MCTA028-17 – Teoria dos Grafos
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profs. Carla N. Lintzmayer, Guilherme O. Mota e Maycon Sambinelli

Lista 3

Entrega: até 21h00 do dia 19/11/2019

- Submeta ao tidia um único arquivo **.pdf** com as suas soluções escaneadas dos exercícios teóricos (sugestão de aplicativo: CamScanner) e um único arquivo **.c** com as soluções dos exercícios práticos.
- Seja o mais **formal** possível em todas as respostas.
- Identifique devidamente cada exercício.
- Capriche na letra!
- A lista é uma forma de treino para a prova, que não terá consulta. Evite plágio!

1 Exercícios teóricos

1. (0.5 ponto) Exiba um grafo G com pelo menos 6 vértices e um emparelhamento em G que seja maximal mas não seja máximo. Argumente por que ele não é máximo.

2. (1 ponto) Prove ou dê um contraexemplo: toda árvore possui no máximo um emparelhamento perfeito.

3. (1 ponto) Considere $\triangle$ como sendo a operação de diferença simétrica entre conjuntos: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Sejam M e M' dois emparelhamentos de um grafo G qualquer. Descreva em detalhes como são os componentes de $G[M \triangle M']$, justificando, quando: (i) M e M' são ambos emparelhamentos máximos e (ii) M e M' são ambos emparelhamentos perfeitos.

4. (1 ponto) Seja G um grafo, M um emparelhamento maximal em G e M^* um emparelhamento máximo em G. Mostre que $|M^*| \leq 2|M|$.

   Um *ciclo hamiltoniano* é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo (um ciclo gerador).

5. (1 ponto) Prove que todo grafo 3-regular que possui um ciclo hamiltoniano também possui um emparelhamento perfeito.

6. (1 ponto) Descreva uma decomposição do K_{2n+1} em ciclos hamiltonianos, para qualquer $n \geq 1$.

7. (1 ponto) Mostre que se G possui caminho hamiltoniano, então para todo $S \subseteq V(G)$ temos $c(G - S) \leq |S| + 1$.

8. (1 ponto) Prove o seguinte teorema usando a mesma ideia da prova do teorema de Dirac: se G é um grafo com $|V(G)| \geq 3$ tal que $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$ para todo par u, v de vértices não-adjacentes, então G é hamiltoniano.

9. (1 ponto) Mostre que G possui um caminho hamiltoniano se $\delta(G) \geq (|V(G)| - 1)/2$.

2 Exercícios práticos

1. (4 PONTOS) Implemente um arquivo `grafo.c` cujo arquivo cabeçalho[1], `grafo.h`, é o seguinte:

```c
#ifndef __GRAFO_H
#define __GRAFO_H

typedef struct grafo grafo_t;
grafo_t* cria_grafo(int n, int m);
void adiciona_aresta(grafo_t* G, int u, int v);
void deleta_grafo(grafo_t* G);
int* Dijkstra(grafo_t* G, int inicio, int** pesos);

#endif
```

A função DIJKSTRA deve ser implementada usando-se a estrutura de dados *heap* (use a estrutura disponível). Mais sobre heap e sobre a implementação de DIJKSTRA com heap pode ser lido em `http://professor.ufabc.edu.br/~carla.negri/cursos/materiais/Livro-Analise.de.Algoritmos.pdf`.

O arquivo `grafo.h` completo com explicações das funções (não modifique-o!) e outros arquivos auxiliares encontram-se em `http://professor.ufabc.edu.br/~carla.negri/cursos/materiais/implementacoes/`.

3 Exercícios extras

1. Prove o seguinte resultado, conhecido como *versão defeituosa do Teorema de Hall*: seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Se $|N(S)| \geq |S| - k$ para todo $S \subseteq X$ e algum inteiro k, então G tem um emparelhamento com $|X| - k$ arestas.

2. Prove que todo grafo bipartido k-regular G ($k \geq 1$) pode ser decomposto em k emparelhamentos perfeitos em G.

3. É verdade que em qualquer árvore todo emparelhamento maximal é máximo?

4. Seja G um grafo com 4 ou mais vértices tal que $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$. Mostre que G tem um ciclo hamiltoniano.

5. Prove o seguinte teorema usando a mesma ideia da prova do teorema de Dirac: se G é um grafo e u, v são dois vértices não-adjacentes em G tais que $d(u) + d(v) \geq |V(G)|$, então G é hamiltoniano se e somente se $G + \{u, v\}$ é hamiltoniano.

[1] Você pode ler um pouco sobre arquivos cabeçalho aqui: `http://www.ppgia.pucpr.br/~laplima/ensino/tap/contents/02_arquivosh.html`