Fluxo Máximo em Redes

Letícia Rodrigues Bueno

UFABC

Definição do Problema

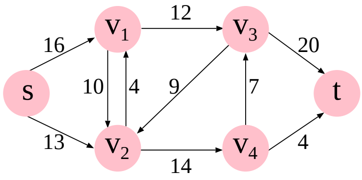
- podemos interpretar um grafo orientado como um "fluxo em rede" e responder perguntas sobre fluxo de materiais;
- **Considere que:**
  - material percorre sistema com origem *s* (onde material é produzido) até sorvedor *t* (onde é consumido);
  - origem produz material em alguma taxa fixa;
  - sorvedor consome material na mesma taxa;
  - **"fluxo" do material em qualquer ponto do sistema:** taxa na qual material se move;
  - **Aplicações:** líquidos fluindo por tubos, peças por linhas de montagem, corrente por redes elétricas, informações por redes de comunicação, etc;

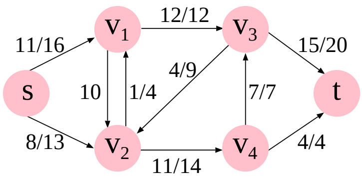
Definição do Problema

- **aresta orientada:** canal para o material;
- cada canal tem capacidade máxima;
- vértices são junções de canais (material flui sem acumulação, exceto por origem e sorvedor);
- **“conservação do fluxo”**: taxa na qual material entra no vértice deve ser igual à taxa em que deixa vértice;
- **Objetivo**: calcular maior taxa na qual material pode ser enviado desde a origem até o sorvedor sem violar restrições de capacidade;

Definição do Problema

- grafo conexo orientado $G = (V(G), E(G))$;
- **$\mathbf{c(u, v) \geq 0}$**: capacidade de $(u, v) \in E(G)$;
- se $(u, v) \notin E(G)$, então $c(u, v) = 0$;
- **$\mathbf{f(u, v)}$**: fluxo da aresta (u, v);
- **Restrição de capacidade**: $f(u, v) \leq c(u, v)$;
- **origem** (ou **fonte**) s e **sorvedor** (ou **sumidouro**) t;
- **por simplicidade, assuma:** $\exists$ caminho de s a t passando por v, $\forall v \in V(G)$;
- **Objetivo**: encontrar fluxo máximo de s para t;





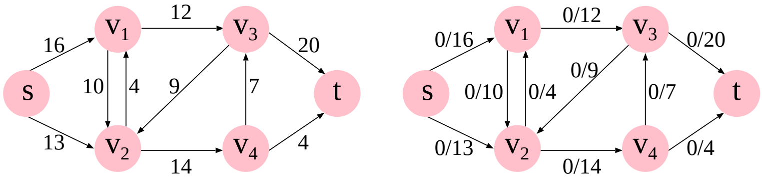
Algoritmo de Ford-Fulkerson (1956)

- “algoritmo dos caminhos aumentantes”;
- **caminho aumentante**: caminho com capacidade disponível;
- **Ideia do algoritmo**: enquanto existir caminho aumentante de s até t, envia fluxo por esse caminho;
- fluxo total que sai da origem, denotado por $|f|$, tem valor:

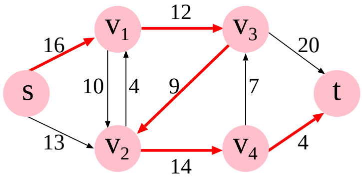
$$|f| = \sum_{v \in V(G)} f(s, v)$$

- método de Ford-Fulkerson é guloso (chamado “método” porque encontrar caminhos aumentantes não é especificado);

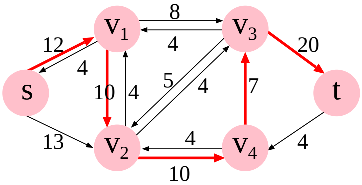
Algoritmo de Ford-Fulkerson

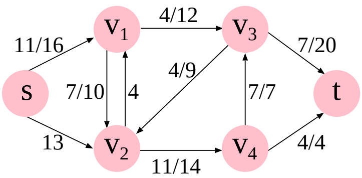


Algoritmo de Ford-Fulkerson

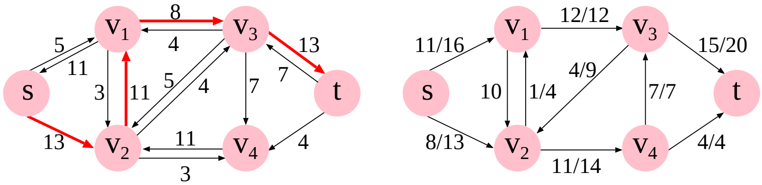


Algoritmo de Ford-Fulkerson

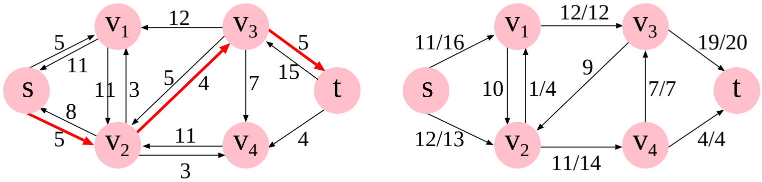




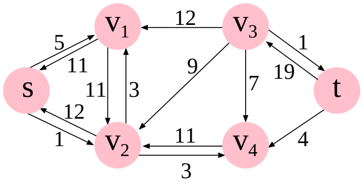
Algoritmo de Ford-Fulkerson

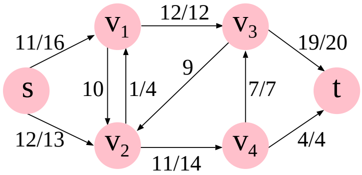


Algoritmo de Ford-Fulkerson



Algoritmo de Ford-Fulkerson





Algoritmo de Ford-Fulkerson

- o algoritmo mantém as seguintes invariantes:
  - Restrição de capacidade: $f(u,v) \leq c(u,v)$;
  - Anti-simetria oblíqua: $f(u,v) = -f(v,u)$.
    Se, na prática, x unidades vão de u para v e y unidades vão de v para u, temos $f(u,v) = x - y$ e $f(v,u) = y - x$;
  - Conservação de fluxo: exceto para s e t, a quantidade de fluxo que entra em um vértice é igual ao fluxo que sai do vértice.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

- rede residual $G_f(V(G), E_f)$:
  - rede com capacidade $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ e nenhum fluxo;
  - pode acontecer de um fluxo de v para u ser permitido na rede residual, embora não seja permitido na rede original: se $f(u, v) > 0$ e $c(v, u) = 0$ então $c_f(v, u) = c(v, u) - f(v, u) = f(u, v) > 0$.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G,s,t):
    inicializar fluxo f como 0
    enquanto $\exists$ caminho aumentante p **faça**
        ampliar fluxo f ao longo de p
    retorne f

Algoritmo de Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G,s,t):
    para cada $(u, v) \in E$ **faça**
        $f[u, v] = 0$
        $f[v, u] = 0$
    enquanto $\exists$ caminho aumentante p de s para t em G_f
                tal que $c_f(u, v) > 0$ para toda aresta (u, v) em p **faça**
        $c_f(p) := \min\{c_f(u, v) | (u, v) \in p\}$
        para cada $(u, v) \in p$ **faça**
            $f[u, v] = f[u, v] + c_f(p)$
            $f[v, u] = f[v, u] - c_f(p)$

Algoritmo de Ford-Fulkerson

- caminho (linha 5) pode ser encontrado com BFS ou DFS em $G_f(V(G), E_f)$;
- **Tempo de execução**:
  - usando BFS ou DFS, é possível encontrar caminho aumentante em $O(n + m)$;
  - cada caminho encontrado resulta em novo fluxo a ser acrescentado na rede;
  - como os incrementos de fluxo são sempre ≥ 1, o algoritmo tem tempo de execução $O(m \cdot |f|)$;
- se usamos BFS para encontrar caminhos aumentantes: algoritmo de Edmonds-Karp (especialização do método de Ford-Fulkerson);

Fluxo Máximo

E se houver várias origens e/ou vários sorvedouros?

- Acrescente uma super-origem com arestas indo para todas as origens, onde cada nova aresta tem capacidade infinita;
- Acrescente um super-sorvedouro recebendo arestas de todos os sorvedouros, onde cada nova aresta tem capacidade infinita;
- Dessa forma, qualquer fluxo na rede original corresponde a um fluxo na rede modificada e vice-versa;

Bibliografia Utilizada

CORMEN, T.H.; LEISERSON, C.E.; RIVEST, R.L. e STEIN, C. *Introduction to Algorithms*, 3ª edição, MIT Press, 2009.