Aula: Árvores

MCTA027-17 - Teoria dos Grafos

Prof. Maycon Sambinelli

m.sambinelli@ufabc.edu.br

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC

UFABC

Basedo no material da Profa. Carla Negri Lintzmayer

Dada uma rede com n computadores, qual o menor número de ligações diretas que deve existir para que seja sempre possível fazer comunicação (não necessariamente direta) entre quaisquer dois computadores?

Introdução

Dada uma rede com n computadores, qual o menor número de ligações diretas que deve existir para que seja sempre possível fazer comunicação (não necessariamente direta) entre quaisquer dois computadores?

- Qual o menor número de arestas de um grafo conexo?

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então $m(G) \geq n(G) - 1$.

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então $m(G) \geq n(G) - 1$.

- **Base:** $n(G) = 1$. resultado vale de forma trivial.

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então $m(G) \geq n(G) - 1$.

- **Base:** $n(G) = 1$. resultado vale de forma trivial.
- **Passo:** Se $\delta(G) \geq 2$, então

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 2 = 2n$$

$$2m \geq 2n \Leftrightarrow m \geq n, \text{ e o resultado segue.}$$

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então $m(G) \geq n(G) - 1$.

- **Base:** $n(G) = 1$. resultado vale de forma trivial.
- **Passo:** Se $\delta(G) \geq 2$, então

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 2 = 2n$$

$$2m \geq 2n \Leftrightarrow m \geq n, \text{ e o resultado segue.}$$

- Então podemos supor que $\exists v \in V(G)$ t.q. $d(v) = 1$.

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então $m(G) \geq n(G) - 1$.

- **Base:** $n(G) = 1$. resultado vale de forma trivial.
- **Passo:** Se $\delta(G) \geq 2$, então

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 2 = 2n$$

$$2m \geq 2n \Leftrightarrow m \geq n, \text{ e o resultado segue.}$$

- Então podemos supor que $\exists v \in V(G)$ t.q. $d(v) = 1$.
- Seja $G' = G - v$, e note que G' é conexo, $|V(G')| = n - 1$, $|E(G')| = m - 1$.

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então $m(G) \geq n(G) - 1$.

- **Base:** $n(G) = 1$. resultado vale de forma trivial.
- **Passo:** Se $\delta(G) \geq 2$, então

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 2 = 2n$$

$$2m \geq 2n \Leftrightarrow m \geq n, \text{ e o resultado segue.}$$

- Então podemos supor que $\exists v \in V(G)$ t.q. $d(v) = 1$.
- Seja $G' = G - v$, e note que G' é conexo, $|V(G')| = n - 1$, $|E(G')| = m - 1$.
- Pela hipótese de indução, $|E(G')| \geq |V(G')| - 1$. Assim,

$$m - 1 = |E(G')| \geq |V(G')| - 1 = n - 1 - 1 = n - 2.$$

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então $m(G) \geq n(G) - 1$.

- **Base:** $n(G) = 1$. resultado vale de forma trivial.
- **Passo:** Se $\delta(G) \geq 2$, então

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 2 = 2n$$

$$2m \geq 2n \Leftrightarrow m \geq n, \text{ e o resultado segue.}$$

- Então podemos supor que $\exists v \in V(G)$ t.q. $d(v) = 1$.
- Seja $G' = G - v$, e note que G' é conexo, $|V(G')| = n - 1$, $|E(G')| = m - 1$.
- Pela hipótese de indução, $|E(G')| \geq |V(G')| - 1$. Assim,

$$m - 1 = |E(G')| \geq |V(G')| - 1 = n - 1 - 1 = n - 2.$$

- Como $m - 1 \geq n - 2 \Leftrightarrow m \geq n - 1$, o resultado segue. $\square$

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então

$$m(G) \geq n(G) - 1.$$

Questões:

- É verdade que se $m \geq n - 1$, então G é conexo?

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então

$$m(G) \geq n(G) - 1.$$

Questões:

- É verdade que se $m \geq n - 1$, então G é conexo?
- Existem grafos com $m \geq n - 1$ que são conexos?

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então

$$m(G) \geq n(G) - 1.$$

Questões:

- É verdade que se $m \geq n - 1$, então G é conexo?
- Existem grafos com $m \geq n - 1$ que são conexos?
- Como são os grafos com exatamente $n - 1$ arestas?

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então

$$m(G) \geq n(G) - 1.$$

Questões:

- É verdade que se $m \geq n - 1$, então G é conexo?
- Existem grafos com $m \geq n - 1$ que são conexos?
- Como são os grafos com exatamente $n - 1$ arestas?

Teorema 23. Se G é um grafo conexo, então

$$m(G) \geq n(G) - 1.$$

Questões:

- É verdade que se $m \geq n - 1$, então G é conexo?
- Existem grafos com $m \geq n - 1$ que são conexos?
- Como são os grafos com exatamente $n - 1$ arestas?

Vamos relacionar:

- ser conexo;
- não conter ciclos; e
- ter exatamente $n - 1$ arestas.

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

- Suponha, para uma contradição, que G contém ciclos, e seja C um ciclo em G.

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

- Suponha, para uma contradição, que G contém ciclos, e seja C um ciclo em G.
- Seja $e \in E(C)$, e seja $G' = G - e$.

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

- Suponha, para uma contradição, que G contém ciclos, e seja C um ciclo em G.
- Seja $e \in E(C)$, e seja $G' = G - e$.
- G' é conexo

  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

- Suponha, para uma contradição, que G contém ciclos, e seja C um ciclo em G.
- Seja $e \in E(C)$, e seja $G' = G - e$.
- G' é conexo

  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.
- Note que

$$m(G') = m(G) - 1 = (n(G) - 1) - 1 = n(G) - 2 = n(G') - 2$$

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

- Suponha, para uma contradição, que G contém ciclos, e seja C um ciclo em G.
- Seja $e \in E(C)$, e seja $G' = G - e$.
- G' é conexo

  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.
- Note que

$$m(G') = m(G) - 1 = (n(G) - 1) - 1 = n(G) - 2 = n(G') - 2$$

- Logo, $m(G') = n(G') - 2$, uma contradição ao

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

- Suponha, para uma contradição, que G contém ciclos, e seja C um ciclo em G.
- Seja $e \in E(C)$, e seja $G' = G - e$.
- G' é conexo

  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.
- Note que

$$m(G') = m(G) - 1 = (n(G) - 1) - 1 = n(G) - 2 = n(G') - 2$$

- Logo, $m(G') = n(G') - 2$, uma contradição ao

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

- Suponha, para uma contradição, que G contém ciclos, e seja C um ciclo em G.
- Seja $e \in E(C)$, e seja $G' = G - e$.
- G' é conexo

  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.
- Note que

$$m(G') = m(G) - 1 = (n(G) - 1) - 1 = n(G) - 2 = n(G') - 2$$

- Logo, $m(G') = n(G') - 2$, uma contradição ao

Teorema 23. Se G' é um grafo conexo, então $m(G') \geq n(G') - 1$.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Por indução em n.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Por indução em n.
- Se $n = 1$, o grafo não tem arestas e, de fato, $m = n - 1$.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Por indução em n.
- Se $n = 1$, o grafo não tem arestas e, de fato, $m = n - 1$.
- Existe um vértice v com $d_G(v) = 1$

  Teorema 9. *Todo grafo que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau* 1.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Por indução em n.
- Se $n = 1$, o grafo não tem arestas e, de fato, $m = n - 1$.
- Existe um vértice v com $d_G(v) = 1$
  Teorema 9. *Todo grafo que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau* 1.
- $G' := G - v$ é conexo, não tem ciclos e tem $n - 1$ vértices.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Por indução em n.
- Se $n = 1$, o grafo não tem arestas e, de fato, $m = n - 1$.
- Existe um vértice v com $d_G(v) = 1$
  Teorema 9. *Todo grafo que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau* 1.
- $G' := G - v$ é conexo, não tem ciclos e tem $n - 1$ vértices.
- Pela h.i. $m(G') = n(G') - 1$.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Por indução em n.
- Se $n = 1$, o grafo não tem arestas e, de fato, $m = n - 1$.
- Existe um vértice v com $d_G(v) = 1$

  Teorema 9. *Todo grafo que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau* 1.
- $G' := G - v$ é conexo, não tem ciclos e tem $n - 1$ vértices.
- Pela h.i. $m(G') = n(G') - 1$.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Por indução em n.
- Se $n = 1$, o grafo não tem arestas e, de fato, $m = n - 1$.
- Existe um vértice v com $d_G(v) = 1$
  Teorema 9. *Todo grafo que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau* 1.
- $G' := G - v$ é conexo, não tem ciclos e tem $n - 1$ vértices.
- Pela h.i. $m(G') = n(G') - 1$.

$$m(G) = m(G') + 1 = (n(G') - 1) + 1 = n(G') = n(G) - 1.$$

$\square$

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G.

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G.
- Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$.

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \dots, G_k$ as componentes de G.
- Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$.
- Cada G_i não tem ciclos e é conexo, então $m(G_i) = n(G_i) - 1$.

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G.
- Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$.
- Cada G_i não tem ciclos e é conexo, então $m(G_i) = n(G_i) - 1$.
- **Lema 25.** *Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.*

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G.
- Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$.
- Cada G_i não tem ciclos e é conexo, então $m(G_i) = n(G_i) - 1$.
- **Lema 25.** *Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.*

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G.
- Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$.
- Cada G_i não tem ciclos e é conexo, então $m(G_i) = n(G_i) - 1$.
- **Lema 25.** *Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.*

$$m = \sum_{i=1}^{k} m(G_i) = \sum_{i=1}^{k} (n(G_i) - 1) = n - k.$$

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \dots, G_k$ as componentes de G.
- Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$.
- Cada G_i não tem ciclos e é conexo, então $m(G_i) = n(G_i) - 1$.
- **Lema 25.** *Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.*

$$m = \sum_{i=1}^{k} m(G_i) = \sum_{i=1}^{k} (n(G_i) - 1) = n - k.$$

- Por hipótese $m = n - 1$, e assim, $k = 1$.

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G.
- Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$.
- Cada G_i não tem ciclos e é conexo, então $m(G_i) = n(G_i) - 1$.
- **Lema 25.** *Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.*

$$m = \sum_{i=1}^{k} m(G_i) = \sum_{i=1}^{k} (n(G_i) - 1) = n - k.$$

- Por hipótese $m = n - 1$, e assim, $k = 1$.

Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G.
- Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$.
- Cada G_i não tem ciclos e é conexo, então $m(G_i) = n(G_i) - 1$.
- **Lema 25.** *Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.*

$$m = \sum_{i=1}^{k} m(G_i) = \sum_{i=1}^{k} (n(G_i) - 1) = n - k.$$

- Por hipótese $m = n - 1$, e assim, $k = 1$.
- Logo, G é conexo.

Definições

- Um grafo é **acíclico** ou **floresta** se não contém ciclos

Definições

- Um grafo é **acíclico** ou **floresta** se não contém ciclos
- Uma **árvore** é um grafo acíclicos conexo

Definições

- Um grafo é **acíclico** ou **floresta** se não contém ciclos
- Uma **árvore** é um grafo acíclicos conexo
- Uma **folha** é um vértice com grau 1

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Uma **árvore** é um grafo acíclicos conexo

Corolário 27. Seja G um grafo conexo. O grafo G é uma árvore se e somente se $m(G) = n(G) - 1$.

Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

- Uma **árvore** é um grafo acíclicos conexo

Corolário 27. Seja G um grafo conexo. O grafo G é uma árvore se e somente se $m(G) = n(G) - 1$.

Lema 28 (exercício). Toda árvore G com $n \geq 2$ possui pelo menos duas folhas.

Árvores são grafos bipartidos

Fato

Toda árvore é um grafo bipartido (por quê?)

Árvores são grafos bipartidos

Fato

Toda árvore é um grafo bipartido (por quê?)

Teorema 6. Um grafo G é bipartido se e somente G não contém ciclos ímpares.

- Uma **árvore** é um grafo acíclicos conexo

Notações

Seja $P = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ um caminho

- Dizemos que $Q = (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j)$ é um **subcaminho** de P.

Notações

Seja $P = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ um caminho

- Dizemos que $Q = (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j)$ é um **subcaminho** de P.
    - Denotamos $Q = P[u_i, u_j]$.

Notações

Seja $P = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ um caminho

- Dizemos que $Q = (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j)$ é um **subcaminho** de P.
  - Denotamos $Q = P[u_i, u_j]$.
  - "P pode ser escrito como $P = (u_1, \ldots, u_{i-1}, Q, u_{j+1}, \ldots, u_\ell)$"

Notações

Seja $P = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ um caminho

- Dizemos que $Q = (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j)$ é um **subcaminho** de P.
    - Denotamos $Q = P[u_i, u_j]$.
    - "P pode ser escrito como $P = (u_1, \ldots, u_{i-1}, Q, u_{j+1}, \ldots, u_\ell)$"
- Seja $R = (w_1, w_2, \ldots, w_t)$ um caminho t.q.
  $V(P) \cap V(R) = \{x\}$, onde $x = u_\ell = w_1$

Notações

Seja $P = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ um caminho

- Dizemos que $Q = (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j)$ é um **subcaminho** de P.
  - Denotamos $Q = P[u_i, u_j]$.
  - "P pode ser escrito como $P = (u_1, \ldots, u_{i-1}, Q, u_{j+1}, \ldots, u_\ell)$"
- Seja $R = (w_1, w_2, \ldots, w_t)$ um caminho t.q. $V(P) \cap V(R) = \{x\}$, onde $x = u_\ell = w_1$
  - Dizemos $E(P) \cup E(R)$ é um caminho: o subgrafo induzido por essas arestas é um caminho.

$$E = E(P) \cup E(R) \text{ e } V = \{u \colon uv \in E(P) \cup E(R)\}$$

Notações

Seja $P = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ um caminho

- Dizemos que $Q = (u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j)$ é um **subcaminho** de P.
    - Denotamos $Q = P[u_i, u_j]$.
    - "P pode ser escrito como $P = (u_1, \ldots, u_{i-1}, Q, u_{j+1}, \ldots, u_\ell)$"
- Seja $R = (w_1, w_2, \ldots, w_t)$ um caminho t.q. $V(P) \cap V(R) = \{x\}$, onde $x = u_\ell = w_1$
    - Dizemos $E(P) \cup E(R)$ é um caminho: o subgrafo induzido por essas arestas é um caminho.

$$E = E(P) \cup E(R) \text{ e } V = \{u \colon uv \in E(P) \cup E(R)\}$$

- Terminologia pode ser estendida pra passeios e trilhas.

Teorema 29. Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

Teorema 29. Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

Teorema 29. Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G **é conexo minimal.**)

Teorema 29. Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G **é conexo minimal.**)

(d) G é conexo e $m = n - 1$.

Teorema 29. Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G **é conexo minimal.**)

(d) G é conexo e $m = n - 1$.

(e) G é acíclico e $m = n - 1$.

Teorema 29. Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G **é conexo minimal.**)

(d) G é conexo e $m = n - 1$.

(e) G é acíclico e $m = n - 1$.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G **é acíclico maximal.**)

Teorema 29. Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G **é conexo minimal.**)

(d) G é conexo e $m = n - 1$.

(e) G é acíclico e $m = n - 1$.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G **é acíclico maximal.**)

Vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$

(a) G é uma árvore $\Rightarrow$ (b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(a) G é uma árvore $\Rightarrow$ (b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

- Para fins de contradição, suponha que $\exists u, v \in V(G)$ t.q. $\exists$ dois caminhos P e Q distintos entre u e v.

(a) G é uma árvore $\Rightarrow$ (b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

- Para fins de contradição, suponha que $\exists u, v \in V(G)$ t.q. $\exists$ dois caminhos P e Q distintos entre u e v.
- Sejam $P = (u_1, \ldots, u_k)$ e $Q = (v_1, \ldots, v_\ell)$, onde $u_1 = v_1 = u$ e $u_k = v_\ell = v$.

(a) G é uma árvore $\Rightarrow$ (b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

- Para fins de contradição, suponha que $\exists u, v \in V(G)$ t.q. $\exists$ dois caminhos P e Q distintos entre u e v.
- Sejam $P = (u_1, \ldots, u_k)$ e $Q = (v_1, \ldots, v_\ell)$, onde $u_1 = v_1 = u$ e $u_k = v_\ell = v$.
- Seja u_i o primeiro vértice de Q que não pertence a P, e note que $x := v_{i-1} \in V(P) \cap V(Q)$.

(a) G é uma árvore $\Rightarrow$ (b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

- Para fins de contradição, suponha que $\exists u, v \in V(G)$ t.q. $\exists$ dois caminhos P e Q distintos entre u e v.
- Sejam $P = (u_1, \ldots, u_k)$ e $Q = (v_1, \ldots, v_\ell)$, onde $u_1 = v_1 = u$ e $u_k = v_\ell = v$.
- Seja u_i o primeiro vértice de Q que não pertence a P, e note que $x := v_{i-1} \in V(P) \cap V(Q)$.
- Seja $Q' = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_t)$ o subcaminho maximal de Q t.q. $V(Q') \cap V(P) = \emptyset$, e note que $y := v_{t+1} \in V(P) \cap V(Q)$.

(a) G é uma árvore $\Rightarrow$ (b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

- Para fins de contradição, suponha que $\exists u, v \in V(G)$ t.q. $\exists$ dois caminhos P e Q distintos entre u e v.
- Sejam $P = (u_1, \ldots, u_k)$ e $Q = (v_1, \ldots, v_\ell)$, onde $u_1 = v_1 = u$ e $u_k = v_\ell = v$.
- Seja u_i o primeiro vértice de Q que não pertence a P, e note que $x := v_{i-1} \in V(P) \cap V(Q)$.
- Seja $Q' = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_t)$ o subcaminho maximal de Q t.q. $V(Q') \cap V(P) = \emptyset$, e note que $y := v_{t+1} \in V(P) \cap V(Q)$.
- Assim, $E(P(x, y)) \cup E(Q(x, y))$ é um ciclo, uma contradição.

(a) G é uma árvore $\Rightarrow$ (b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

- Para fins de contradição, suponha que $\exists u, v \in V(G)$ t.q. $\exists$ dois caminhos P e Q distintos entre u e v.
- Sejam $P = (u_1, \ldots, u_k)$ e $Q = (v_1, \ldots, v_\ell)$, onde $u_1 = v_1 = u$ e $u_k = v_\ell = v$.
- Seja u_i o primeiro vértice de Q que não pertence a P, e note que $x := v_{i-1} \in V(P) \cap V(Q)$.
- Seja $Q' = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_t)$ o subcaminho maximal de Q t.q. $V(Q') \cap V(P) = \emptyset$, e note que $y := v_{t+1} \in V(P) \cap V(Q)$.
- Assim, $E(P(x, y)) \cup E(Q(x, y))$ é um ciclo, uma contradição.

(a) G é uma árvore $\Rightarrow$ (b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

- Para fins de contradição, suponha que $\exists u, v \in V(G)$ t.q. $\exists$ dois caminhos P e Q distintos entre u e v.
- Sejam $P = (u_1, \ldots, u_k)$ e $Q = (v_1, \ldots, v_\ell)$, onde $u_1 = v_1 = u$ e $u_k = v_\ell = v$.
- Seja u_i o primeiro vértice de Q que não pertence a P, e note que $x := v_{i-1} \in V(P) \cap V(Q)$.
- Seja $Q' = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_t)$ o subcaminho maximal de Q t.q. $V(Q') \cap V(P) = \emptyset$, e note que $y := v_{t+1} \in V(P) \cap V(Q)$.
- Assim, $E(P(x, y)) \cup E(Q(x, y))$ é um ciclo, uma contradição.

$\Diamond$

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de $G \Rightarrow$ (c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.)

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de $G \Rightarrow$ (c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.)

- G é conexo.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de $G \Rightarrow$ (c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.)

- G é conexo.
- Suponha, para uma contradição, que a aresta e não é de corte.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de $G \Rightarrow$ (c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.)

- G é conexo.
- Suponha, para uma contradição, que a aresta e não é de corte.
- e pertence a um ciclo $C = (u, \ldots, v, u)$ de G.
  Teorema 15. *Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.*

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de $G \Rightarrow$ (c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.)

- G é conexo.
- Suponha, para uma contradição, que a aresta e não é de corte.
- e pertence a um ciclo $C = (u, \ldots, v, u)$ de G.
  Teorema 15. *Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.*
- existem dois caminhos entre u e v, uma contradição.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de $G \Rightarrow$ (c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.)

- G é conexo.
- Suponha, para uma contradição, que a aresta e não é de corte.
- e pertence a um ciclo $C = (u, \ldots, v, u)$ de G.
  Teorema 15. *Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.*
- existem dois caminhos entre u e v, uma contradição.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de $G \Rightarrow$ (c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.)

- G é conexo.
- Suponha, para uma contradição, que a aresta e não é de corte.
- e pertence a um ciclo $C = (u, \ldots, v, u)$ de G.
  Teorema 15. *Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.*
- existem dois caminhos entre u e v, uma contradição.

$\Diamond$

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.) $\Rightarrow$ (d) G é conexo e $m = n - 1$

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.) $\Rightarrow$ (d) G é conexo e $m = n - 1$

- Toda aresta é de corte

  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.) $\Rightarrow$ (d) G é conexo e $m = n - 1$

- Toda aresta é de corte
  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.
- G é acíclico

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.) $\Rightarrow$ (d) G é conexo e $m = n - 1$

- Toda aresta é de corte
  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.
- G é acíclico
- Resultado segue pelo lema
  Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.) $\Rightarrow$ (d) G é conexo e $m = n - 1$

- Toda aresta é de corte
  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.
- G é acíclico
- Resultado segue pelo lema
  Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.) $\Rightarrow$ (d) G é conexo e $m = n - 1$

- Toda aresta é de corte
  Teorema 15. Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.
- G é acíclico
- Resultado segue pelo lema
  Lema 25. Seja G um grafo conexo. Se G não contém ciclos, então $m(G) = n(G) - 1$.

$\Diamond$

(d) G é conexo e $m = n - 1 \Rightarrow$ (e) G é acíclico e $m = n - 1$.

(d) G é conexo e $m = n - 1 \Rightarrow$ (e) G é acíclico e $m = n - 1$.

- Resultado segue pelo
  Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

(d) G é conexo e $m = n - 1 \Rightarrow$ (e) G é acíclico e $m = n - 1$.

- Resultado segue pelo
  Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

(d) G é conexo e $m = n - 1 \Rightarrow$ (e) G é acíclico e $m = n - 1$.

- Resultado segue pelo
  Lema 24. Seja G um grafo conexo. Se $m(G) = n(G) - 1$, então G não contém ciclos.

$\Diamond$

(e) G é acíclico e $m = n - 1 \Rightarrow$ (f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.)

(e) G é acíclico e $m = n - 1 \Rightarrow$ (f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.)

- G é conexo

  Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

(e) G é acíclico e $m = n - 1 \Rightarrow$ (f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.)

- G é conexo

  Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- G é uma árvore

(e) G é acíclico e $m = n - 1 \Rightarrow$ (f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.)

- G é conexo

  Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- G é uma árvore
- Sabemos que (a) $\Rightarrow$ (b), i.e., se G é uma árvore, então todo par de vértices possui um único caminho entre eles.

(e) G é acíclico e $m = n - 1 \Rightarrow$ (f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.)

- G é conexo
  Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.
- G é uma árvore
- Sabemos que (a) $\Rightarrow$ (b), i.e., se G é uma árvore, então todo par de vértices possui um único caminho entre eles.
- Se u e v são dois vértices de G que não são adjacentes, então $G + uv$ tem um único ciclo.

(e) G é acíclico e $m = n - 1 \Rightarrow$ (f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.)

- G é conexo

  Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.

- G é uma árvore
- Sabemos que (a) $\Rightarrow$ (b), i.e., se G é uma árvore, então todo par de vértices possui um único caminho entre eles.
- Se u e v são dois vértices de G que não são adjacentes, então $G + uv$ tem um único ciclo.

(e) G é acíclico e $m = n - 1 \Rightarrow$ (f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.)

- G é conexo
  Lema 26. Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.
- G é uma árvore
- Sabemos que (a) $\Rightarrow$ (b), i.e., se G é uma árvore, então todo par de vértices possui um único caminho entre eles.
- Se u e v são dois vértices de G que não são adjacentes, então $G + uv$ tem um único ciclo.

$\lozenge$

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.) $\Rightarrow$ (a) G é uma árvore

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.) $\Rightarrow$ (a) G é uma árvore

- G é acíclico, resta mostrar que ele é conexo.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.) $\Rightarrow$ (a) G é uma árvore

- G é acíclico, resta mostrar que ele é conexo.
- Se para todo par u, v de vértices não adjacentes vale que $G + uv$ tem um único ciclo, então existe um uv-caminho.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.) $\Rightarrow$ (a) G é uma árvore

- G é acíclico, resta mostrar que ele é conexo.
- Se para todo par u, v de vértices não adjacentes vale que $G + uv$ tem um único ciclo, então existe um uv-caminho.
- Logo, G é conexo.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.) $\Rightarrow$ (a) G é uma árvore

- G é acíclico, resta mostrar que ele é conexo.
- Se para todo par u, v de vértices não adjacentes vale que $G + uv$ tem um único ciclo, então existe um uv-caminho.
- Logo, G é conexo.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.) $\Rightarrow$ (a) G é uma árvore

- G é acíclico, resta mostrar que ele é conexo.
- Se para todo par u, v de vértices não adjacentes vale que $G + uv$ tem um único ciclo, então existe um uv-caminho.
- Logo, G é conexo.

$\square$

Teorema 29. Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G **é conexo minimal.**)

(d) G é conexo e $m = n - 1$.

(e) G é acíclico e $m = n - 1$.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G **é acíclico maximal.**)

□

Exercício

Teorema 30. Seja T uma árvore. Um vértice $v \in V(T)$ é de corte se e somente se ele não é uma folha.

Árvore geradora

Árvore geradora

Seja G um grafo

- Um subgrafo $H \subseteq G$ é **gerador** se $V(H) = V(G)$

Árvore geradora

Seja G um grafo

- Um subgrafo $H \subseteq G$ é **gerador** se $V(H) = V(G)$
- Uma **árvore geradora** de G é um subgrafo gerador T de G tal que T é uma árvore

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.

$\square$

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.
- Demonstração por indução em m.

$\square$

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.
- Demonstração por indução em m.
- Se $m = 0$, então $n = 0$ e o resultado vale trivialmente.

$\square$

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.
- Demonstração por indução em m.
- Se $m = 0$, então $n = 0$ e o resultado vale trivialmente.
- Seja $uv \in E(G)$, e seja $G' = G - uv$

$\square$

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.
- Demonstração por indução em m.
- Se $m = 0$, então $n = 0$ e o resultado vale trivialmente.
- Seja $uv \in E(G)$, e seja $G' = G - uv$
- Se G' é conexo, então pela h.i., existe uma árvore geradora T de G'.

$\square$

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.
- Demonstração por indução em m.
- Se $m = 0$, então $n = 0$ e o resultado vale trivialmente.
- Seja $uv \in E(G)$, e seja $G' = G - uv$
- Se G' é conexo, então pela h.i., existe uma árvore geradora T de G'.
- Como $T \subseteq G' \subseteq G$ e $V(G') = V(G)$, temos que T também é uma árvore geradora de G.

□

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.
- Demonstração por indução em m.
- Se $m = 0$, então $n = 0$ e o resultado vale trivialmente.
- Seja $uv \in E(G)$, e seja $G' = G - uv$
- Se G' é conexo, então pela h.i., existe uma árvore geradora T de G'.
- Como $T \subseteq G' \subseteq G$ e $V(G') = V(G)$, temos que T também é uma árvore geradora de G.
- Assim, suponha que G' é desconexo, e sejam G'_1 e G'_2 as duas componentes conexas de G'.

$\square$

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.
- Demonstração por indução em m.
- Se $m = 0$, então $n = 0$ e o resultado vale trivialmente.
- Seja $uv \in E(G)$, e seja $G' = G - uv$
- Se G' é conexo, então pela h.i., existe uma árvore geradora T de G'.
- Como $T \subseteq G' \subseteq G$ e $V(G') = V(G)$, temos que T também é uma árvore geradora de G.
- Assim, suponha que G' é desconexo, e sejam G'_1 e G'_2 as duas componentes conexas de G'.
- Pela h.i., G'_1 contém uma árvore geradora T'_1 e G'_2 contém uma árvore geradora T'_2.

$\square$

Teorema 31. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

- Seja G um grafo conexo com m arestas.
- Demonstração por indução em m.
- Se $m = 0$, então $n = 0$ e o resultado vale trivialmente.
- Seja $uv \in E(G)$, e seja $G' = G - uv$
- Se G' é conexo, então pela h.i., existe uma árvore geradora T de G'.
- Como $T \subseteq G' \subseteq G$ e $V(G') = V(G)$, temos que T também é uma árvore geradora de G.
- Assim, suponha que G' é desconexo, e sejam G'_1 e G'_2 as duas componentes conexas de G'.
- Pela h.i., G'_1 contém uma árvore geradora T'_1 e G'_2 contém uma árvore geradora T'_2.
- Assim $T = E(T_1) \cup E(T_2) \cup \{uv\}$ é uma árvore geradora de G.

$\square$

Conjectura (Hoffmann-Ostenhof, 2011)

Se G é um grafo conexo 3-regular, então G pode ser decomposto em uma árvore geradora, um conjunto de ciclos, e um conjunto de K_2.

Conjectura (Hoffmann-Ostenhof, 2011)

Se G é um grafo conexo 3-regular, então G pode ser decomposto em uma árvore geradora, um conjunto de ciclos, e um conjunto de K_2.

Exercício

Teorema 31. Sejam T e T' duas árvores geradoras de G. Para cada $e \in E(G) \setminus E(T')$, existe $f \in E(T') \setminus E(T)$ tal que $T - e + f$ e $T' - f + e$ são árvores geradoras de G.

Árvore geradora de custo mínimo

Um problema clássico em otimização combinatória é o problema **da árvore geradora mínima**:

Entrada: G e $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$.

Objetivo: encontrar árvore geradora T tal que $\sum_{e \in E(T)} w(e)$ é mínimo.

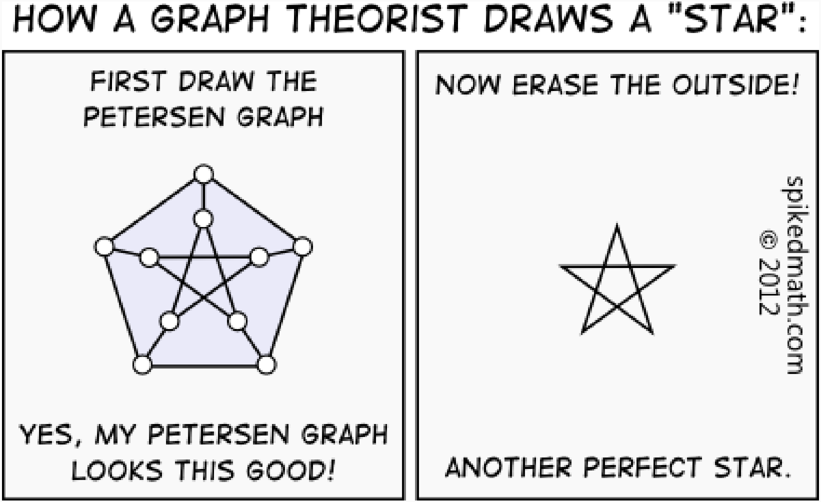
Árvore geradora de custo mínimo

Um problema clássico em otimização combinatória é o problema **da árvore geradora mínima**:

Entrada: G e $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$.

Objetivo: encontrar árvore geradora T tal que $\sum_{e \in E(T)} w(e)$ é mínimo.

- Polinomial
- Algoritmos: Kruskal, Prim, ou Boruvka.


HOW A GRAPH THEORIST DRAWS A "STAR":
FIRST DRAW THE PETERSEN GRAPH
YES, MY PETERSEN GRAPH LOOKS THIS GOOD!
NOW ERASE THE OUTSIDE!
ANOTHER PERFECT STAR.
spikedmath.com
© 2012