Theorem

Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Função $\textsc{Colore}\mathrm{REC}(G)$
  Se $|V(G)| = 1$ **então Devolve** $\{V(G)\}$
  Seja u um vértice qualquer de G
  Seja $G' \leftarrow G - u$
  $\mathcal{C}' \leftarrow \textsc{Colore}\mathrm{REC}(G')$
  Se $|\mathcal{C}'| \leq \Delta(G)$ **então**
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}' \cup \{\{u\}\}$
  Senão
    Seja $C \in \mathcal{C}'$ tal que $N_G(u) \cap C = \emptyset$
    $\mathcal{C} \leftarrow \big(\mathcal{C}' \setminus \{C\}\big) \cup \big\{C \cup \{u\}\big\}$
  Devolve $\mathcal{C}$

Função $\textsc{ColoreREC2}(G)$
  Se $|V(G)| = 1$ **então Devolve** $\{V(G)\}$
  Seja u um vértice qualquer de G
  Seja $G' \leftarrow G - u$
  $\mathcal{C}' \leftarrow \textsc{ColoreREC2}(G')$
  Se $N_G(u) \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{C}'$ **então**
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}' \cup \{\{u\}\}$
  Senão
    Seja $C \in \mathcal{C}'$ tal que $N_G(u) \cap C = \emptyset$
    $\mathcal{C} \leftarrow \big(\mathcal{C}' \setminus \{C\}\big) \cup \{C \cup \{u\}\}$
  Devolve $\mathcal{C}$

Função $\textsc{Colore}(G)$

Seja C um vetor de tamanho n

Para $u \in V(G)$ **faça**

Seja c o menor valor de cor não atribuída aos vizinhos já coloridos de u

$C[u] \leftarrow c$

Devolve C

Demonstração 2 para o Teorema **??**. No algoritmo COLORE, no momento de atribuir uma cor a um vértice v_i, a cor usada será no máximo $d(v_i) + 1$. Então o maior valor de cor usada será no máximo $\Delta(G) + 1$. $\square$

Os algoritmos acima não são ótimos.

- Note que o número de cores usadas pelas heurísticas acima depende muito da ordem escolhida para os vértices.

É possível melhorar o limitante $\Delta(G) + 1$?

Os algoritmos acima não são ótimos.

- Note que o número de cores usadas pelas heurísticas acima depende muito da ordem escolhida para os vértices.
- É possível mostrar que sempre existe alguma ordem que faz os algoritmos retornarem uma coloração ótima.

É possível melhorar o limitante $\Delta(G) + 1$?

Os algoritmos acima não são ótimos.

- Note que o número de cores usadas pelas heurísticas acima depende muito da ordem escolhida para os vértices.
- É possível mostrar que sempre existe alguma ordem que faz os algoritmos retornarem uma coloração ótima.
    - O resultado mostrar que ela *existe*, e não como construí-la.

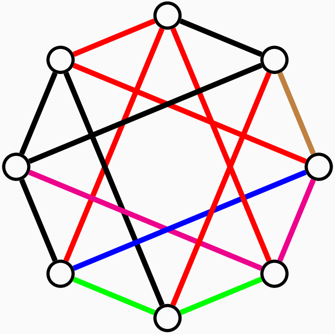
É possível melhorar o limitante $\Delta(G) + 1$?

Theorem (Brooks, 1941)

Seja G um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo. Então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

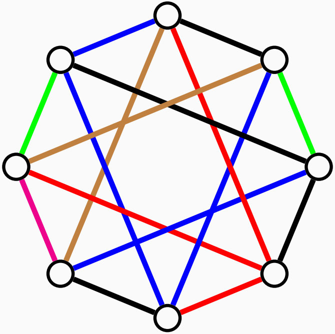
Coloração de arestas

Coloração de arestas



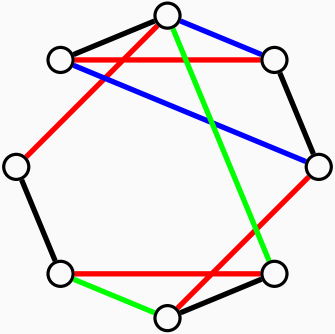
- Uma *k-aresta-coloração* de G é uma função sobrejetora $c\colon E(G) \to \{1, \ldots, k\}$.

Coloração de arestas



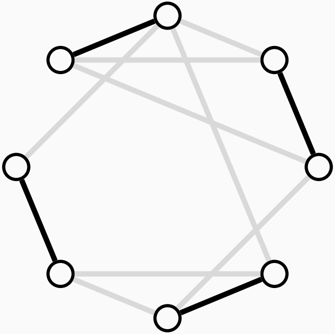
- Uma *k-aresta-coloração* de G é uma função sobrejetora $c\colon E(G) \to \{1, \ldots, k\}$.
- Uma *coloração de arestas* de G (ou uma *aresta-coloração*) é uma k-aresta-coloração para algum k.

Coloração de arestas



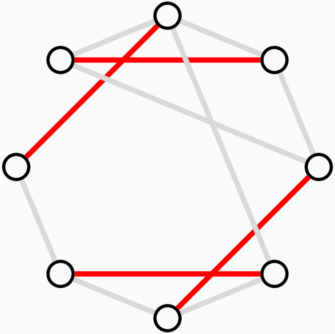
- Uma coloração de arestas c de G é *própria* se $c(xy) \neq c(xz)$ para todo $xy, xz \in E(G)$ e $y \neq z$.

Coloração de arestas



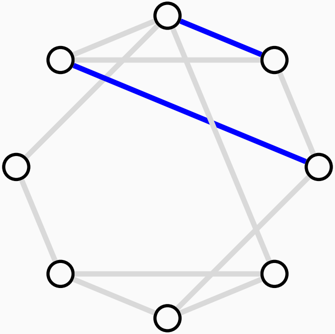
- Cada cor forma um emparelhamento!

Coloração de arestas



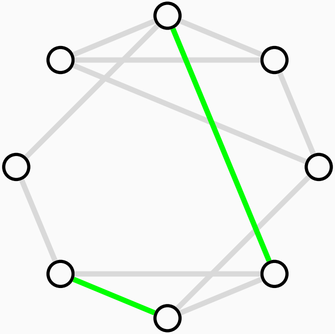
- Cada cor forma um emparelhamento!

Coloração de arestas



- Cada cor forma um emparelhamento!

Coloração de arestas



- Cada cor forma um emparelhamento!

Seja G um grafo:

- Um grafo G é *k-aresta-colorível* se admite uma k-aresta-coloração própria.

Seja G um grafo:

- Um grafo G é *k-aresta-colorível* se admite uma k-aresta-coloração própria.
- O *índice cromático* de G, denotado $\chi'(G)$, é o menor valor k tal que G é k-aresta-colorível.

Seja G um grafo:

- Um grafo G é *k-aresta-colorível* se admite uma k-aresta-coloração própria.
- O *índice cromático* de G, denotado $\chi'(G)$, é o menor valor k tal que G é k-aresta-colorível.
- Se $\mathcal{M}$ é uma k-aresta-coloração própria de G e $\chi'(G) = k$, então dizemos que $\mathcal{M}$ é uma *coloração de arestas mínima* ou *coloração de arestas ótima* de G.

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
- $\chi'(G) \leq |E(G)|$.

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
- $\chi'(G) \leq |E(G)|$.
- $\chi'(C_{2k}) = 2 = \Delta(G)$.

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
- $\chi'(G) \leq |E(G)|$.
- $\chi'(C_{2k}) = 2 = \Delta(G)$.
- $\chi'(C_{2k+1}) = 3 > \Delta(G)$.

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
- $\chi'(G) \leq |E(G)|$.
- $\chi'(C_{2k}) = 2 = \Delta(G)$.
- $\chi'(C_{2k+1}) = 3 > \Delta(G)$.
- $\chi'(G) \geq \lceil \frac{m}{\lfloor n/2 \rfloor} \rceil$, onde $m = |E(G)|$ e $n = |V(G)|$.

Lemma (Exercício)

Se G é grafo bipartido k-regular, G pode ser decomposto em k emparelhamentos perfeitos.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração

- Por indução em $m = |E(G)|$

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração

- Por indução em $m = |E(G)|$
- Se $m = 1$, então o resultado vale

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

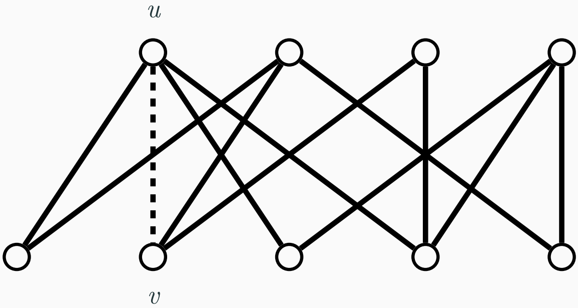
Demonstração

- Por indução em $m = |E(G)|$
- Se $m = 1$, então o resultado vale
- Então suponha que $m > 1$ e seja $uv \in E(G)$ uma aresta de G

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

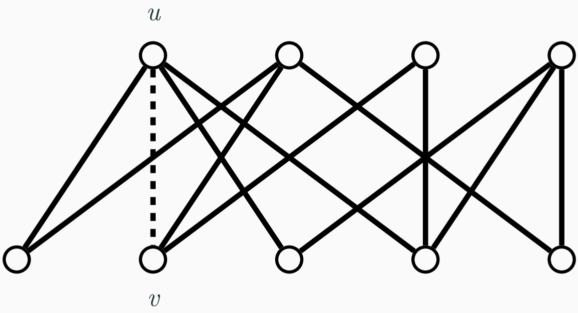


- Se $G' = G - uv$

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

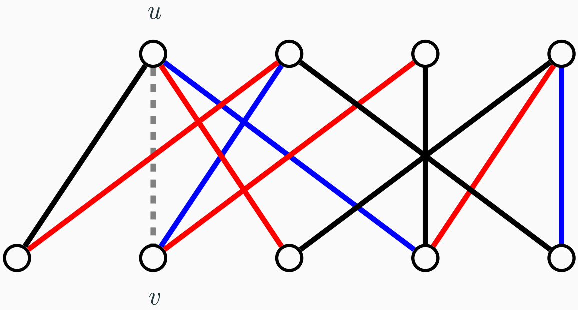


- Se $G' = G - uv$
- Como $|E(G')| = m - 1$, pela hipótese de indução, vale que $\chi(G') = \Delta(G')$

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

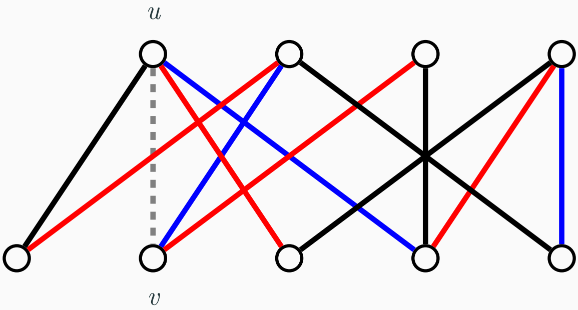


- Seja $\mathcal{M}' = \{M_1, M_2, \ldots, M_{\chi'(G')}\}$ uma coloração mínima de G'

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

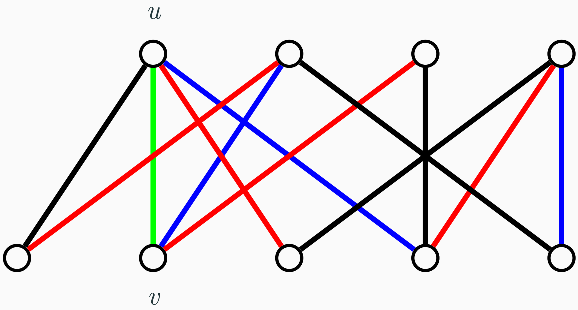


- Se $\Delta(G') = \Delta(G) - 1$, então podemos usar uma cor nova para uv

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

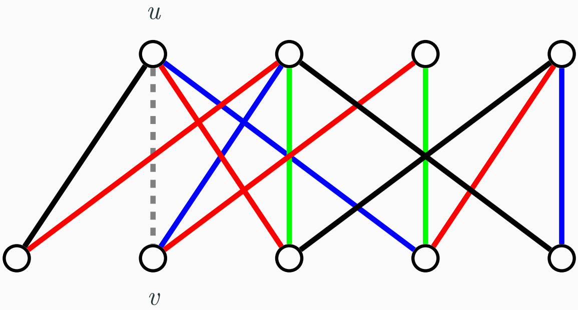


- Se $\Delta(G') = \Delta(G) - 1$, então podemos usar uma cor nova para uv

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

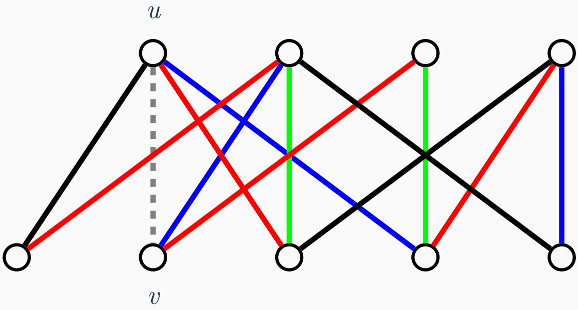


- Então podemos assumir que $\Delta(G') = \Delta(G') = |\mathcal{M}'|$

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

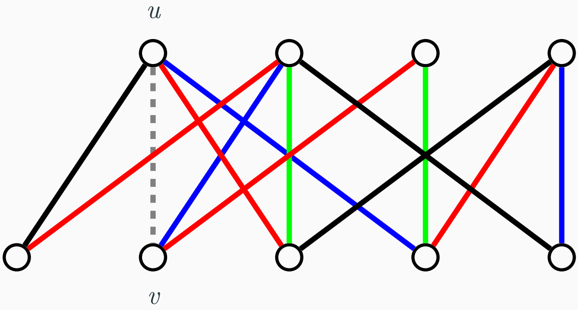


- $d_{G'}(u) < \Delta(G) = |\mathcal{M}'|$: existe pelo menos uma cor M_i de $\mathcal{M}'$ que u não vê.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

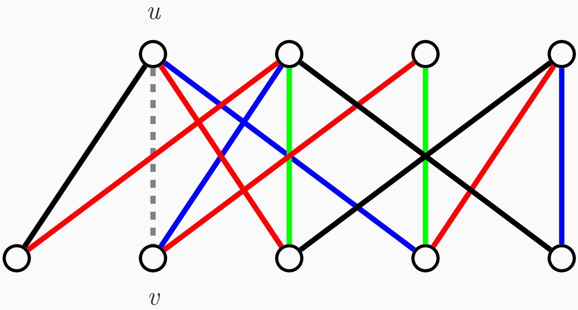


- $d_{G'}(u) < \Delta(G) = |\mathcal{M}'|$: existe pelo menos uma cor M_i de $\mathcal{M}'$ que u não vê.
- $d_{G'}(v) < \Delta(G) = |\mathcal{M}'|$: existe pelo menos uma cor M_j de $\mathcal{M}'$ que v não vê.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

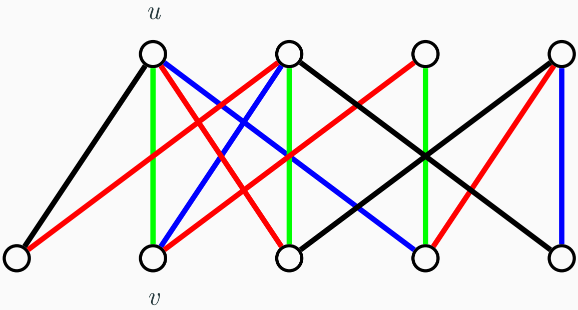


- Se pudermos escolher esse i e j com $i = j$, então basta colorir uv com a cor M_i

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

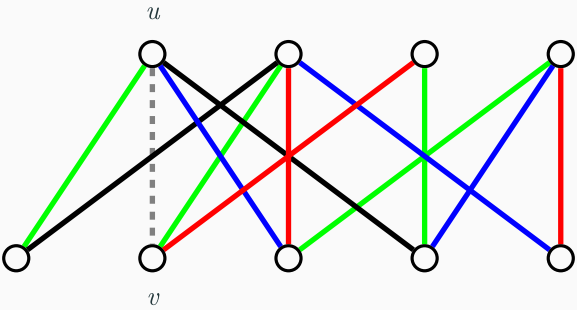


- Se pudermos escolher esse i e j com $i = j$, então basta colorir uv com a cor M_i

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

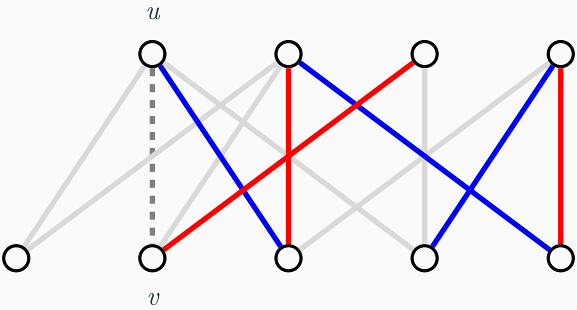


- Então podemos assumir que $i \neq j$: u vê a cor M_j e v vê a cor M_i.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

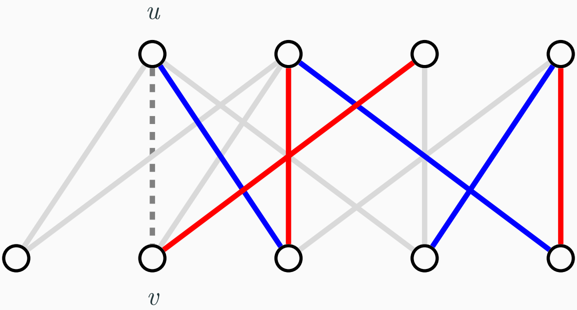


- Seja $G_{ij} = G[M_i \Delta M_j]$.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

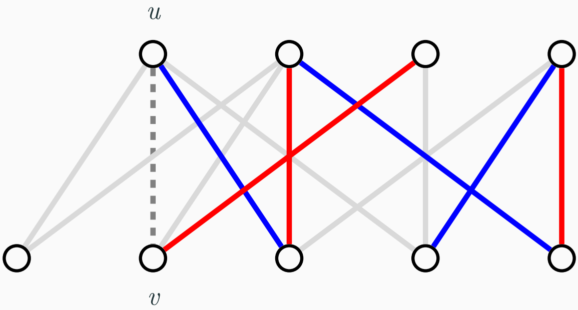


- u e v tem grau 1 em G_{ij}.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

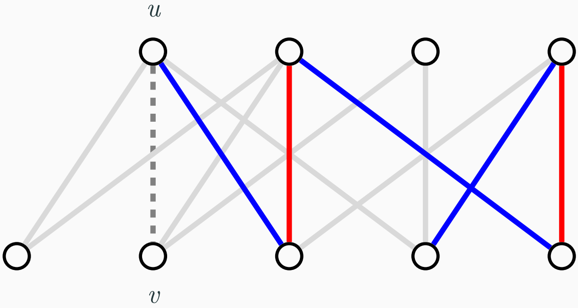


- u e v tem grau 1 em G_{ij}.
- u e v estão em componentes de G_{ij} distintas.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

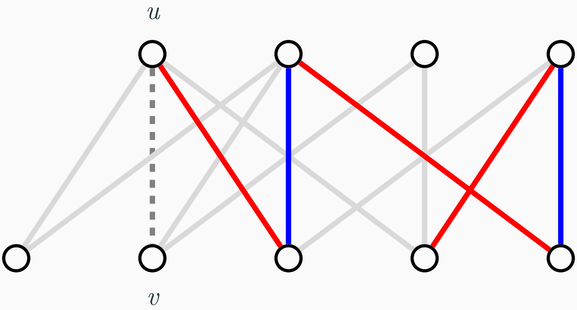


- Vamos focar na componente P de G_{ij} que contém u

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

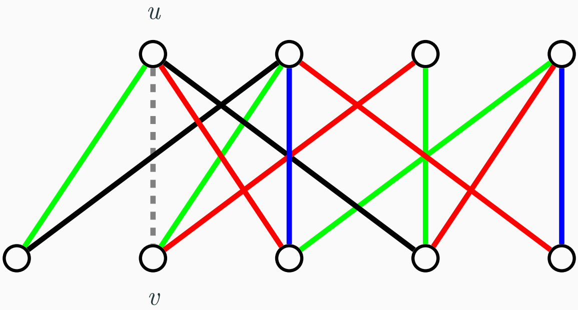


- Invertendo as cores de P não gera conflito com o resto da aresta-coloração.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

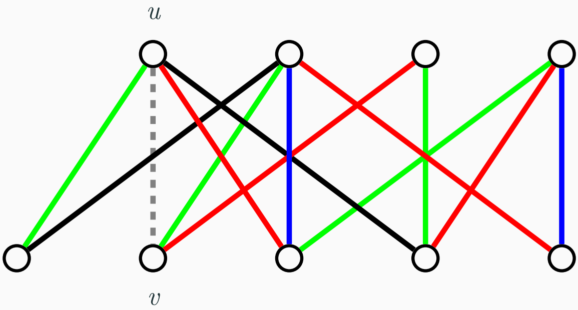


- Seja $\mathcal{M}''$ a coloração de G' obtida a partir de $\mathcal{M}'$ pela troca das cores das arestas de P.

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

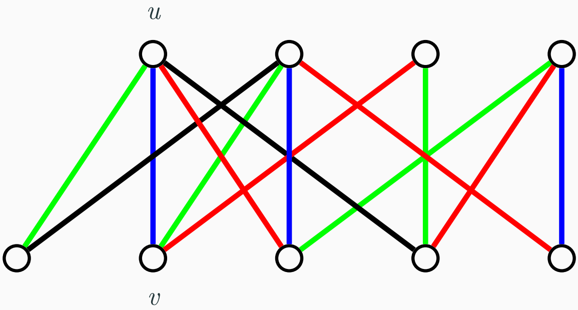


- u não vê a cor M_j

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).



- Atribuímos a cor M_j a uv

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

- Assim, concluímos que $\chi'(G) \leq \Delta(G)$

Theorem (Kőnig, 1916)

Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Demonstração (continuação).

- Assim, concluímos que $\chi'(G) \leq \Delta(G)$
- Como $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ $\square$

Theorem (Vizing, 1964)

Seja G um grafo. Então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Theorem (Vizing, 1964)

Seja G um grafo. Então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

- Com isso, temos que, para *qualquer* grafo G, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Theorem (Vizing, 1964)

Seja G um grafo. Então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

- Com isso, temos que, para *qualquer* grafo G, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Decidir se $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ para qualquer G é um problema NP-completo.