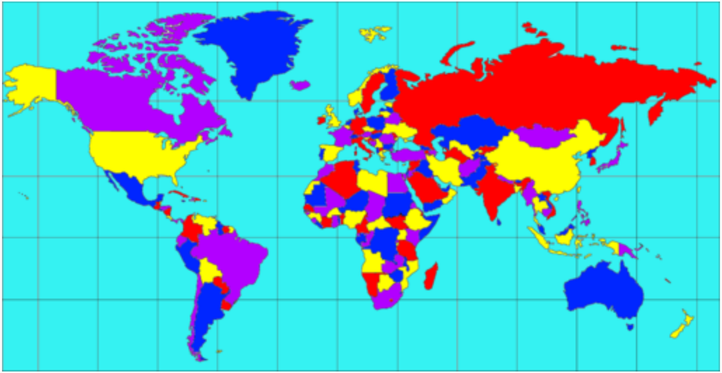
Grafos Planares

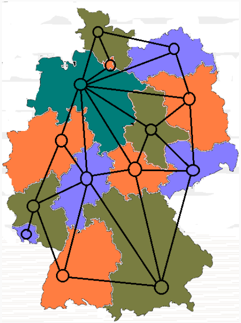
Problema das 4 cores

- Em 1982, um aluno de Augustus De Morgan perguntou-lhe porque todo grafo pode ser colorido usando no máximo 4 cores.



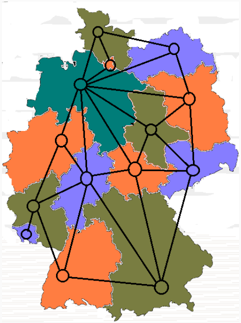
Problema das 4 cores

- Transformando em um problema dos vértices de um grafo



Problema das 4 cores

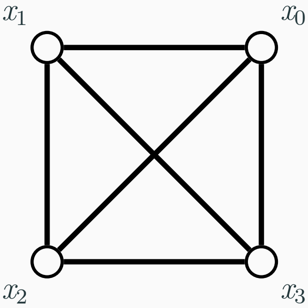
- Transformando em um problema dos vértices de um grafo



- Podemos colorir um grafo planar com no máximo 4 cores?

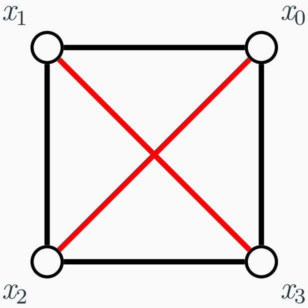
Grafo planar

- Um grafo é planar se existe algum desenho seu no plano que não cruze arestas.



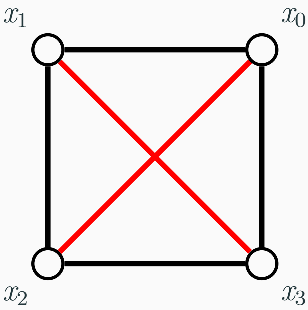
Grafo planar

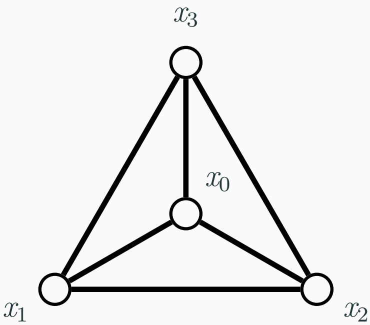
- Um grafo é planar se existe algum desenho seu no plano que não cruze arestas.



Grafo planar

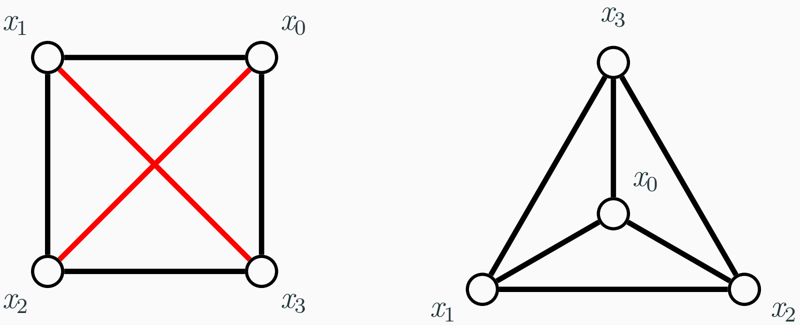
- Um grafo é planar se existe algum desenho (imersão no plano) seu no plano que não cruze arestas.





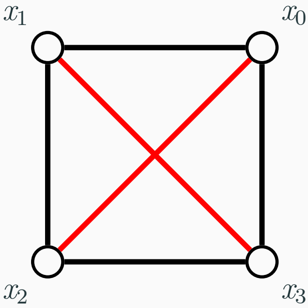
Grafo planar

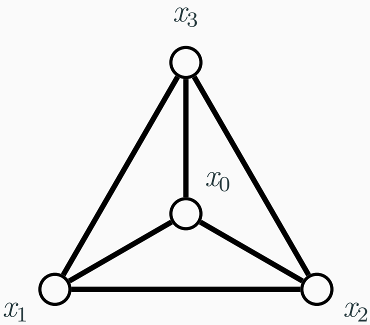
- Um grafo é planar se existe algum desenho (imersão no plano) seu no plano que não cruze arestas.



Grafo planar

- Um grafo é planar se existe algum desenho (imersão no plano) seu no plano que não cruze arestas.





- K_4 é planar

Testando planaridade

- Como provar que um grafo é planar?

Testando planaridade

- Como provar que um grafo é planar?
  - Exibindo um desenho (imersão no plano) sem cruzamentos

Testando planaridade

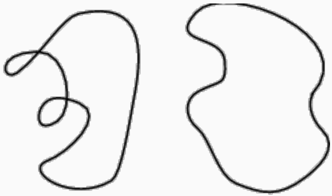
- Como provar que um grafo é planar?
    - Exibindo um desenho (imersão no plano) sem cruzamentos
- Como provar que um grafo não é planar?

Testando planaridade

- Como provar que um grafo é planar?
    - Exibindo um desenho (imersão no plano) sem cruzamentos
- Como provar que um grafo não é planar?
    - Argumentando que não existe desenho sem cruzamentos

Definições informais de topologia

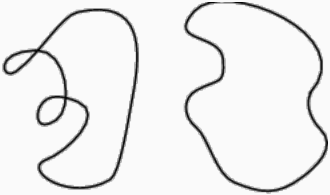
uma curva é um segmento de linha no plano



uma curva fechada é um segmento de linha no plano sem extremos

Definições informais de topologia

uma curva é um segmento de linha no plano



uma curva fechada é um segmento de linha no plano sem extremos

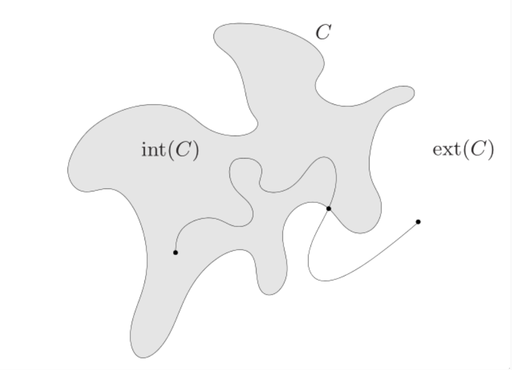
- Uma **curva simples** é uma curva que não se intersecta

Theorem (Curva de Jordan)

Qualquer curva simples fechada C no plano particiona o plano em duas regiões disjuntas: $int(C)$ e $ext(C)$.

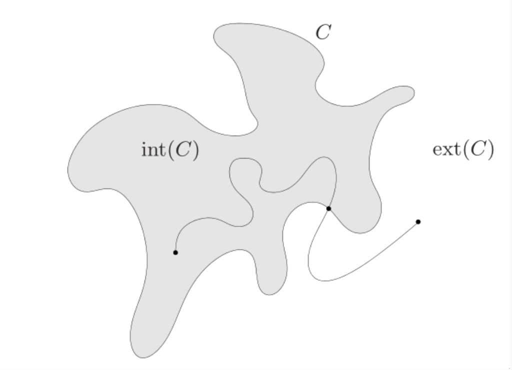
Theorem (Curva de Jordan)

Qualquer curva simples fechada C no plano particiona o plano em duas regiões disjuntas: $int(C)$ e $ext(C)$.



Theorem (Curva de Jordan)

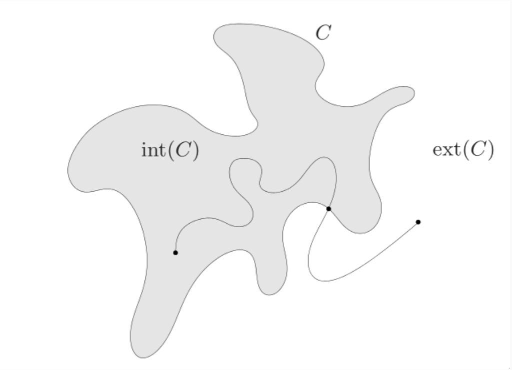
Qualquer curva simples fechada C no plano particiona o plano em duas regiões disjuntas: int(C) e ext(C).



- Em grafos planares, ciclos definem curva simples fechadas

Corollary

Seja C uma cuva fechada simples. Se um segmento de linha liga um ponto de $int(C)$ a um ponto em $ext(C)$, então esse segmento intersecta C ao menos uma vez.



K_5 e planaridade

Theorem

O K_5 não é planar.

K_5 e planaridade

Theorem

O K_5 não é planar.

Demonstração

- Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_5$ os vértices do K_5.

K_5 e planaridade

Theorem

O K_5 não é planar.

Demonstração

- Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_5$ os vértices do K_5.
- Suponha, para uma contradição, que existe um desenho planar do K_5

K_5 e planaridade

Theorem

O K_5 não é planar.

Demonstração

- Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_5$ os vértices do K_5.
- Suponha, para uma contradição, que existe um desenho planar do K_5
- u_1, u_2, u_3, u_1 definem uma curva simples fechada

K_5 e planaridade

Theorem

O K_5 não é planar.

Demonstração

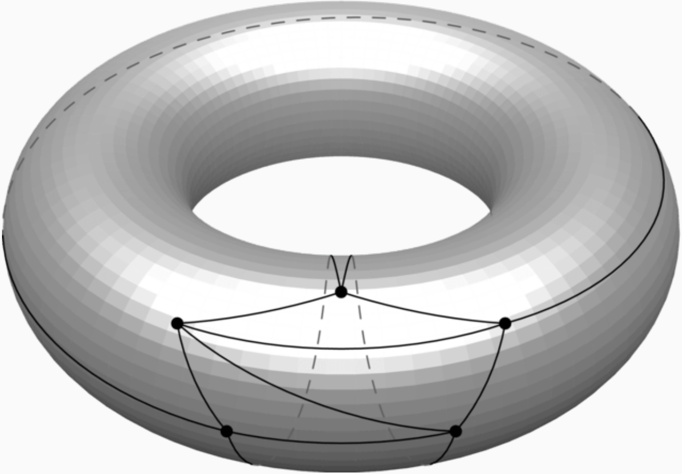
- Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_5$ os vértices do K_5.
- Suponha, para uma contradição, que existe um desenho planar do K_5
- u_1, u_2, u_3, u_1 definem uma curva simples fechada
- **continua...**

$K_{3,3}$ e planaridade

Theorem (exercício)

O $K_{3,3}$ não é planar.

Imersão em outras superfícies



Imersão na esfera

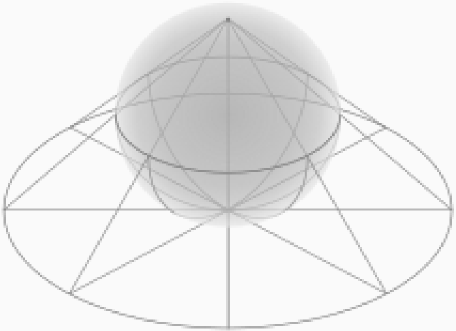
Theorem

Um grafo é imersível no plano (i.e., planar) se e somente se ele é imersível na esfera □

Imersão na esfera

Theorem

Um grafo é imersível no plano (i.e., planar) se e somente se ele é imersível na esfera □



Subdivisão de arestas

Seja G um grafo e seja uv uma aresta de G. O grafo obtido pela subdivisão da aresta uv de G é o grafo G' tal que:

- $V(G') = V(G) \cup \{w\}$, onde $w \notin V(G)$; e
- $E(G') = (E(G) \setminus \{uv\}) \cup \{uw, wv\}$.

Encontrando K_4

Planaridade e subdivisão

Theorem

Um grafo G é planar se e somente se toda subdivisão de G é planar.

Planaridade e subdivisão

Theorem

Um grafo G é planar se e somente se toda subdivisão de G é planar.

Theorem

Seja G um grafo. Se G contém uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$, então G não é planar. $\square$

Testando planaridade (versão 2.0)

- Como provar que um grafo é planar?
  - Exibindo um desenho (imersão no plano) sem cruzamentos
- Como provar que um grafo não é planar?
  - Argumentando que não existe desenho sem cruzamentos
  - Exibindo uma subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$

Teorema de Kuratowski

Theorem (Kuratowski, 1930)

Um grafo é planar se e somente se ele não contém uma subdivisão do $K_{3,3}$ *ou do* K_5

Teorema de Kuratowski

Theorem (Kuratowski, 1930)

Um grafo é planar se e somente se ele não contém uma subdivisão do $K_{3,3}$ ou do K_5

Theorem (contrapositiva)

Seja G um grafo. G contém uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$ se e somente se G não é planar. $\square$

Testando planaridade (versão 3.0)

- Como provar que um grafo é planar?
  - Exibindo um desenho (imersão no plano) sem cruzamentos
- Como provar que um grafo não é planar?
  - Argumentando que não existe desenho sem cruzamentos
  - Exibindo uma subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$

Faces

Faces

figura

- Um desenho planar de um grafo planar G particiona o plano em regiões chamadas faces

Faces

figura

- Um desenho planar de um grafo planar G particiona o plano em regiões chamadas faces
- Todo grafo planar tem uma única face ilimitada, chamada de face externa

Faces

figura

- Um desenho planar de um grafo planar G particiona o plano em regiões chamadas faces
- Todo grafo planar tem uma única face ilimitada, chamada de face externa
  - f_1

Faces

figura

- Um desenho planar de um grafo planar G particiona o plano em regiões chamadas faces
- Todo grafo planar tem uma única face ilimitada, chamada de face externa
    - f_1
- Denotamos o conjunto de faces de um desenho planar de um grafo G por $F(G)$

Faces

figura

- Um desenho planar de um grafo planar G particiona o plano em regiões chamadas faces
- Todo grafo planar tem uma única face ilimitada, chamada de face externa
    - f_1
- Denotamos o conjunto de faces de um desenho planar de um grafo G por $F(G)$
    - $F(G) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Faces

figura

Em um grafo conexo um passeio pelo perímetro da face é um passeio fechado.

Seja W um passeio fechado pelo perímetro de uma face f

- Dizemos que a face f incide em uma aresta e se $e \in E(W)$

Faces

figura

Em um grafo conexo um passeio pelo perímetro da face é um passeio fechado.

Seja W um passeio fechado pelo perímetro de uma face f

- Dizemos que a face f incide em uma aresta e se $e \in E(W)$
  - Com exceção de uma aresta de corte, toda aresta é incidida por duas faces distintas

Faces

figura

Em um grafo conexo um passeio pelo perímetro da face é um passeio fechado.

Seja W um passeio fechado pelo perímetro de uma face f

- Dizemos que a face f incide em uma aresta e se $e \in E(W)$
    - Com exceção de uma aresta de corte, toda aresta é incidida por duas faces distintas
- Dizemos que a face f incide em um vértice v se $v \in V(W)$

Faces

- O **grau** de f, denotado por $d(f)$, é o comprimento de W

Faces

- O **grau** de f, denotado por $d(f)$, é o comprimento de W
  - Passeio fechado pela face f_2:
    $(e_2, e_{11}, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_7, e_6)$

Faces

- O **grau** de f, denotado por $d(f)$, é o comprimento de W
    - Passeio fechado pela face f_2: $(e_2, e_{11}, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_7, e_6)$
    - $d(f_2) = 8$

Faces

- O **grau** de f, denotado por $d(f)$, é o comprimento de W
  - Passeio fechado pela face f_2: $(e_2, e_{11}, e_5, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_7, e_6)$
  - $d(f_2) = 8$
    - Note que a aresta de corte é contada duas vezes

Fórmula de Euler

Theorem (Fórmula de Euler)

Seja é G um grafo planar conexo, então $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$.

Fórmula de Euler

Theorem (Fórmula de Euler)

Seja é G um grafo planar conexo, então
$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$

Demonstração

Fórmula de Euler

Theorem (Fórmula de Euler)

Seja é G um grafo planar conexo, então $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$.

Demonstração

Leia as notas de aula!

Fórmula de Euler

Theorem (Exercício)

Seja G um grafo planar com $c(G)$ componentes conexas. Então $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + c(G)$.

Corolários da Fórmula de Euler

Theorem (Exercício)

Se G é um grafo planar, então $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$.

Theorem (Exercício)

Se G é um grafo planar, então $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$.

Theorem (Exercício)

Se G é um grafo planar com $|E(G)| \geq 2$, então $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

Corolários da Fórmula de Euler

Theorem (Exercício)

Se G é um grafo planar, então $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$.

Theorem (Exercício)

Se G é um grafo planar com $|E(G)| \geq 2$, *então* $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

Theorem (Exercício)

Se G é um grafo planar, então $\delta(G) \leq 5$