Introdução a Grafos

Letícia Rodrigues Bueno

UFABC

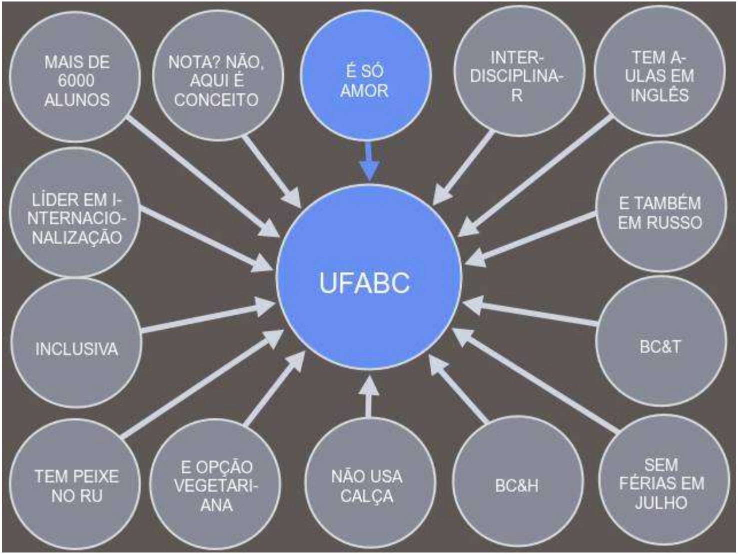
Teoria dos Grafos - Motivação

- **Objetivo:** aprender a resolver problemas;
- **Como:** usando grafos para modelar os problemas;
- **Grafos:** ferramenta fundamental de abstração;
- Abstraímos um problema real (usando grafos) e o solucionamos através de algoritmos;

Definição de Grafos

- Um **grafo** é um conjunto de objetos chamados **vértices** ou nós, ligados por retas chamadas **arestas**;
- Abstração que permite codificar relacionamentos entre pares de objetos;
- **Objetos:** cidades, pessoas, países, empresas, etc;
- **Relacionamentos:** amizade, conectividade, idioma, etc;

Exemplo de grafo



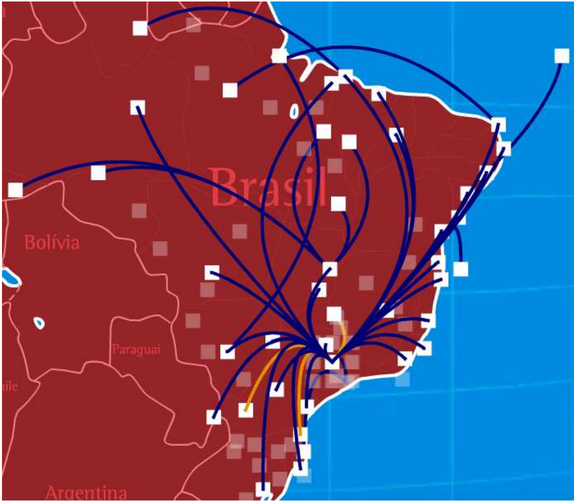
Vôos Aéreos: Azul Linhas Aéreas

Fonte: http://www.voeazul.com.br/

Vôos Aéreos: Webjet Linhas Aéreas

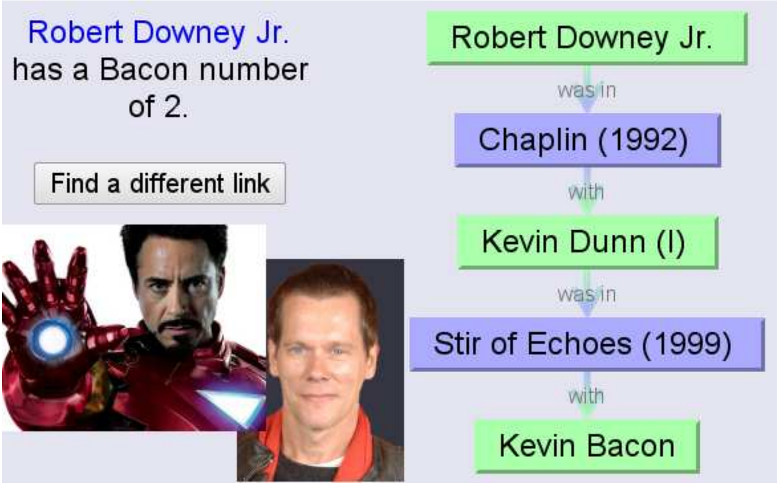
Fonte: http://www.webjet.com.br/

Vôos Aéreos: TAM Linhas Aéreas



Fonte: http://www.tam.com.br/

Número de Bacon



Fonte: http://oracleofbacon.org/

Número de Bacon

Fonte: http://oracleofbacon.org/

Número de Erdõs - Equivalente Nerd do Número de Bacon :)

- Paul Erdõs: famoso matemático hungáro;
- Trabalhou com centenas de colaboradores;
- Publicou mais de 1.400 artigos;
- Número de Erdõs é um tributo divertido criado pelos amigos;
- Paul Erdõs tem número de Erdõs 0;
- Os colaboradores diretos tem número 1;
- Os colaboradores dos colaboradores tem número 2 e assim por diante;

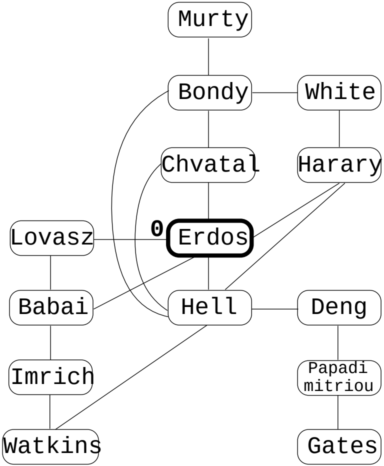
Número de Erdõs: Definição

- Dada uma lista de pessoas e as relações de colaboração entre elas, qual é o número de Erdõs de cada pessoa?

Número de Erdõs: Definição

- Dada uma lista de pessoas e as relações de colaboração entre elas, qual é o número de Erdõs de cada pessoa?
- Este problema pode ser modelado através de um grafo:
    - As pessoas são os vértices;
    - As relações de colaboração são as arestas.

Número de Erdõs: Exemplo



Definição Formal de Grafo

Um **grafo** G é uma tripla ordenada $G = (V, E, \psi)$, onde

- V é um conjunto finito e não vazio de **vértices**,
- E é um conjunto finito de **arestas** e
- $\psi : E \rightarrow V \times V$ é uma função de incidência que associa a cada aresta e de G um par de vértices u e v, notação $\psi(e) = uv$ (ou $\psi(e) = vu$, onde a ordem não é importante);

Algumas definições

- Os vértices u e v são chamados de **extremos** de e;
- O vértice u é **vizinho** de v e vice-versa;
- A aresta e é **incidente** em u e v;
- O par de vértices u e v são **adjacentes**;
- **Arestas paralelas** ou **múltiplas**: arestas diferentes compartilhando os mesmos extremos;
- Se a função de incidência admite arestas com vértices u e v iguais ($u = v$), então o grafo contém **laços** (ou ***loops***, em inglês);

Grafo simples

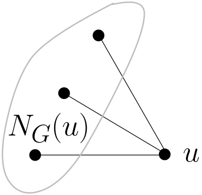
- **Grafo simples**: não contém laços nem arestas múltiplas;
- Nesse caso, como a função de incidência está bem definida pelos extremos de cada aresta, pode-se omitir a função de incidência da definição de grafos.
- Portanto, um grafo é uma dupla $G = (V, E)$ e $e = uv$ onde anteriormente $\psi(e) = uv$.

Algumas definições

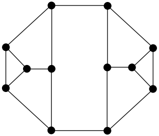
- **grafo trivial**: tem apenas um vértice (caso contrário, é **não-trivial**);
- Denotaremos: $|V| = n$ e $|E| = m$;
- **ordem do grafo**: $|V| = n$;
- **tamanho do grafo**: $|V| + |E| = n + m$;
- **grau** de um vértice u: notação $d(u)$, é o tamanho do conjunto dos vértices adjacentes ao vértice u;
- $\delta(G)$: grau mínimo de um grafo G;
- $\Delta(G)$: grau máximo de um grafo G;
- **vértice isolado**: vértice com grau 0;
- **vértice universal**: vértice u com $d(u) = n - 1$;

Algumas definições

- **grafo regular**: todos os vértices tem o mesmo grau;
- **grafo cúbico**: todo vértice u de G tem $d(u) = 3$;
- **vizinhança aberta** de um vértice u: denotada por $N_G(u)$, consiste no conjunto de vértices adjacentes a u;
- **vizinhança fechada** de um vértice u: denotada por $N_G[u]$, é $N_G(u) \cup \{u\}$;



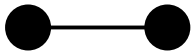
(a) Vizinhança aberta de um vértice u.



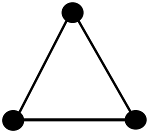
(b) Grafo cúbico.

Grafo completo

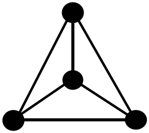
- **grafo completo**: notação K_n, todos os vértices são dois a dois adjacentes.



(c) K_2



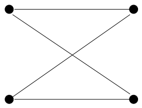
(d) K_3



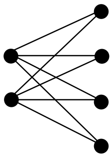
(e) K_4

Grafo bipartido

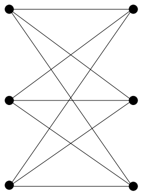
- **grafo bipartido**: existe bipartição de V em dois subconjuntos V_1 e V_2, tal que toda $e \in E$ tem um extremo em V_1 e um extremo em V_2;
- **grafo bipartido completo**: notação $K_{n,m}$, cada vértice de uma partição é adjacente a todos os vértices da outra partição.



(f) $K_{2,2}$



(g) $K_{2,4}$



(h) $K_{3,3}$

Passeio, caminho e ciclo

- **passeio**: seqüência de vértices e arestas $P = (u = u_1, u_1u_2, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_{k-1}u_k, u_k = v)$;
- **passeio fechado**: passeio onde $u = v$;
- **caminho**: passeio que não repete vértices;
- dois caminhos C_1 e C_2 entre u e v são **disjuntos** se $(C_1 \cap C_2) \backslash \{u, v\} = \varnothing$;
- **ciclo**: $C_1 \cup C_2$ onde u e v são distintos;

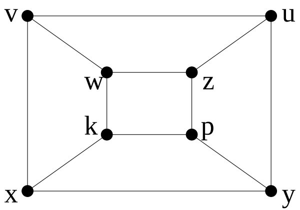


Figure : (v, u, z, p, y, u, v) é um passeio fechado; (b) (v, u, y) e (v, w, k, p, y) são dois possíveis caminhos entre v e y; (c) (v, u, y, x, v) é um ciclo.

Comprimento de caminho e ciclo

- O **comprimento** de um caminho ou ciclo é o número de suas arestas;
- Um caminho ou ciclo de comprimento k é chamado um ***k*-caminho** ou ***k*-ciclo**, respectivamente.

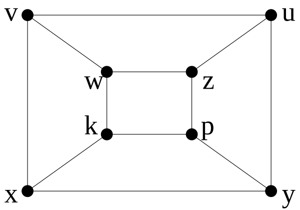


Figure : O caminho (v, u, y) tem comprimento 2 (2-caminho) e o caminho (v, w, k, p, y) tem comprimento 4 (4-caminho); o ciclo (v, u, y, x, v) tem comprimento 4, ou seja, é um 4-ciclo.

Algumas definições

- **grafo conexo**: existe um caminho entre qualquer par de vértices de G. Caso contrário, o grafo é **desconexo**;
- **distância** entre um par de vértices x e y: notação $d_G(x, y)$, é o comprimento do caminho mais curto entre x e y em G. Se não existe qualquer caminho conectando x e y em G, então $d_G(x, y) = \infty$;

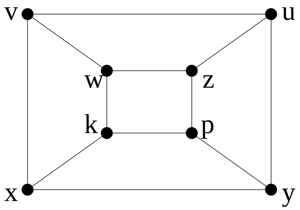


Figure : $d_G(v, y) = 2$ porque menor caminho possível entre v e y tem comprimento 2.

Grafo hamiltoniano

- **Caminho hamiltoniano**: caminho que contém todos os vértices do grafo;
- **Ciclo hamiltoniano**: ciclo que contém todos os vértices do grafo;
- **Grafo hamiltoniano**: grafo que contém um ciclo hamiltoniano;

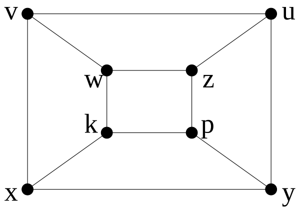


Figure : (v, u, y, x, k, w, z, p) é um caminho hamiltoniano e $(v, u, z, w, k, p, y, x, v)$ é um ciclo hamiltoniano.

Grafo euleriano

- **trilha**: passeio que não repete arestas;
- **trilha euleriana**: trilha que passa por toda aresta do grafo;
- **trilha euleriana fechada**: passeio fechado que passa por cada aresta do grafo exatamente uma vez;
- **grafo euleriano**: grafo que contém trilha euleriana fechada.

Teorema

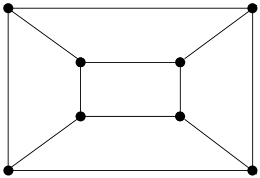
Um grafo conexo $G = (V, E)$ é euleriano se e somente se não tem vértices de grau ímpar.

Teorema

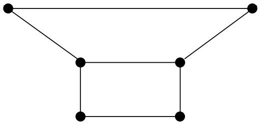
Um grafo conexo $G = (V, E)$ tem uma trilha euleriana se e somente se tem apenas dois vértices de grau ímpar.

Subgrafos

- Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo** de $G = (V(G), E(G))$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$;
- H é **subgrafo próprio** de G se H é subgrafo de G onde $V(H) \neq V(G)$ ou $E(H) \neq E(G)$, notação $H \subsetneq G$;
- $H \subsetneq G$ é **subgrafo induzido** de G se H é subgrafo de G e, para todo par de vértices u e v em H, $uv \in E(H)$ se e somente se $uv \in E(G)$;



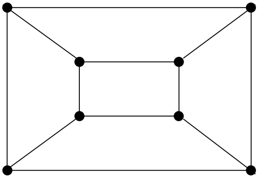
(a) Grafo G



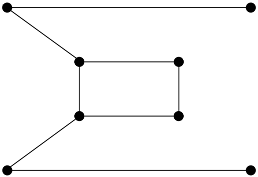
(b) Subgrafo induzido de G

Subgrafos

- H é **subgrafo gerador** de G se $V(G) = V(H)$ e $E(H) \subset E(G)$.



(c) Grafo G



(d) Subgrafo gerador de G

Conectividade em vértices

- **corte de vértices**: subconjunto V' de $V(G)$ tal que $G - V'$ é desconexo;
- k-**corte de vértices**: corte de vértices com k elementos;
- **conectividade** $\kappa(G)$: menor k para o qual G tem k-corte de vértices. Então G é k-**conexo em vértices** ou k-**conexo**;
- grafo *biconexo*: grafo 2-conexo;
- **articulação** ou **vértice de corte**: vértice $v \in V(G)$ tal que V' é um corte de vértices de G, $v \in V'$ e $|V'| = 1$;

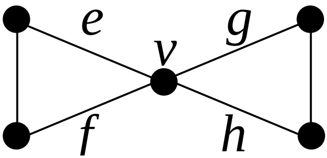


Figure : Grafo 1-conexo em vértices.

Conectividade em arestas

- **corte de arestas**: subconjunto E' de $E(G)$ tal que $G - E'$ é desconexo ou trivial;
- k-**corte de arestas**: corte de arestas com k elementos;
- **conectividade em arestas** $\kappa'(G)$: menor k para o qual G é desconexo ou trivial. Então G é *k-conexo em arestas*;
- **ponte**: aresta $uv \in E(G)$ tal que E' é um corte de arestas de G, $uv \in E'$ e $|E'| = 1$;

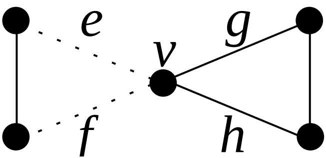
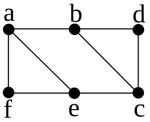


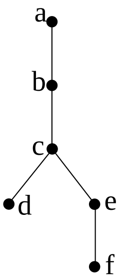
Figure : Grafo 2-conexo em arestas.

Árvores

- **grafo acíclico**: grafo que não contém ciclos;
- **árvore**: grafo acíclico;
- árvore $T = (V(T), E(T))$ contém único caminho entre qualquer $v, w \in V(T)$;
- **árvore geradora**: se árvore T é subgrafo gerador de G;
- **floresta**: grafo acíclico (não necessariamente conexo), cada componente conexo de uma floresta pe uma árvore;

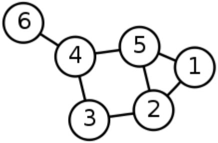


(a) Grafo G

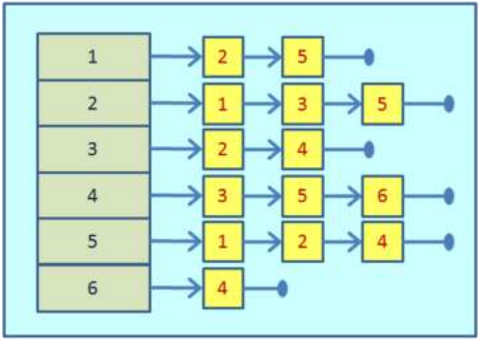


(b) Árvore geradora T de G

Representação Computacional: Lista de Adjacências



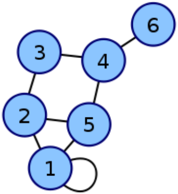
(c) G



(d) Lista de Adjacências de G

Vantagem: espaço em memória $\Theta(n + m)$.
Desvantagem: determinar se aresta está em G exige percorrer lista de adjacências.

Representação Computacional: Matriz de Adjacências



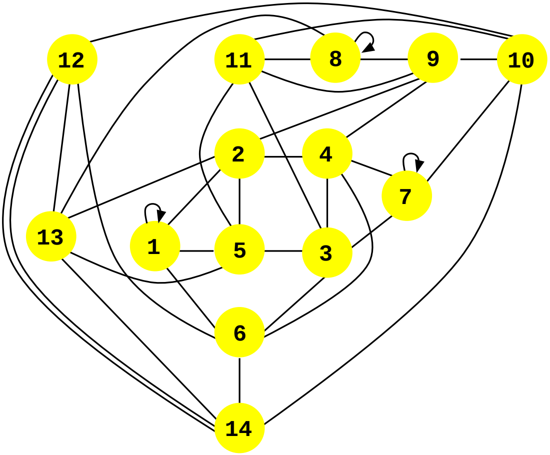
(e) *H*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(f) Matriz de Adjacências de *H*

Vantagem: determinar se aresta está em G exige $O(1)$.
Desvantagem: espaço em memória $\Theta(n^2)$.

Representação Computacional: E esse grafo?



(g) G_1

Exercícios

1. Considere $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$ e grafos não-orientados. Calcule a complexidade no pior caso de:

Problema	**Matriz Adjacências**	**Lista Adjacências**
Espaço em memória		
Buscar vértices adjacentes de um vértice v		
Conferir adjacência dos vértices u e v		
Visitar todas as arestas		
Calcular o grau de um vértice v		

Bibliografia Utilizada

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L. e STEIN, C. Algoritmos: teoria e prática. 2ª edição, Campus, 2002.

BONDY, J.A. e MURTY, U.S.R., Graph Teory, Graduate Texts in Mathematics, Springer, vol. 244, 2008.