acione o comando 2a, depois na coordenada (-8,0). No campo entrada digite $D = (\cos(\alpha) - 8, \sin(\alpha))$
5°	Produzir o vetor $u = \overrightarrow{CD}$	Acionando o comando 3f e em seguida selecione os pontos C e D .
6°	Construção dos pontos E , F e G sobre a parábola.	Acione o comando 2a e clique três vezes seguidas (sucessivamente) em diferentes pontos sobre a parábola, criando os pontos E , F e G .
7°	Construção de três semirretas com origens em E , F e G .	No campo entrada digite semirreta (E,u). Faça o mesmo processo trocando o ponto E , pelo ponto F e depois trocando E pelo ponto I .

8°	Construção da reta normal a parábola no ponto E .	Selecione o comando 4e, clique no ponto E em seguida na parábola, construindo a reta tangente. Acione o comando 4a, clique no ponto E e em seguida na reta tangente.
9°	Produzir a reta simétrica a semirreta (E, u) com relação a reta normal.	Clique no comando 9a, selecione a semirreta (E, u) e em seguida a normal que passa por E . Esconda a reta normal.
10°	Criar a reta simétrica a semirreta (F, u) com relação a reta normal a parábola e de forma análoga construir a reta simétrica a semirreta (I, u) .	Repetindo os comandos do 8° e 9° passo, substituindo E por F e repetir o processo alterando F por I .
11°	Construir o segmento com extremos no ponto E na intersecção da reta g' com a parábola.	Acione o comando 2d, clique em g' e na parábola. Utilizando o comando 3b, selecione o ponto E e o ponto I (intersecção de g' com a parábola). Esconda g' .
12°	Construir os raios refletidos em F e G , conforme o 11° passo.	Seguir o 11° passo sobre os pontos F e G .

Para finalizar a construção podemos destacar os raios refletidos e esconder objetos que não são necessários para o estudo do experimento (vetor, rótulos, entre outros). O aplicador do produto pode acompanhar os passos da construção também em vídeo que está disponível na plataforma *Youtube*, para reproduzir o filme clique na Figura 48 ou utilize o link disponível abaixo da figura.

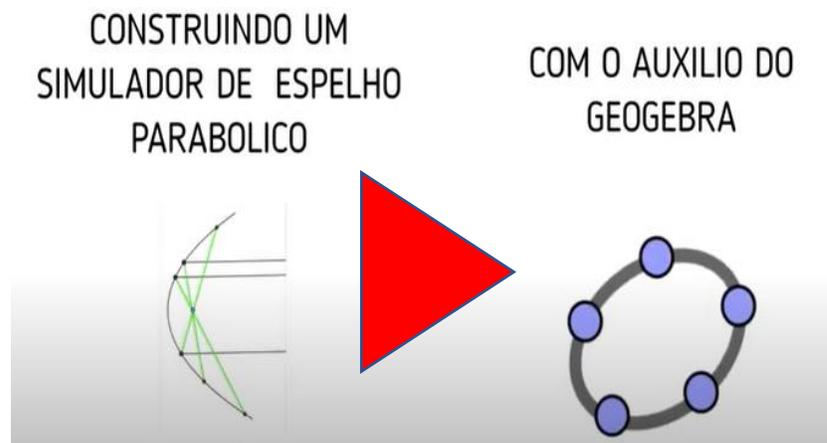


Figura 48: Construção do simulador do espelho parabólico.
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=zrfsN4V0-ZY>

Do que trata o vídeo 4 – Construção do simulador do espelho parabólico.

O vídeo apresenta uma descrição detalhada em formato de áudio visual dos passos descritos na tabela 3, isto é, todos os comandos necessários para a construção do simulador do espelho parabólico utilizando o *software* Geogebra.

A 3.7 Aula 16 – Investigando o espelho côncavo com o simulador.

Orientação ao professor:

A proposta desta aula é que o aluno com o auxílio dos simuladores possa investigar as propriedades do espelho côncavo e as dificuldades que Arquimedes teria para incendiar as embarcações romanas.

Vamos à aula:

O professor deve iniciar aula apresentando o software e os seus principais comandos como: arrastar janelas, deslocar pontos, *zoom* da janela de visualização, esconder/aparecer objeto, entre outros.

Depois destas instruções iniciais o docente apresenta o simulador do espelho côncavo e descreve o significado óptico de cada objeto geométrico do simulador, isto é, onde está localizado o espelho, os raios de incidência/refletidos, o ponto do centro de curvatura e a funcionalidade do parâmetro α .

Posteriormente o professor deve propor aos grupos de alunos para que respondam o questionário 4, lembrando que para aplicação desta atividade, cada grupo deve ter acesso ao menos a um computador para que façam as devidas investigações.

Questionário 4.

1. Com o auxílio do simulador, o que você observa quando fixamos $\alpha = 0^\circ$ e movimentamos o ponto C ?
2. De que forma podemos aumentar o alcance dos raios refletidos, isto é, quais os pontos devemos movimentar?
3. Quais seriam as vantagens e desvantagens da utilização deste espelho no suposto feito de Arquimedes?

A 3.8 Aula 17 – Investigando o espelho parabólico com o simulador.

Orientação ao professor:

A proposta desta aula é análoga à aula 16, pois utilizaremos agora o simulador do espelho parabólico como ferramenta de investigação e desenvolveremos atividades semelhantes ao do tópico anterior.

Vamos à aula:

Acreditamos que o aluno já tenha familiaridade com o *software* Geogebra, sendo assim, o docente deve apresentar o simulador do espelho parabólico e descrever o significado óptico de cada objeto geométrico do simulador, isto é, onde está localizado o espelho, os raios de incidência/refletidos, o ponto que representa o foco da parábola e a funcionalidade do parâmetro α . E, nesta aula, deve propor o questionário 5.

Questionário 5.

1. Com o auxílio do simulador, o que você observa quando fixamos $\alpha=0^\circ$ e movimentamos a reta diretriz (mova pelo ponto B)? E se variarmos α , o que acontece com os raios refletidos?
2. Quais seriam as vantagens e desvantagens da utilização deste espelho no suposto feito de Arquimedes?

A 3.9 Aula 18 – A conclusão do aluno.

Orientação ao professor:

A proposta desta aula é que os estudantes se baseando nos conceitos adquiridos sobre óptica geométrica e a análise realizada com o auxílio dos simuladores, possam argumentar cientificamente a respeito do feito de Arquimedes.

Vamos à aula:

Após estudar os conceitos dos espelhos e utilizar o simulador para manipular as propriedades dos espelhos, chegou a hora da opinião do aluno, o professor deve propor

que o estudante responda o questionário 6.

Questionário 6.

1. O que você acha sobre o feito de Arquimedes, ele realmente aconteceu?
 - a) Sim
 - b) Não
2. Supondo que o feito tenha ocorrido, qual espelho você acredita que ele utilizou?
 - a) Plano
 - b) Côncavo
 - c) Parabólico
3. Justifique a resposta dada no exercício 1, baseada nos conceitos que você aprendeu.

Se possível o aluno deveria entregar o questionário nesta aula, pois a próxima aula, que será a última, o professor fará uma apresentação estatística das questões 1 e 2.

A 3.10 Aula 19 – Conclusão.

Orientação ao professor:

Essa será a última aula do produto, cabendo ao professor apresentar uma conclusão do tema.

Vamos à aula:

O professor pode começar apresentando dados estatísticos das questões 1 e 2, do questionário 6, no instante seguinte socializar as respostas dos exercícios 3, e até mesmo fazer um comparativo das respostas entre o questionário 3 com o questionário 6, isto é, verificando se as opiniões mudaram antes e pós utilização dos simuladores.

O professor pode citar questões interessantes que não podem passar sem uma discussão, a primeira trata da focalização dos espelhos côncavo e parabólico, ambos focalizam raios que chegam no espelho de forma paralela, desta forma os espelhos precisariam estar abaixo do nível do mar, para captar a luz do Sol (que vem do céu) e focalizar nos navios.

O aluno pode questionar e propor que os navios e o Sol estavam alinhados próximos à linha do horizonte, mas desta argumentação, temos outro grande problema, para que o Sol esteja próximo à linha do horizonte existem duas possibilidades, ele está se pondo ou está nascendo, em ambos os casos os raios que incidem no espelho não teriam energia térmica suficiente para incendiar o navio.

No livro “De Arquimedes A Einstein. A Face Oculta Da Invenção Científica” de Thuller (1994, pg. 50-51), temos um experimento realizado pelo especialista em combustão, o inglês D.L. Simms, o resultado aponta que para queimar da madeira do navio seria preciso de $1,5 \text{ cal. s/cm}^2$, mas simulando o feito de Arquimedes durante um dia bem com temperatura bem elevada, os espelhos poderiam chegar apenas $0,6 \text{ cal. s/cm}^2$.

Uma segunda questão que pode ser citada é que as embarcações estariam a uma grande distância o que forçaria os espelhos terem distância focal de grande alcance, isto é, deveriam ter um formato plano ou quase plano, mas alguns livros didáticos apontam que Arquimedes teria utilizado espelhos esféricos (mesmo tendo grandes problemas para focalizar raios) e para outros livros Arquimedes teria usado espelho parabólico.

Deve ser ressaltado que a construção de espelhos esféricos que reflitam os raios de forma não difusiva, dependem muito do polimento da superfície, e para o espelho parabólico além do polimento, existir o problema geométrico, isto é, a construção de uma superfície paraboloide é muito mais complicada de produzir do que uma superfície esférica.

A Narrativa que envolve o raio da morte é debatido até os dias de hoje, algumas pesquisas indicam que a narração é apenas uma lenda, entre estas, temos o seriado de

televisão norte-americano *Mythbusters*, conhecido no Brasil como “Os caçadores de mito”. No episódio 3 (intitulado de “*Archimedes Death Ray Revisited**”) da quarta temporada, os apresentadores do programa gerenciaram diversas experiências sobre o raio da morte de Arquimedes e sem sucesso, isto é, não conseguiram queimar o navio utilizando reflexão de raio solar em espelhos. Chegarão à conclusão de que essa história é apenas um mito.

Mas também existem especialistas que acreditam na veracidade do raio da morte, um dos defensores é o engenheiro David Wallace, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). A revista FAPESP** relata que David assistiu ao episódio dos caçadores de mito e resolveu também fazer os seus experimentos. Depois de uma tentativa fracassada, enfim conseguiu incendiar uma réplica de uma embarcação romana, mas foram necessários 127 espelhos quadrados de 30 cm de lado para a realização da combustão na embarcação.

O docente pode sugerir aos estudantes essas experiências citadas nos dois últimos parágrafos como referência de pesquisa. Na nota de rodapé disponibilizamos os links dos materiais sugeridos.

Na conclusão dos estudos o professor deve se manter imparcial, mas as evidências mostram que o feito de Arquimedes, caso tenha ocorrido, não aconteceu da maneira que está descrita nos livros.

* Vídeo do episódio 3. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=VHgCCdawLrs>. Acesso em: 20 de dezembro de 2021.

** Revista FAPESP, edição 117 de 2005. Disponível: <https://revistapesquisa.fapesp.br/o-raio-mortal-de-arquimedes/>. Acesso em: 20 de dezembro de 2021.

APÊNDICE B – MATERIAIS USADOS NO PRODUTO

Neste apêndice disponibilizamos os links dos materiais utilizados no produto: os questionários em formato de *Google* formulário, desta forma o leitor pode baixá-los, fazendo adaptações ou aplicá-los no formato original, os vídeos e os simuladores prontos que estão disponíveis no site Geogebra. Clique nas imagens ou digite o endereço do site que está abaixo das figuras para ter acesso aos arquivos.

B 1. Formulários

Formulário da aula 1

A screenshot of a Google Form titled "Aula 1 - Conhecendo os subunçores." The form header includes logos for MNPEF (Mestrado em Matemática), UFABC (Universidade Federal do ABC), and Profa Educatonal Prof. Lenora. Below the title, there is a "Nome:" field and a "Your address:" field. A hand cursor icon is positioned over the form, indicating it is clickable.

Figura 49: Questionário da aula 1

Fonte: https://docs.google.com/forms/d/1H7P9Aj7g9YdqwMZW_8gKidiw5M7hBCUO2j4r-P60Hv4/edit?usp=sharing

Formulário da aula 2

A screenshot of a Google Form titled "Aula 2." The form header includes logos for MNPEF (Mestrado em Matemática), UFABC (Universidade Federal do ABC), and Profa Educatonal Prof. Lenora. Below the title, there is a "Nome:" field and a "Your address:" field. A hand cursor icon is positioned over the form, indicating it is clickable.

Figura 50: Questionário da aula 2

Fonte: <https://docs.google.com/forms/d/1RiLhWta-U8fOfwfuOVofuNGkRaZa1LWTTBRxMVdMME/edit?usp=sharing>

Formulário da aula 3

A screenshot of a Google Form titled "Aula 3." The form header includes logos for MNPEF (Mestrado em Matemática), UFABC (Universidade Federal do ABC), and Profa Educatonal Prof. Lenora. Below the title, there is a "Nome:" field and a "Your address:" field. A hand cursor icon is positioned over the form, indicating it is clickable.

Figura 51: Questionário da aula 3

Fonte: https://docs.google.com/forms/d/1_TZe0686d1h62s34IIHdFnmISGcXqF3vDiUAfhIITNs/edit?usp=sharing

As aulas 4 até 14 são estudos específicos do conteúdo e cada instituição tem o seu material para desenvolvimento de atividades específicas dos quais se devem abordar os conceitos sugeridos na Tabela 2: Aulas e conceitos, página 102, portanto, essas aulas não possuem formulário.

Formulário da aula 15

The image shows a Google Form interface for 'Aula 15'. At the top, there are three logos: MNPEF (Associação Nacional de Instituições de Pós-Graduação em Física), UFABC (Universidade Federal do ABC), and CBF (Comissão Brasileira de Física). Below the logos, the text 'Aula 15.' is displayed, followed by a red asterisk and the word 'Obrigado'. There is a 'Nome' field with a red asterisk and a 'Your answer' field. A hand cursor icon is pointing at the 'Nome' field. At the bottom, there is a small disclaimer: 'This content is neither created nor endorsed by Google. See Terms of Service.' and the Google logo.

Figura 52: Questionário da aula 15

Fonte: https://docs.google.com/forms/d/1u3GvUc1UaKhvvgGRIE0a9LBaxiiVR3PZZTONtonA_gs/edit?usp=sharing

Formulário da aula 16

The image shows a Google Form interface for 'Aula 16'. At the top, there are three logos: MNPEF (Associação Nacional de Instituições de Pós-Graduação em Física), UFABC (Universidade Federal do ABC), and CBF (Comissão Brasileira de Física). Below the logos, the text 'Aula 16.' is displayed, followed by a red asterisk and the word 'Obrigado'. There is a 'Nome' field with a red asterisk and a 'Your answer' field. A hand cursor icon is pointing at the 'Nome' field. At the bottom, there is a small disclaimer: 'This content is neither created nor endorsed by Google. See Terms of Service.' and the Google logo.

Figura 53: Questionário da aula 16

Fonte: https://docs.google.com/forms/d/15orQxcWvLB-yAcknWf13tPlcPIRkTzawxm_1mjDYJ_Q/edit?usp=sharing

Formulário da aula 17

The image shows a Google Form interface for 'Aula 17'. At the top, there are three logos: MNPEF (Associação Nacional de Instituições de Pós-Graduação em Física), UFABC (Universidade Federal do ABC), and CBF (Comissão Brasileira de Física). Below the logos, the text 'Aula 17.' is displayed, followed by a red asterisk and the word 'Obrigado'. There is a 'Nome' field with a red asterisk and a 'Your answer' field. A hand cursor icon is pointing at the 'Nome' field. At the bottom, there is a small disclaimer: 'This content is neither created nor endorsed by Google. See Terms of Service.' and the Google logo.

Figura 54: Questionário da aula 17

Fonte: https://docs.google.com/forms/d/1cl5K9fnGZEEN3_3jSQgEaes1mB5RV64V__fgVU4mI9I/edit?usp=sharing

Formulário da aula 18



MNPEF
UFABC
PBF
Produto Educacional
Prof. Everton

Aula 18 - A conclusão do aluno.

Resposta

Nome

Seu e-mail

Figura 55: Questionário da aula 18

Fonte: https://docs.google.com/forms/d/172HHpxzKY_10oFeLiRi1pWERJRYf9gJ5g5glrWlllxE/edit?usp=sharing

B 2. Vídeos

Os dois primeiros vídeos são direcionados aos estudantes e dois últimos são orientações de como o professor pode construir o simulado utilizando o *software* Geogebra.

Vídeo 1



Figura 56: Vídeo 1

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=rePFBwTYvPI&t=3s>

Vídeo 2



Figura 57: Vídeo 2

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=5LNx2CUXdiQ&t=8s>

Vídeo 3

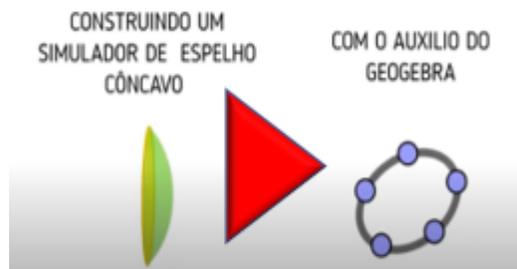


Figura 58:: Vídeo 3

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=nGOhH2rV1zs&t=16s>

Vídeo 4



Figura 59: Vídeo 4

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=zrfsN4V0-ZY>

B 3. Simuladores

Os simuladores que podem ser construídos pelo docente ou pelos estudantes com a orientação do professor (conforme vídeo 3 e vídeo 4), também estão disponíveis na plataforma Geogebra, podendo o leitor utilizá-lo de forma *online* ou baixá-lo para usar em modo *offline*.

Simulador 1

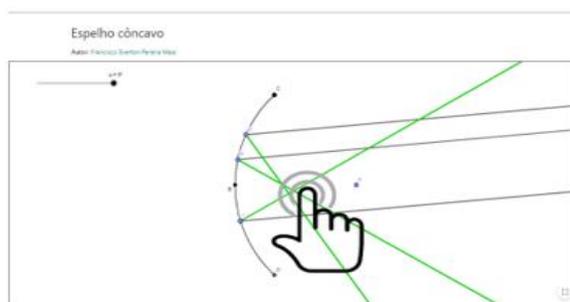


Figura 60: Simulador do espelho côncavo

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/jsn7hqdq>

Simulador 2

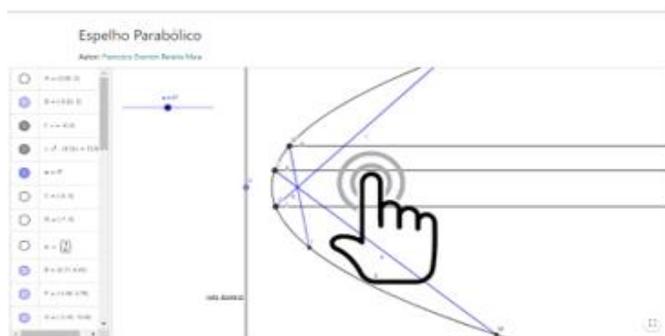


Figura 61: Simulador do espelho parabólico
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/hygwj5wj>

APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÕES

Neste apêndice apresentaremos demonstrações complementares para apreciação do professor, como essas provas requerem ferramentas não utilizadas no ensino básico, não recomendamos apresentação delas para os alunos do ensino médio.

C1. Demonstração da Segunda lei da reflexão.

Considerando um feixe de luz de origem em A e por reflexão sobre a reta r (objeto refletor) tem destino ao ponto B , queremos mostrar que segundo o princípio de Fermat existe um único ponto em $P \in r$, tal que o percurso $AP + PB$ gasta o menor tempo possível e por consequência o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido.

Como o meio de incidência é o mesmo que o meio de reflexão, a velocidade permanece a mesma em todo o trajeto, assim o tempo é mínimo quando a trajetória $AP + PB$ for mínima.

Demonstração:

Sejam os pontos A' e B' as projeções ortogonais na horizontal, C e D as projeções ortogonais na vertical dos pontos A e B respectivamente, para facilitar a escrita algébrica tomemos $A'B' = d$, $A'P = x$, $AA' = h_A$ e $BB' = h_B$ (Figura 62).

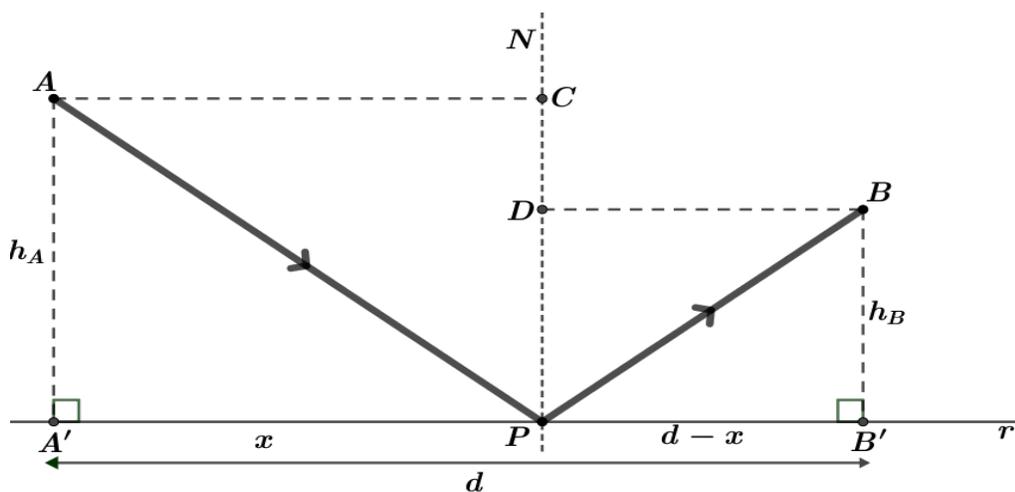


Figura 62: Demonstração algébrica da segunda lei da reflexão.
Fonte: Próprio autor.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos APA' e BPB' , temos

$$AP = \sqrt{x^2 + h_A^2} \quad (I)$$

$$PB = \sqrt{(d-x)^2 + h_B^2} \quad (II)$$

Observe que a trajetória depende de x , fazendo $f(x) = AP + PB$ e da equação (I) e (II),

$$f(x) = \sqrt{x^2 + h_A^2} + \sqrt{(d-x)^2 + h_B^2} \quad (III)$$

Pelos conceitos de cálculo diferencial, uma função $f(x)$ pode ter mínimo quando $f'(x) = 0$ (a derivada da função for igual a zero), derivando (III).

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+h_A^2}} + \frac{-2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2+h_B^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h_A^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+h_B^2}} \quad (IV)$$

Fazendo (IV) igual a zero,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h_A^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+h_B^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+h_A^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+h_B^2}} \quad (V)$$

Note que $\text{sen } A\hat{P}C = \frac{x}{\sqrt{x^2+h_A^2}}$ e $\text{sen } B\hat{P}D = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+h_B^2}}$, analisando (V),

concluimos que: $\text{sen } A\hat{P}C = \text{sen } B\hat{P}D \Rightarrow A\hat{P}C \equiv B\hat{P}D$. Logo o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

C2. Demonstração da propriedade refletora da parábola

A propriedade refletora da parábola diz que todo raio de luz que incide na parábola de forma paralela ao eixo de simetria é refletido passando pelo foco. Para realizar essa demonstração precisamos considerar os conceitos matemáticos descritos abaixo:

- I. **Equação da canônica da parábola** – quando o vértice da parábola coincide com a origem do sistema de coordenada a sua expressão que representa a parábola fica simplificada por: $y(x) = \frac{x^2}{4f}$, onde f é a distância focal da parábola;
- II. **Equação da reta** – dada pela expressão: $y(x) - y(x_p) = y'(x_p)(x - x_p)$, onde x_p e y_p são coordenadas de um ponto dado;

III. **Distância entre dois pontos no plano** - seja $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos no plano, a distância entre estes pontos é calculada pela expressão:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Demonstração:

Dada a parábola Υ de distância focal $FV = f$ e equação $y(x) = \frac{x^2}{4f}$, tomando $P = (x_P, y_P)$ um ponto sobre parábola tal que AP é paralelo ao eixo y (eixo óptico da parábola), seja t uma reta que passa pelo ponto Q e tangente Υ em P . Queremos mostrar primeiramente que o triângulo FPQ é isóscele de base PQ (Figura 63).

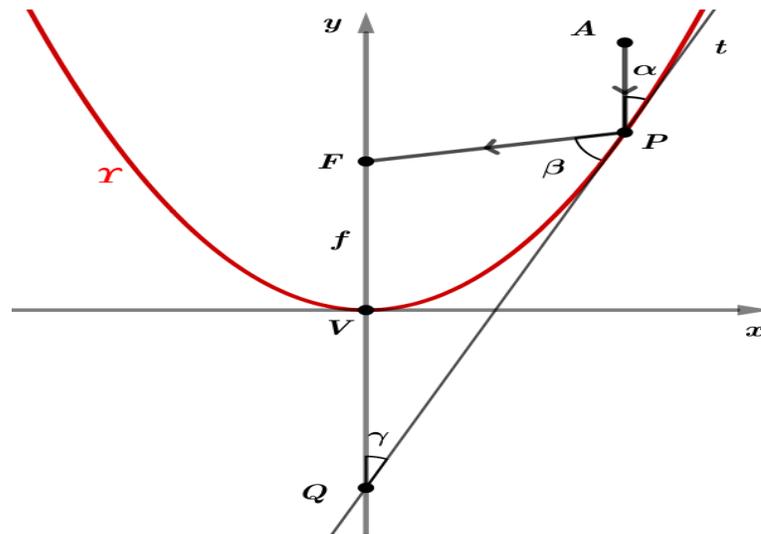


Figura 63: Propriedade refletora.
Fonte: Próprio autor.

Vamos calcular a derivada de $y(x)$ e determinar o seu valor no ponto de interesse $x = x_P$,

$$y(x) = \frac{x^2}{4f} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{x}{2f}$$

$$y'(x_P) = \frac{x_P}{2f} \tag{I}$$

Usaremos (I) para calcular a equação da reta t que passa pelo ponto P ,

$$y(x) - y(x_P) = y'(x_P)(x - x_P)$$

$$y(x) - y_P = \frac{x_P}{2f}(x - x_P) \tag{II}$$

Vamos determinar as coordenadas do ponto Q , como o ponto pertence ao eixo y , basta determinar y_Q pois $x_Q = 0$, usando a expressão (II),

$$y(x_Q) - y_P = \frac{x_P}{2f}(x_Q - x_P)$$

$$y_Q = y_P - \frac{x_P^2}{2f} \quad (\text{III})$$

Como $P \in Y$, a equação da parábola $y(x) = \frac{x^2}{4f}$ aplicada em P , temos

$$y_P = \frac{x_P^2}{4f}$$

$$2y_P = \frac{x_P^2}{2f} \quad (\text{IV})$$

Substituindo (IV) em (III), segue

$$y_Q = y_P - 2y_P$$

Então o ponto $Q = (0, -y_P)$, calculando a distância entre os pontos F e P ,

$$d(F, P) = \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2}$$

$$d(F, P) = \sqrt{x_P^2 + (y_P - f)^2} \quad (\text{V})$$

Da relação (IV), $x_P^2 = 4y_P f$, substituindo em (V),

$$d(F, P) = \sqrt{4y_P f + (y_P - f)^2}$$

$$d(F, P) = \sqrt{4y_P f + y_P^2 - 2y_P f + f^2}$$

$$d(F, P) = \sqrt{y_P^2 + 2y_P f + f^2}$$

$$d(F, P) = y_P + f \quad (\text{VI})$$

Vamos calcular a distância de F a Q

$$d(F, Q) = \sqrt{(x_Q - x_F)^2 + (y_Q - y_F)^2}$$

$$d(F, Q) = \sqrt{(0 - 0)^2 + (-y_P - f)^2}$$

$$d(F, Q) = y_P + f \quad (\text{VII})$$

Observando (VI) e (VII), temos que $d(F, P) = d(F, Q)$, segue que o triângulo PQF é isóscele com $\gamma = \beta$.

Agora vamos mostrar que $\gamma = \alpha$, o que implicaria escrever $\alpha = \beta$, confirmando a segunda lei da reflexão (tópico 2.3 As leis da reflexão). Para isso basta observar que o segmento AP é paralelo ao eixo y e a reta t é uma transversal, segue que $\gamma = \alpha$.

Logo todo raio que incide em uma parábola, paralela ao eixo óptico, será refletido de forma a passar pelo foco.