MC458 — Projeto e Análise de Algoritmos I

C.C. de Souza   C.N. da Silva   O. Lee   P.J. de Rezende

2^o. Semestre de 2012

Indução matemática

Demonstração por Indução

Na *Demonstração por Indução*, queremos demonstrar a validade de $P(n)$, uma propriedade P com um parâmetro natural n associado, para todo valor de n.

Há um número infinito de casos a serem considerados, um para cada valor de n. Demonstramos os infinitos casos de uma só vez:

Demonstração por Indução

Na *Demonstração por Indução*, queremos demonstrar a validade de $P(n)$, uma propriedade P com um parâmetro natural n associado, para todo valor de n.
Há um número infinito de casos a serem considerados, um para cada valor de n. Demonstramos os infinitos casos de uma só vez:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.

Demonstração por Indução

Na *Demonstração por Indução*, queremos demonstrar a validade de $P(n)$, uma propriedade P com um parâmetro natural n associado, para todo valor de n.
Há um número infinito de casos a serem considerados, um para cada valor de n. Demonstramos os infinitos casos de uma só vez:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n)$ é verdadeiro.

Demonstração por Indução

Na *Demonstração por Indução*, queremos demonstrar a validade de $P(n)$, uma propriedade P com um parâmetro natural n associado, para todo valor de n.
Há um número infinito de casos a serem considerados, um para cada valor de n. Demonstramos os infinitos casos de uma só vez:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n)$ é verdadeiro.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n+1)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Demonstração por Indução

Na *Demonstração por Indução*, queremos demonstrar a validade de $P(n)$, uma propriedade P com um parâmetro natural n associado, para todo valor de n.
Há um número infinito de casos a serem considerados, um para cada valor de n. Demonstramos os infinitos casos de uma só vez:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n)$ é verdadeiro.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n+1)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Exemplo:

Prove que a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Demonstração por Indução

Outra forma equivalente:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n-1)$ é verdadeiro.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Exemplo:

Prove que a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Demonstração por Indução

Às vezes queremos provar que uma proposição $P(n)$ vale para $n \geq n_0$ para algum n_0.

Demonstração por Indução

Às vezes queremos provar que uma proposição $P(n)$ vale para $n \geq n_0$ para algum n_0.

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(n_0)$.

Demonstração por Indução

Às vezes queremos provar que uma proposição $P(n)$ vale para $n \geq n_0$ para algum n_0.

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(n_0)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n-1)$ é verdadeiro.

Demonstração por Indução

Às vezes queremos provar que uma proposição $P(n)$ vale para $n \geq n_0$ para algum n_0.

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(n_0)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n-1)$ é verdadeiro.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Às vezes queremos provar que uma proposição $P(n)$ vale para $n \geq n_0$ para algum n_0.

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(n_0)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n-1)$ é verdadeiro.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Exemplo:

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução Fraca × Indução Forte

A *indução forte* difere da *indução fraca* (ou *simples*) apenas na suposição da hipótese.

Indução Fraca × Indução Forte

A *indução forte* difere da *indução fraca* (ou *simples*) apenas na suposição da hipótese.
No caso da indução forte, devemos supor que a propriedade vale para todos os casos anteriores, não somente para o anterior, ou seja:

Indução Fraca $\times$ Indução Forte

A *indução forte* difere da *indução fraca* (ou *simples*) apenas na suposição da hipótese.
No caso da indução forte, devemos supor que a propriedade vale para todos os casos anteriores, não somente para o anterior, ou seja:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.

Indução Fraca $\times$ Indução Forte

A *indução forte* difere da *indução fraca* (ou *simples*) apenas na suposição da hipótese.
No caso da indução forte, devemos supor que a propriedade vale para todos os casos anteriores, não somente para o anterior, ou seja:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução Forte:** Supomos que $P(k)$ é verdadeiro, para todo $1 \leq k < n$.

Indução Fraca $\times$ Indução Forte

A *indução forte* difere da *indução fraca* (ou *simples*) apenas na suposição da hipótese.
No caso da indução forte, devemos supor que a propriedade vale para todos os casos anteriores, não somente para o anterior, ou seja:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução Forte:** Supomos que $P(k)$ é verdadeiro, para todo $1 \leq k < n$.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Indução Fraca $\times$ Indução Forte

A *indução forte* difere da *indução fraca* (ou *simples*) apenas na suposição da hipótese.
No caso da indução forte, devemos supor que a propriedade vale para todos os casos anteriores, não somente para o anterior, ou seja:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução Forte:** Supomos que $P(k)$ é verdadeiro, para todo $1 \leq k < n$.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Exemplo:

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Exemplo 1

Demonstre que, para naturais $x \geq 1$ e n, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Exemplo 1

Demonstre que, para naturais $x \geq 1$ e n, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

Exemplo 1

Demonstre que, para naturais $x \geq 1$ e n, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

- A **base da indução** é, naturalmente, o caso $n = 1$. Temos que $x^n - 1 = x - 1$, que é obviamente divisível por $x - 1$. Isso encerra a demonstração da base da indução.

Exemplo 1 (cont.)

Exemplo 1 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $x^n - 1$ *seja divisível por* $x - 1$ *para todo natural* x.

Exemplo 1 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $x^n - 1$ *seja divisível por* $x - 1$ *para todo natural* x.
- O **passo de indução** é: *Supondo a h.i., vamos mostrar* $x^{n+1} - 1$ *é divisível por* $x - 1$*, para todo natural* x.

Exemplo 1 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $x^n - 1$ *seja divisível por* $x - 1$ *para todo natural* x*.*
- O **passo de indução** é: *Supondo a h.i., vamos mostrar* $x^{n+1} - 1$ *é divisível por* $x - 1$*, para todo natural* x*.*
  Primeiro reescrevemos $x^{n+1} - 1$ como

$$x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1).$$

Exemplo 1 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $x^n - 1$ *seja divisível por* $x - 1$ *para todo natural* x.
- O **passo de indução** é: *Supondo a h.i., vamos mostrar* $x^{n+1} - 1$ *é divisível por* $x - 1$*, para todo natural* x.
  Primeiro reescrevemos $x^{n+1} - 1$ como

  $$x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1).$$

  Pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$. Portanto, o lado direito da equação acima é, de fato, divisível por $x - 1$.

Exemplo 1 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $x^n - 1$ *seja divisível por* $x - 1$ *para todo natural* x.
- O **passo de indução** é: *Supondo a h.i., vamos mostrar* $x^{n+1} - 1$ *é divisível por* $x - 1$*, para todo natural* x.
  Primeiro reescrevemos $x^{n+1} - 1$ como

  $$x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1).$$

  Pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$. Portanto, o lado direito da equação acima é, de fato, divisível por $x - 1$.

A demonstração por indução está completa. ■

Exemplo 2

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = 2.5n^2 + 5.5n$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = 2.5n^2 + 5.5n$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

Exemplo 2

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = 2.5n^2 + 5.5n$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- A **base da indução** é, naturalmente, o caso $n = 1$. Temos

$$\sum_{i=1}^{1}(3+5i) = 8 = 2.5 \times 1^2 + 5.5 \times 1.$$

Exemplo 2

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = 2.5n^2 + 5.5n$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- A **base da indução** é, naturalmente, o caso $n = 1$. Temos

$$\sum_{i=1}^{1}(3+5i) = 8 = 2.5 \times 1^2 + 5.5 \times 1.$$

Portanto, a somatória tem o valor previsto pela fórmula fechada, demonstrando que a equação vale para $n = 1$.

Exemplo 2 (cont.)

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a equação vale para o valor* $n+1$. O caminho é simples:

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a equação vale para o valor* $n+1$. O caminho é simples:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(3+5i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n}(3+5i)+(3+5(n+1))$$

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a equação vale para o valor* $n+1$. O caminho é simples:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n}(3+5i)+(3+5(n+1)) \\
&= 2.5n^2+5.5n+(3+5(n+1)) \text{ (pela h.i.)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a equação vale para o valor* $n+1$. O caminho é simples:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n}(3+5i)+(3+5(n+1)) \\
&= 2.5n^2+5.5n+(3+5(n+1)) \text{ (pela h.i.)} \\
&= 2.5n^2+5.5n+5n+8
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a equação vale para o valor* $n+1$. O caminho é simples:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n}(3+5i)+(3+5(n+1)) \\
&= 2.5n^2+5.5n+(3+5(n+1)) \text{ (pela h.i.)} \\
&= 2.5n^2+5.5n+5n+8 \\
&= 2.5n^2+5n+2.5+5.5n+5.5
\end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a equação vale para o valor $n + 1$.* O caminho é simples:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n}(3+5i) + (3+5(n+1)) \\
&= 2.5n^2 + 5.5n + (3+5(n+1)) \text{ (pela h.i.)} \\
&= 2.5n^2 + 5.5n + 5n + 8 \\
&= 2.5n^2 + 5n + 2.5 + 5.5n + 5.5 \\
&= 2.5(n+1)^2 + 5.5(n+1).
\end{aligned}$$

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a equação vale para o valor* $n+1$. O caminho é simples:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n}(3+5i) + (3+5(n+1)) \\
&= 2.5n^2 + 5.5n + (3+5(n+1)) \text{ (pela h.i.)} \\
&= 2.5n^2 + 5.5n + 5n + 8 \\
&= 2.5n^2 + 5n + 2.5 + 5.5n + 5.5 \\
&= 2.5(n+1)^2 + 5.5(n+1).
\end{aligned}
$$

A última linha da dedução mostra que a fórmula vale para $n+1$. A demonstração por indução está completa. ■

Exemplo 3

Demonstre que a inequação

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1 + x) > 0$.

Exemplo 3

Demonstre que a inequação

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1 + x) > 0$.

Demonstração:

Exemplo 3

Demonstre que a inequação

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1 + x) > 0$.

Demonstração:

- A **base da indução** é, novamente, $n = 1$. Nesse caso ambos os lados da inequação são iguais a $1 + x$, mostrando a sua validade. Isto encerra a prova do caso base.

Exemplo 3 (cont.)

Exemplo 3 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a inequação vale para n, isto é,* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *para todo real* x *tal que* $(1+x) > 0$.

Exemplo 3 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a inequação vale para n, isto é,* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *para todo real* x *tal que* $(1+x) > 0$*.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a inequação vale para o valor* $n+1$*, isto é,* $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ *para todo* x *tal que* $(1+x) > 0$*.* Novamente, a dedução é simples:

Exemplo 3 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a inequação vale para n, isto é,* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *para todo real* x *tal que* $(1+x) > 0$*.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a inequação vale para o valor* $n+1$*, isto é,* $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ *para todo* x *tal que* $(1+x) > 0$*.* Novamente, a dedução é simples:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

Exemplo 3 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a inequação vale para n, isto é,* $(1+x)^n \geq 1+nx$ *para todo real* x *tal que* $(1+x) > 0$*.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a inequação vale para o valor* $n+1$*, isto é,* $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ *para todo* x *tal que* $(1+x) > 0$*.* Novamente, a dedução é simples:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \text{ (pela h.i. e } (1+x) > 0)
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a inequação vale para n, isto é,* $(1+x)^n \geq 1+nx$ *para todo real* x *tal que* $(1+x) > 0$.
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a inequação vale para o valor* $n+1$*, isto é,* $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ *para todo* x *tal que* $(1+x) > 0$.
  Novamente, a dedução é simples:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \text{ (pela h.i. e } (1+x) > 0) \\
&= 1+(n+1)x+nx^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a inequação vale para n, isto é,* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *para todo real* x *tal que* $(1+x) > 0$*.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a inequação vale para o valor* $n+1$*, isto é,* $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ *para todo* x *tal que* $(1+x) > 0$*.* Novamente, a dedução é simples:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \text{ (pela h.i. e } (1+x) > 0) \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x \text{ (já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

Exemplo 3 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a inequação vale para n, isto é,* $(1+x)^n \geq 1+nx$ *para todo real* x *tal que* $(1+x) > 0$.
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a inequação vale para o valor* $n+1$*, isto é,* $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ *para todo* x *tal que* $(1+x) > 0$.
  Novamente, a dedução é simples:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \text{ (pela h.i. e } (1+x) > 0) \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x \text{ (já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

A última linha mostra que a inequação vale para $n+1$, completando a demonstração. ■

Exemplo 4

Demonstre que o número T_n de regiões no plano criadas por n retas em posição geral é igual a

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4

Demonstre que o número T_n de regiões no plano criadas por n retas em posição geral é igual a

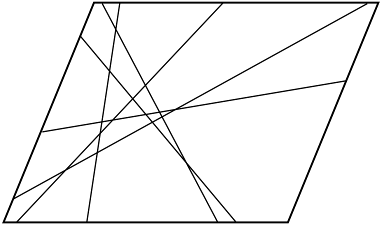
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Um conjunto de retas está em posição geral no plano se

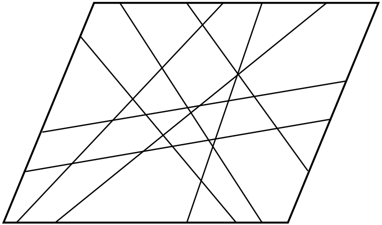
- todas as retas são concorrentes, isto é, não há retas paralelas e
- não há três retas interceptando-se no mesmo ponto.

Exemplo 4 (cont.)

Antes de prosseguirmos com a demonstração vejamos exemplos de um conjunto de retas que está em posição geral e outro que não está.



Em posição geral



Não estão em posição geral

Exemplo 4 (cont.)

Demonstração: A idéia que queremos explorar para o passo de indução é a seguinte: supondo que a fórmula vale para n, adicionar uma nova reta em posição geral e tentar assim obter a validade de $n + 1$.

Exemplo 4 (cont.)

Demonstração: A idéia que queremos explorar para o passo de indução é a seguinte: supondo que a fórmula vale para n, adicionar uma nova reta em posição geral e tentar assim obter a validade de $n+1$.

- A **base da indução** é, naturalmente, $n = 1$. Uma reta sozinha divide o plano em duas regiões. De fato,

$$T_1 = (1 \times 2)/2 + 1 = 2.$$

Exemplo 4 (cont.)

Demonstração: A idéia que queremos explorar para o passo de indução é a seguinte: supondo que a fórmula vale para n, adicionar uma nova reta em posição geral e tentar assim obter a validade de $n + 1$.

- A **base da indução** é, naturalmente, $n = 1$. Uma reta sozinha divide o plano em duas regiões. De fato,

  $$T_1 = (1 \times 2)/2 + 1 = 2.$$

  Isto conclui a prova para $n = 1$.

Exemplo 4 (cont.)

Exemplo 4 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $T_n = (n(n+1)/2) + 1$ *para n.*

Exemplo 4 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $T_n = (n(n+1)/2) + 1$ *para* n.
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que para* $n+1$ *retas em posição geral vale que*

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$$

Exemplo 4 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $T_n = (n(n+1)/2) + 1$ *para* n.
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que para* $n+1$ *retas em posição geral vale que*

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$$

Considere um conjunto L de $n+1$ retas em posição geral no plano e seja r uma dessas retas. Então, as retas do conjunto $L' = L \setminus \{r\}$ obedecem à hipótese de indução e, portanto, o número de regiões distintas do plano definidas por elas é $(n(n+1))/2 + 1$.

Exemplo 4 (cont.)

Exemplo 4 (cont.)

- Além disso, r intersecta as outras n retas em n pontos distintos. O que significa que, saindo de uma ponta de r no infinito e após cruzar as n retas de L', a reta r terá cruzado $n+1$ regiões, dividindo cada uma destas em duas outras.

Exemplo 4 (cont.)

- Além disso, r intersecta as outras n retas em n pontos distintos. O que significa que, saindo de uma ponta de r no infinito e após cruzar as n retas de L', a reta r terá cruzado $n+1$ regiões, dividindo cada uma destas em duas outras.
- Assim, podemos escrever que

$$T_{n+1} = T_n + n + 1$$

- Além disso, r intersecta as outras n retas em n pontos distintos. O que significa que, saindo de uma ponta de r no infinito e após cruzar as n retas de L', a reta r terá cruzado $n+1$ regiões, dividindo cada uma destas em duas outras.
- Assim, podemos escrever que

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} &= T_n + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 \text{ (pela h.i.)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 (cont.)

- Além disso, r intersecta as outras n retas em n pontos distintos. O que significa que, saindo de uma ponta de r no infinito e após cruzar as n retas de L', a reta r terá cruzado $n+1$ regiões, dividindo cada uma destas em duas outras.
- Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= T_n + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 \text{ (pela h.i.)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.
\end{aligned}$$

- Além disso, r intersecta as outras n retas em n pontos distintos. O que significa que, saindo de uma ponta de r no infinito e após cruzar as n retas de L', a reta r terá cruzado $n + 1$ regiões, dividindo cada uma destas em duas outras.
- Assim, podemos escrever que

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} &= T_n + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 \text{ (pela h.i.)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.
\end{aligned}
$$

Isso conclui a demonstração. ■

Exemplo 5

Definição:

Um conjunto de n retas no plano define regiões convexas cujas bordas são segmentos das n retas. Duas dessas regiões são *adjacentes* se as suas bordas se intersectam em algum segmento de reta não trivial, isto é contendo mais que um ponto.

Exemplo 5

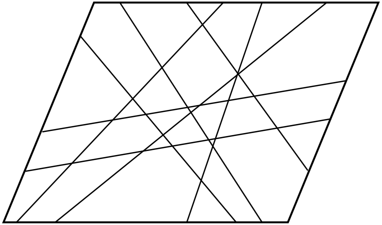
Definição:

Um conjunto de n retas no plano define regiões convexas cujas bordas são segmentos das n retas. Duas dessas regiões são *adjacentes* se as suas bordas se intersectam em algum segmento de reta não trivial, isto é contendo mais que um ponto.

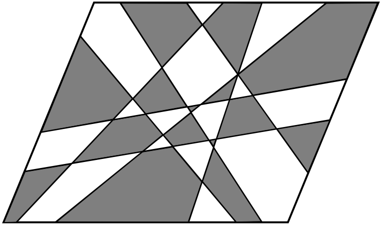
Uma *k-coloração* dessas regiões é uma atribuição de uma de k cores a cada uma das regiões, de forma que regiões adjacentes recebam cores distintas.

Exemplo 5 (cont.)

Veja exemplos dessas definições:



As regiões convexas



Uma 2-coloração do plano

Exemplo 5 (cont.)

Demonstre que para todo $n \geq 1$, existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.

Exemplo 5 (cont.)

Demonstre que para todo $n \geq 1$, existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.

Demonstração:

Exemplo 5 (cont.)

Demonstre que para todo $n \geq 1$, existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.

Demonstração:

- A **base da indução** é, naturalmente, $n = 1$. Uma reta sozinha divide o plano em duas regiões. Atribuindo-se cores diferentes a essas regiões obtemos o resultado desejado.

Exemplo 5 (cont.)

Demonstre que para todo $n \geq 1$, existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.

Demonstração:

- A **base da indução** é, naturalmente, $n = 1$. Uma reta sozinha divide o plano em duas regiões. Atribuindo-se cores diferentes a essas regiões obtemos o resultado desejado.

  Isto conclui a prova para $n = 1$.

Exemplo 5 (cont.)

Exemplo 5 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que sempre existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.*

Exemplo 5 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que sempre existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos exibir uma 2-coloração para as regiões formadas por* $n + 1$ *retas no plano.*

Exemplo 5 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que sempre existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos exibir uma 2-coloração para as regiões formadas por* $n+1$ *retas no plano.*

  A demonstração do passo consiste em observar que a adição de uma nova reta r divide cada região atravessada por r em duas, e definir a nova 2-coloração da seguinte forma: as regiões em um lado de r mantém a cor herdada da hipótese de indução; as regiões no outro lado de r têm suas cores trocadas.

Exemplo 5 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que sempre existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos exibir uma 2-coloração para as regiões formadas por* $n + 1$ *retas no plano.*

  A demonstração do passo consiste em observar que a adição de uma nova reta *r* divide cada região atravessada por *r* em duas, e definir a nova 2-coloração da seguinte forma: as regiões em um lado de *r* mantém a cor herdada da hipótese de indução; as regiões no outro lado de *r* têm suas cores trocadas.

  Você é capaz de demonstrar que a 2-coloração obtida nesse processo obedece à definição?

Exemplo 6

Vejamos agora um exemplo onde a indução é aplicada de forma um pouco diferente.

Exemplo 6

Vejamos agora um exemplo onde a indução é aplicada de forma um pouco diferente.

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Exemplo 6

Vejamos agora um exemplo onde a indução é aplicada de forma um pouco diferente.

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

Exemplo 6

Vejamos agora um exemplo onde a indução é aplicada de forma um pouco diferente.

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: A base é $n = 1$, para a qual a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, obviamente verdadeira.

Exemplo 6

Vejamos agora um exemplo onde a indução é aplicada de forma um pouco diferente.

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: A base é $n = 1$, para a qual a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, obviamente verdadeira.
Como **hipótese de indução**, supomos que $S_n < 1$ para um valor $n \geq 1$. Vamos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Exemplo 6 (cont.)

Pela definição de S_n, temos $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.

Exemplo 6 (cont.)

Pela definição de S_n, temos $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
Pela hipótese de indução, $S_n < 1$. Entretanto, nada podemos dizer acerca de S_{n+1} em conseqüência da hipótese, já que não há nada que impeça que $S_{n+1} \geq 1$.

Pela definição de S_n, temos $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
Pela hipótese de indução, $S_n < 1$. Entretanto, nada podemos dizer acerca de S_{n+1} em conseqüência da hipótese, já que não há nada que impeça que $S_{n+1} \geq 1$.
A idéia aqui é manipular S_{n+1} um pouco mais:

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Exemplo 6 (cont.)

Pela definição de S_n, temos $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
Pela hipótese de indução, $S_n < 1$. Entretanto, nada podemos dizer acerca de S_{n+1} em conseqüência da hipótese, já que não há nada que impeça que $S_{n+1} \geq 1$.
A idéia aqui é manipular S_{n+1} um pouco mais:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right]
\end{aligned}
$$

Exemplo 6 (cont.)

Pela definição de S_n, temos $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
Pela hipótese de indução, $S_n < 1$. Entretanto, nada podemos dizer acerca de S_{n+1} em conseqüência da hipótese, já que não há nada que impeça que $S_{n+1} \geq 1$.
A idéia aqui é manipular S_{n+1} um pouco mais:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right] \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \text{ (pela h.i.)} \end{aligned}$$

Exemplo 6 (cont.)

Pela definição de S_n, temos $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
Pela hipótese de indução, $S_n < 1$. Entretanto, nada podemos dizer acerca de S_{n+1} em conseqüência da hipótese, já que não há nada que impeça que $S_{n+1} \geq 1$.
A idéia aqui é manipular S_{n+1} um pouco mais:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right] \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pela definição de S_n, temos $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
Pela hipótese de indução, $S_n < 1$. Entretanto, nada podemos dizer acerca de S_{n+1} em conseqüência da hipótese, já que não há nada que impeça que $S_{n+1} \geq 1$.
A idéia aqui é manipular S_{n+1} um pouco mais:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right] \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

Exemplo 7

Veremos a seguir um exemplo da aplicação de indução em Teoria dos Grafos.

Exemplo 7

Veremos a seguir um exemplo da aplicação de indução em Teoria dos Grafos.

Definição:

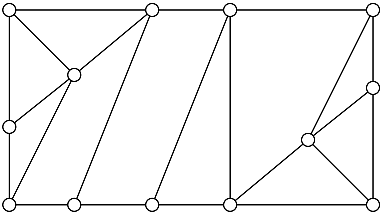
Um *grafo planar* é um grafo que pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem. Um *grafo plano* é um desenho de grafo planar no plano, sem cruzamento de arestas (há inúmeros desenhos possíveis). Veja um exemplo de um grafo planar e um desenho possível dele no plano.

Exemplo 7

Veremos a seguir um exemplo da aplicação de indução em Teoria dos Grafos.

Definição:

Um *grafo planar* é um grafo que pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem. Um *grafo plano* é um desenho de grafo planar no plano, sem cruzamento de arestas (há inúmeros desenhos possíveis). Veja um exemplo de um grafo planar e um desenho possível dele no plano.



Definição:

Exemplo 7 (cont.)

Definição:

- Um grafo plano define um conjunto F de *faces* no plano, que são as regiões contínuas **maximais** do desenho, livre de segmentos de retas ou pontos.

Exemplo 7 (cont.)

Definição:

- Um grafo plano define um conjunto F de *faces* no plano, que são as regiões contínuas **maximais** do desenho, livre de segmentos de retas ou pontos.
- Os *componentes* de um grafo são seus subgrafos maximais para os quais existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices.

Exemplo 7 (cont.)

Definição:

- Um grafo plano define um conjunto F de *faces* no plano, que são as regiões contínuas **maximais** do desenho, livre de segmentos de retas ou pontos.
- Os *componentes* de um grafo são seus subgrafos maximais para os quais existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices.
- Dado um grafo plano G, com v vértices, e arestas, f faces e c componentes, a *Fórmula de Euler* (F.E.) é a equação

$$v - e + f = 1 + c.$$

Exemplo 7 (cont.)

Definição:

- Um grafo plano define um conjunto F de *faces* no plano, que são as regiões contínuas **maximais** do desenho, livre de segmentos de retas ou pontos.
- Os *componentes* de um grafo são seus subgrafos maximais para os quais existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices.
- Dado um grafo plano G, com v vértices, e arestas, f faces e c componentes, a *Fórmula de Euler* (F.E.) é a equação

$$v - e + f = 1 + c.$$

Queremos demonstrar a Fórmula de Euler por indução.

Exemplo 7 (cont.)

Exemplo 7 (cont.)

- Há várias possibilidades para se fazer indução neste caso. No livro de U. Manber encontra-se uma indução em duas variáveis, primeiro em v depois em f. Além disso, lá a Fórmula de Euler está descrita simplificadamente, assumindo que o grafo é conexo. Isso torna a indução um pouco mais complicada.

Exemplo 7 (cont.)

- Há várias possibilidades para se fazer indução neste caso. No livro de U. Manber encontra-se uma indução em duas variáveis, primeiro em v depois em f. Além disso, lá a Fórmula de Euler está descrita simplificadamente, assumindo que o grafo é conexo. Isso torna a indução um pouco mais complicada.
- Nossa formulação é mais geral simplificando a demonstração. Esse um fenômeno não é incomum em matemática: formulações mais poderosas muitas vezes resultam em demonstrações mais simples.

Exemplo 7 (cont.)

- Há várias possibilidades para se fazer indução neste caso. No livro de U. Manber encontra-se uma indução em duas variáveis, primeiro em v depois em f. Além disso, lá a Fórmula de Euler está descrita simplificadamente, assumindo que o grafo é conexo. Isso torna a indução um pouco mais complicada.
- Nossa formulação é mais geral simplificando a demonstração. Esse um fenômeno não é incomum em matemática: formulações mais poderosas muitas vezes resultam em demonstrações mais simples.
- Vamos demonstrar a F.E. por indução em e, o número de arestas do grafo plano G.

Demonstração:

Demonstração:

- A base da indução é $e = 0$. Temos $f = 1$ e $c = v$ e

$$v - e + f = v + 1 = 1 + c$$

como desejado. Isso demonstra a base.

Exemplo 7 (cont.)

Demonstração:

- A base da indução é $e = 0$. Temos $f = 1$ e $c = v$ e

$$v - e + f = v + 1 = 1 + c$$

  como desejado. Isso demonstra a base.
- A hipótese de indução é: *Suponha que a F.E. vale para todo grafo com $e - 1$ arestas.*

Demonstração:

- A base da indução é $e = 0$. Temos $f = 1$ e $c = v$ e

$$v - e + f = v + 1 = 1 + c$$

  como desejado. Isso demonstra a base.
- A hipótese de indução é: *Suponha que a F.E. vale para todo grafo com $e - 1$ arestas.*
- Seja G um grafo plano com e arestas, v vértices, f faces e c componentes. Seja a uma aresta qualquer de G. A remoção de a de G cria um novo grafo plano G' com $v' = v$ vértices e $e' = e - 1$ arestas, f' faces e c' componentes.

Demonstração:

- A base da indução é $e = 0$. Temos $f = 1$ e $c = v$ e
$$v - e + f = v + 1 = 1 + c$$
como desejado. Isso demonstra a base.
- A hipótese de indução é: *Suponha que a F.E. vale para todo grafo com $e - 1$ arestas.*
- Seja G um grafo plano com e arestas, v vértices, f faces e c componentes. Seja a uma aresta qualquer de G. A remoção de a de G cria um novo grafo plano G' com $v' = v$ vértices e $e' = e - 1$ arestas, f' faces e c' componentes.
A remoção de a de G pode ou não ter desconectado um componente de G. Caso tenha, $c' = c + 1$ e $f' = f$ (por quê?). Caso contrário, teremos $c' = c$ e $f' = f - 1$ (por quê?).

Exemplo 7 (cont.)

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$v - e + f \quad = \quad v' - (e' + 1) + f'$$

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + f' \\ &= 1 + c' - 1 \text{ (pela h.i.)} \end{aligned}$$

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$
\begin{aligned}
v - e + f &= v' - (e' + 1) + f' \\
&= 1 + c' - 1 \text{ (pela h.i.)} \\
&= c'
\end{aligned}
$$

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + f' \\ &= 1 + c' - 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= c' \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

- Caso contrário obtemos

$$v - e + f = v' - (e' + 1) + (f' + 1)$$

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + f' \\ &= 1 + c' - 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= c' \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

- Caso contrário obtemos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + (f' + 1) \\ &= v' - e' + f' \end{aligned}$$

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + f' \\ &= 1 + c' - 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= c' \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

- Caso contrário obtemos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + (f' + 1) \\ &= v' - e' + f' \\ &= 1 + c' \text{ (pela h.i.)} \end{aligned}$$

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + f' \\ &= 1 + c' - 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= c' \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

- Caso contrário obtemos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + (f' + 1) \\ &= v' - e' + f' \\ &= 1 + c' \text{ (pela h.i.)} \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + f' \\ &= 1 + c' - 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= c' \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

- Caso contrário obtemos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e' + 1) + (f' + 1) \\ &= v' - e' + f' \\ &= 1 + c' \text{ (pela h.i.)} \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

Em ambos casos obtemos o resultado desejado. ■

Exemplo 8

Este é um exemplo de indução forte. Antes algumas definições:

Exemplo 8

Este é um exemplo de indução forte. Antes algumas definições:

- Seja G um grafo não-orientado. O **grau** de um vértice v de G é o número de arestas incidentes a v, onde laços (arestas cujos extremos coincidem) são contados duas vezes.

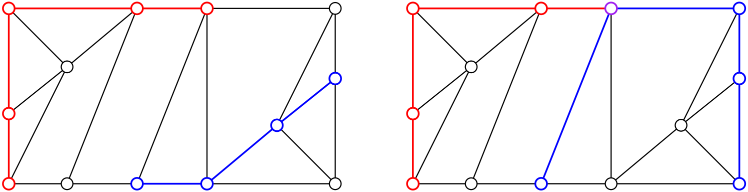
Exemplo 8

Este é um exemplo de indução forte. Antes algumas definições:

- Seja G um grafo não-orientado. O **grau** de um vértice v de G é o número de arestas incidentes a v, onde laços (arestas cujos extremos coincidem) são contados duas vezes.
- Um vértice é **ímpar** (**par**) se o seu grau é ímpar (par). O número de vértices ímpares em um grafo é sempre par (por quê?).

Exemplo 8 (cont.)

Dois caminhos em G são **aresta-disjuntos** se não têm arestas em comum. Veja exemplos de caminhos aresta-disjuntos em um grafo:



Exemplo 8 (cont.)

Teorema:

Seja G um grafo (não-orientado) conexo e I o conjunto de vértices ímpares de G. Então é possível encontrar alguma partição de I em $|I|/2$ pares e caminhos aresta-disjuntos cujos extremos são os vértices de cada par.

Exemplo 8 (cont.)

Teorema:

Seja G um grafo (não-orientado) conexo e I o conjunto de vértices ímpares de G. Então é possível encontrar alguma partição de I em $|I|/2$ pares e caminhos aresta-disjuntos cujos extremos são os vértices de cada par.

Demonstração: Se $I = \emptyset$, o resultado é vacuosamente verdadeiro. A demonstração é por indução no número de arestas de G. Seja e esse número.

Exemplo 8 (cont.)

Teorema:

Seja G um grafo (não-orientado) conexo e I o conjunto de vértices ímpares de G. Então é possível encontrar alguma partição de I em $|I|/2$ pares e caminhos aresta-disjuntos cujos extremos são os vértices de cada par.

Demonstração: Se $I = \emptyset$, o resultado é vacuosamente verdadeiro. A demonstração é por indução no número de arestas de G. Seja e esse número.

- A base da indução trata do caso $e = 1$, ou seja, de um grafo com uma única aresta e com exatamente dois vértices (pois G é conexo). Neste caso, $|I| = 2$ e o teorema é trivialmente verdadeiro.

Exemplo 8 (cont.)

Exemplo 8 (cont.)

- A hipótese de indução (forte) é:
  Suponha que para todos os grafos conexos com menos que e arestas vale o resultado do enunciado do teorema.

Exemplo 8 (cont.)

- A hipótese de indução (forte) é:
  Suponha que para todos os grafos conexos com menos que e arestas vale o resultado do enunciado do teorema.

  Vamos mostrar que o resultado vale para todo grafo conexo com e arestas.

Exemplo 8 (cont.)

- A hipótese de indução (forte) é:
  Suponha que para todos os grafos conexos com menos que e arestas vale o resultado do enunciado do teorema.

  Vamos mostrar que o resultado vale para todo grafo conexo com e arestas.

- Seja então G um grafo qualquer com e arestas. Se $I = \emptyset$ não há nada que provar. Caso contrário existe pelo menos um par u, v de vértices de I. Como G é conexo, existe um caminho π em G cujos extremos são u, v.

Exemplo 8 (cont.)

- A hipótese de indução (forte) é:
  Suponha que para todos os grafos conexos com menos que e arestas vale o resultado do enunciado do teorema.

  Vamos mostrar que o resultado vale para todo grafo conexo com e arestas.
- Seja então G um grafo qualquer com e arestas. Se $I = \emptyset$ não há nada que provar. Caso contrário existe pelo menos um par u, v de vértices de I. Como G é conexo, existe um caminho π em G cujos extremos são u, v.
- Seja G' o grafo obtido removendo-se de G as arestas de π. O grafo G' tem menos que e arestas (e dois vértices ímpares a menos).

- A hipótese de indução (forte) é:
  Suponha que para todos os grafos conexos com menos que e arestas vale o resultado do enunciado do teorema.

  Vamos mostrar que o resultado vale para todo grafo conexo com e arestas.
- Seja então G um grafo qualquer com e arestas. Se $I = \emptyset$ não há nada que provar. Caso contrário existe pelo menos um par u, v de vértices de I. Como G é conexo, existe um caminho π em G cujos extremos são u, v.
- Seja G' o grafo obtido removendo-se de G as arestas de π. O grafo G' tem menos que e arestas (e dois vértices ímpares a menos).
- Embora seja tentador aplicar a h.i. a G', nada garante que G' seja conexo. Se não for, a h.i. não se aplica.

Exemplo 8 (cont.)

Exemplo 8 (cont.)

- É possível consertar a situação mudando a hipótese para: *Suponha que para todos os grafos com menos que e arestas vale o seguinte: é possível encontrar alguma partição de I em $|I|/2$ pares, cada par na mesma componente, e os caminhos entre esses pares.*

Exemplo 8 (cont.)

- É possível consertar a situação mudando a hipótese para: *Suponha que para todos os grafos com menos que e arestas vale o seguinte: é possível encontrar alguma partição de I em* $|I|/2$ *pares, cada par na mesma componente, e os caminhos entre esses pares.*

  Veja que removemos a restrição de conexidade, fortalecendo a hipótese.

Exemplo 8 (cont.)

- É possível consertar a situação mudando a hipótese para: *Suponha que para todos os grafos com menos que e arestas vale o seguinte: é possível encontrar alguma partição de I em $|I|/2$ pares, cada par na mesma componente, e os caminhos entre esses pares.*

  Veja que removemos a restrição de conexidade, fortalecendo a hipótese.
- Com essa nova hipótese, a demonstração é a mesma. Aqui escolhemos x e y na mesma componente para garantir a existência do caminho π. Agora podemos aplicar a h.i. a G': os caminhos de G' e π são todos aresta-disjuntos e formam o conjunto de caminhos desejados para G. ∎

Exemplo 8 (cont.)

- É possível consertar a situação mudando a hipótese para: *Suponha que para todos os grafos com menos que e arestas vale o seguinte: é possível encontrar alguma partição de I em $|I|/2$ pares, cada par na mesma componente, e os caminhos entre esses pares.*

  Veja que removemos a restrição de conexidade, fortalecendo a hipótese.
- Com essa nova hipótese, a demonstração é a mesma. Aqui escolhemos x e y na mesma componente para garantir a existência do caminho π. Agora podemos aplicar a h.i. a G': os caminhos de G' e π são todos aresta-disjuntos e formam o conjunto de caminhos desejados para G. ■

Exercício: Você consegue demonstrar esse mesmo teorema usando indução fraca ?

Algumas armadilhas - redução $\times$ expansão

- A demonstração do passo da indução simples supõe a proposição válida para um $n - 1$ e mostra que é válida para n.

Algumas armadilhas - redução $\times$ expansão

- A demonstração do passo da indução simples supõe a proposição válida para um $n-1$ e mostra que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso geral n e **reduzi-lo** ao caso $n-1$. Às vezes porém, parece mais fácil pensar no caso $n-1$ e **expandi-lo** para o caso geral n.

Algumas armadilhas - redução $\times$ expansão

- A demonstração do passo da indução simples supõe a proposição válida para um $n - 1$ e mostra que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso geral n e **reduzi-lo** ao caso $n - 1$. Às vezes porém, parece mais fácil pensar no caso $n - 1$ e **expandi-lo** para o caso geral n.
- O perigo do procedimento de expansão é que ele não seja suficientemente geral, de forma que obtenhamos a implicação, a partir do caso $n - 1$, para um caso **geral** n.

- A demonstração do passo da indução simples supõe a proposição válida para um $n-1$ e mostra que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso geral n e **reduzi-lo** ao caso $n-1$. Às vezes porém, parece mais fácil pensar no caso $n-1$ e **expandi-lo** para o caso geral n.
- O perigo do procedimento de expansão é que ele não seja suficientemente geral, de forma que obtenhamos a implicação, a partir do caso $n-1$, para um caso **geral** n.
- As conseqüências de um lapso como esse podem ser a obtenção de uma estrutura de tamanho n fora da hipótese de indução, ou a a prova da proposição para casos particulares de estruturas de tamanho n e não todos, como se espera.

Algumas armadilhas - redução $\times$ expansão

Por exemplo, se na demonstração da Fórmula de Euler tivéssemos optado por adicionar uma aresta $a = (i, j)$ a um grafo plano de $e - 1$ arestas, deveríamos:

Por exemplo, se na demonstração da Fórmula de Euler tivéssemos optado por adicionar uma aresta $a = (i, j)$ a um grafo plano de $e - 1$ arestas, deveríamos:

- garantir que i, j estivessem na mesma face; e

Algumas armadilhas - redução $\times$ expansão

Por exemplo, se na demonstração da Fórmula de Euler tivéssemos optado por adicionar uma aresta $a = (i, j)$ a um grafo plano de $e - 1$ arestas, deveríamos:

- garantir que i, j estivessem na mesma face; e
- considerar os casos em que i, j estivessem em componentes iguais e diferentes.

Por exemplo, se na demonstração da Fórmula de Euler tivéssemos optado por adicionar uma aresta $a = (i, j)$ a um grafo plano de $e - 1$ arestas, deveríamos:

- garantir que i, j estivessem na mesma face; e
- considerar os casos em que i, j estivessem em componentes iguais e diferentes.

Caso contrário, ou produziríamos um cruzamento de arestas, ou provaríamos o teorema para uma subclasse de grafos planos apenas.

Algumas armadilhas - redução $\times$ expansão

Por exemplo, se na demonstração da Fórmula de Euler tivéssemos optado por adicionar uma aresta $a = (i, j)$ a um grafo plano de $e - 1$ arestas, deveríamos:

- garantir que i, j estivessem na mesma face; e
- considerar os casos em que i, j estivessem em componentes iguais e diferentes.

Caso contrário, ou produziríamos um cruzamento de arestas, ou provaríamos o teorema para uma subclasse de grafos planos apenas.

Mesmo com cuidados extras, a sensação de estar esquecendo algum caso é maior na expansão do que na redução, naturalmente, por estarmos aumentando o nosso universo de possibilidades.

O que há de errado com a demonstração da seguinte proposição, claramente falsa ?

Proposição:

Considere n retas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

O que há de errado com a demonstração da seguinte proposição, claramente falsa ?

Proposição:

Considere n retas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

Algumas armadilhas - outros passos mal dados

O que há de errado com a demonstração da seguinte proposição, claramente falsa ?

Proposição:

Considere n retas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- A base da indução é o caso $n = 1$, claramente verdadeiro.

O que há de errado com a demonstração da seguinte proposição, claramente falsa ?

Proposição:

Considere n retas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- A base da indução é o caso $n = 1$, claramente verdadeiro.
- Para o caso $n = 2$, também é fácil ver que a proposição é verdadeira.

Algumas armadilhas - outros passos mal dados

O que há de errado com a demonstração da seguinte proposição, claramente falsa ?

Proposição:

Considere n retas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- A base da indução é o caso $n = 1$, claramente verdadeiro.
- Para o caso $n = 2$, também é fácil ver que a proposição é verdadeira.
- Considere a proposição válida para $n - 1$, $n > 2$, e considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Algumas armadilhas - outros passos mal dados

Pela h.i., todo subconjunto de $n - 1$ das n retas têm um ponto em comum. Sejam S_1, S_2 dois desses subconjuntos, distintos entre si.

Algumas armadilhas - outros passos mal dados

Pela h.i., todo subconjunto de $n-1$ das n retas têm um ponto em comum. Sejam S_1, S_2 dois desses subconjuntos, distintos entre si.

A interseção $S_1 \cap S_2$ contém $n-2$ retas. Portanto, o ponto em comum às retas de S_1 tem que ser igual ao ponto em comum às retas de S_2, se não duas retas distintas de $S_1 \cap S_2$ se tocariam em mais que um ponto, o que não é possível.

Algumas armadilhas - outros passos mal dados

Pela h.i., todo subconjunto de $n-1$ das n retas têm um ponto em comum. Sejam S_1, S_2 dois desses subconjuntos, distintos entre si.

A interseção $S_1 \cap S_2$ contém $n-2$ retas. Portanto, o ponto em comum às retas de S_1 tem que ser igual ao ponto em comum às retas de S_2, se não duas retas distintas de $S_1 \cap S_2$ se tocariam em mais que um ponto, o que não é possível.

Portanto, a asserção vale para n, completando a demonstração.

Pela h.i., todo subconjunto de $n-1$ das n retas têm um ponto em comum. Sejam S_1, S_2 dois desses subconjuntos, distintos entre si.

A interseção $S_1 \cap S_2$ contém $n-2$ retas. Portanto, o ponto em comum às retas de S_1 tem que ser igual ao ponto em comum às retas de S_2, se não duas retas distintas de $S_1 \cap S_2$ se tocariam em mais que um ponto, o que não é possível.

Portanto, a asserção vale para n, completando a demonstração. *Certo?*

Algumas armadilhas - outros passos mal dados

Pela h.i., todo subconjunto de $n - 1$ das n retas têm um ponto em comum. Sejam S_1, S_2 dois desses subconjuntos, distintos entre si.

A interseção $S_1 \cap S_2$ contém $n - 2$ retas. Portanto, o ponto em comum às retas de S_1 tem que ser igual ao ponto em comum às retas de S_2, se não duas retas distintas de $S_1 \cap S_2$ se tocariam em mais que um ponto, o que não é possível.

Portanto, a asserção vale para n, completando a demonstração. *Certo?*

Errado!

O argumento no passo de indução funciona para todo $n > 2$, exceto $n = 3$ pois, nesse caso, $S_1 \cap S_2$ contém apenas uma reta. Não é possível concluir a validade para $n = 3$. De fato, a afirmação não vale para $n \geq 3$.

Definição:

Um invariante de um laço de um algoritmo é uma propriedade que é satisfeita pelas variáveis do algoritmo independente de qual iteração do laço tenha sido executada por último.

Invariantes de laço e indução matemática

Definição:

Um invariante de um laço de um algoritmo é uma propriedade que é satisfeita pelas variáveis do algoritmo independente de qual iteração do laço tenha sido executada por último.

- Usados em provas de corretude de algoritmos

Invariantes de laço e indução matemática

Definição:

Um invariante de um laço de um algoritmo é uma propriedade que é satisfeita pelas variáveis do algoritmo independente de qual iteração do laço tenha sido executada por último.

- Usados em provas de corretude de algoritmos
- Tipicamente um algoritmo é composto de vários laços executados em seqüência

Invariantes de laço e indução matemática

Definição:

Um invariante de um laço de um algoritmo é uma propriedade que é satisfeita pelas variáveis do algoritmo independente de qual iteração do laço tenha sido executada por último.

- Usados em provas de corretude de algoritmos
- Tipicamente um algoritmo é composto de vários laços executados em seqüência
- Para cada laço pode-se obter um invariante que, uma vez provado, garanta o funcionamento correto daquela parte *específica* do algoritmo

Invariantes de laço e indução matemática

Definição:

Um invariante de um laço de um algoritmo é uma propriedade que é satisfeita pelas variáveis do algoritmo independente de qual iteração do laço tenha sido executada por último.

- Usados em provas de corretude de algoritmos
- Tipicamente um algoritmo é composto de vários laços executados em seqüência
- Para cada laço pode-se obter um invariante que, uma vez provado, garanta o funcionamento correto daquela parte *específica* do algoritmo
- A corretude do algoritmo como um todo fica provada se for provado que os invariantes de todos os laços estão corretos

Invariantes de laço e indução matemática

Definição:

Um invariante de um laço de um algoritmo é uma propriedade que é satisfeita pelas variáveis do algoritmo independente de qual iteração do laço tenha sido executada por último.

- Usados em provas de corretude de algoritmos
- Tipicamente um algoritmo é composto de vários laços executados em seqüência
- Para cada laço pode-se obter um invariante que, uma vez provado, garanta o funcionamento correto daquela parte *específica* do algoritmo
- A corretude do algoritmo como um todo fica provada se for provado que os invariantes de todos os laços estão corretos
- O difícil é encontrar o invariante que leva à prova da corretude do algoritmo

Um exemplo:

Usando *invariante de laços*, provamos a corretude de um algoritmo que converte um número inteiro para a sua representação binária.

Invariantes de laço e indução matemática

Um exemplo:

Usando *invariante de laços*, provamos a corretude de um algoritmo que converte um número inteiro para a sua representação binária.

Converte_Binário(n)

```
▷ na saída, b contém a representação binária de n
t ← n;
k ← −1;
enquanto t > 0 faça
    k ← k + 1;
    b[k] ← t mod 2;
    t ← t div 2;
retornar b.
```

Invariante:

Ao entrar no laço 4–7, o inteiro m representado pelo subvetor $b[0 \dots k]$ é tal que $n = t.2^{k+1} + m$.

Invariante:

Ao entrar no laço 4–7, o inteiro m representado pelo subvetor $b[0\dots k]$ é tal que $n = t.2^{k+1} + m$.

Demonstração: seja $j = k + 1$ (j =# execuções da linha 4)

Invariante:

Ao entrar no laço 4–7, o inteiro m representado pelo subvetor $b[0 \dots k]$ é tal que $n = t.2^{k+1} + m$.

Demonstração: seja $j = k + 1$ ($j =$# execuções da linha 4)

Deseja-se provar por indução em j que $n = t.2^j + m$.

Invariante:

Ao entrar no laço 4–7, o inteiro m representado pelo subvetor $b[0 \dots k]$ é tal que $n = t.2^{k+1} + m$.

Demonstração: seja $j = k + 1$ ($j =$# execuções da linha 4)

Deseja-se provar por indução em j que $n = t.2^j + m$.

Base da indução: $j = 0$. Trivial, pois antes de fazer o laço, $m = 0$ (subvetor vazio de b) e $n = t$ pela linha 2.

Invariantes de laço e indução matemática

Invariante:

Ao entrar no laço 4–7, o inteiro m representado pelo subvetor $b[0 \dots k]$ é tal que $n = t.2^{k+1} + m$.

Demonstração: seja $j = k + 1$ (j =# execuções da linha 4)

Deseja-se provar por indução em j que $n = t.2^j + m$.

Base da indução: $j = 0$. Trivial, pois antes de fazer o laço, $m = 0$ (subvetor vazio de b) e $n = t$ pela linha 2.

Hipótese de indução: no início da execução da linha 4 na j^{a} iteração, tem-se que $n = t(j).2^j + m(j)$, sendo $m(j) = \sum_{i=0}^{j-1} 2^i.b[i]$.

Invariantes de laço e indução matemática

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\mathrm{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:
$t(j+1) = t(j)\ \texttt{div}\ 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:
$t(j+1) = t(j)\ \texttt{div}\ 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) \quad =$$

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:
$t(j+1) = t(j)\ \texttt{div}\ 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) \quad = p.2^{j+1} + m(j) =$$

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:
$t(j+1) = t(j)\ \texttt{div}\ 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) \quad = p.2^{j+1} + m(j) = 2p.2^j + m(j)$$

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\mathrm{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:
$t(j+1) = t(j)$ `div` 2 e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) = 2p.2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \end{aligned}$$

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:
$t(j+1) = t(j)\ \mathtt{div}\ 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) = 2p.2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \end{aligned}$$

Caso $t(j) = 2p + 1$ (ímpar):

$$t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) \quad =$$

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:

$t(j+1) = t(j) \texttt{ div } 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) = 2p.2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \end{aligned}$$

Caso $t(j) = 2p + 1$ (ímpar):

$$t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) \quad = p.2^{j+1} + m(j) + 2^j =$$

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:

$t(j+1) = t(j)\ \texttt{div}\ 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) = 2p.2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \end{aligned}$$

Caso $t(j) = 2p+1$ (ímpar):

$$t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) \quad = p.2^{j+1} + m(j) + 2^j = (2p+1).2^j + m(j)$$

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:

$t(j+1) = t(j)$ `div` 2 e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) = 2p.2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \end{aligned}$$

Caso $t(j) = 2p+1$ (ímpar):

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) + 2^j = (2p+1).2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Invariantes de laço e indução matemática

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:
$t(j+1) = t(j) \texttt{ div } 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ (par):

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) = 2p.2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \end{aligned}$$

Caso $t(j) = 2p+1$ (ímpar):

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) + 2^j = (2p+1).2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O algoritmo está correto pois, ao término do laço, $t = 0$ e passa-se da linha 4 direto para a linha 8. Pelo invariante, neste momento $n = m$.