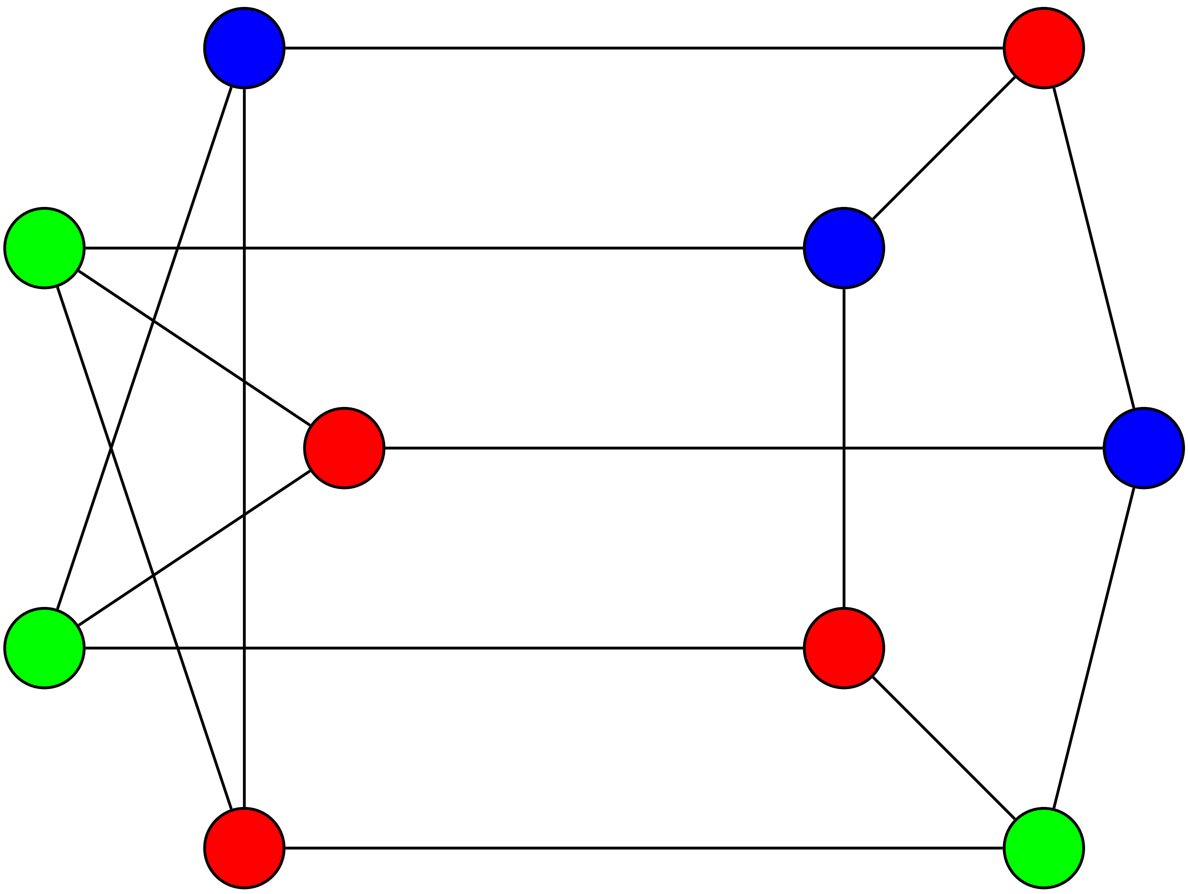
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC
Profa. Carla Negri Lintzmayer
Prof. Maycon Sambinelli

Notas de aula da disciplina Teoria dos Grafos

(*Em construção – Última atualização: 13 de dezembro de 2019*)



Sumário

1 Sobre o material

Essa apostila contém o conteúdo dado em sala de aula na disciplina de Teoria dos Grafos.

Ela não contém os exemplos, figuras e discussões feitos em sala.

Conteúdos dessa forma são sugestões de exercícios.

Conteúdos dessa forma são discussões que auxiliam ou justificam o conteúdo seguinte.

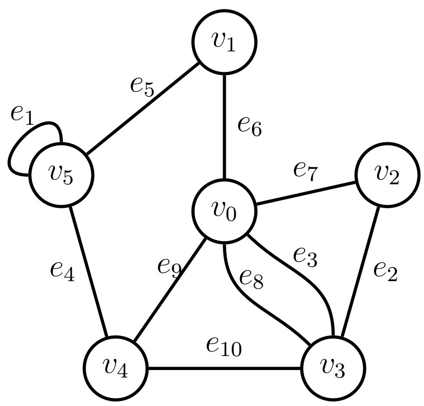
Teoremas.

Espaços em branco podem ser deixados para os rascunhos das provas:

2 Conceitos básicos

- Um grafo G é uma tripla (V, E, ψ), onde V é um conjunto de elementos chamados *vértices*, E é um conjunto de elementos chamados *arestas*, e ψ é a *função de incidência*, que associa uma aresta a um par não ordenado de vértices[1].
- Por exemplo, $H = (V, E, \psi)$ onde
  - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
  - $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$
  - $\psi(e_1) = \{v_5, v_5\}$, $\psi(e_2) = \{v_2, v_3\}$, $\psi(e_3) = \{v_0, v_3\}$, $\psi(e_4) = \{v_4, v_5\}$, $\psi(e_5) = \{v_5, v_1\}$, $\psi(e_6) = \{v_0, v_1\}$, $\psi(e_7) = \{v_0, v_2\}$, $\psi(e_8) = \{v_0, v_3\}$, $\psi(e_9) = \{v_0, v_4\}$, $\psi(e_{10}) = \{v_3, v_4\}$

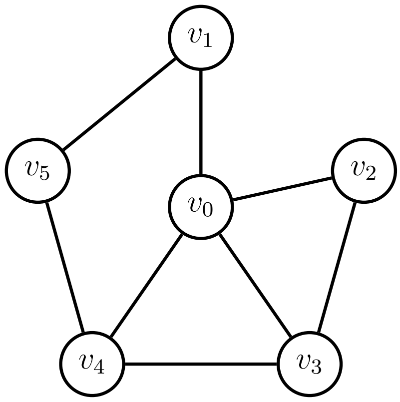
  é um grafo.
- Grafos possuem esse nome por permitirem uma representação gráfica amigável:
  - círculos (bolinhas) representam vértices, e
  - uma aresta e é representada por uma linha que liga os círculos que representam os vértices x e y se $\psi(e) = \{x, y\}$.
- O grafo H dado acima pode ser visualizado na figura a seguir (note como V, E e ψ podem ser inferidas pelo desenho):



- Considere um grafo $G = (V, E, \psi)$ qualquer.
- A *ordem* de G é a quantidade de vértices, isto é, $|V|$, e é denotada por $n(G)$.
- O *tamanho* de G é a quantidade de arestas, isto é, $|E|$, e é denotado por $m(G)$.
- Quando o grafo G é claro pelo contexto, simplesmente escrevemos n e m ao invés de $n(G)$ e $m(G)$, respectivamente.
- Duas arestas e e f são *paralelas* se $\psi(e) = \psi(f)$.
- Uma aresta e é um *laço* se $\psi(e) = \{v, v\}$ para algum $v \in V$.

[1] Muitas notações em grafos fazem mais sentido quando vemos os termos em inglês: V é por causa de *vertices*, E é por causa de *edges* e ψ é porque nenhum matemático aguenta não utilizar letras gregas.

- Dizemos que G é *simples* se não contém laços nem arestas paralelas.
- Se G é um grafo simples, uma aresta pode ser unicamente determinada pelos seus extremos. Assim, ψ pode ser definida implicitamente fazendo com que E seja um conjunto de pares não ordenados de vértices. Desta forma, G pode ser definido pelo par (V, E)
  - Por exemplo, $J = (V, E)$ onde $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$ é um grafo simples.
  - Sua representação gráfica é dada na figura a seguir:



- A menos que explicitamente dito, neste curso lidaremos apenas com grafos simples.
  - Nesse caso, note que
$$m(G) \leq \binom{n(G)}{2} = \frac{n(G)(n(G)-1)}{2} .$$
- Dado um grafo $G = (A, B)$, vamos denotar o conjunto de vértices de G por $V(G)$ e seu conjunto de arestas por $E(G)$, i.e., $V(G) = A$ e $E(G) = B$. Com esta notação, agora podemos definir um grafo H sem precisar nomear os elementos do par, já que agora podemos referenciar o conjunto de vértices por $V(H)$ e o conjunto de arestas por $E(H)$.
- Para simplificar a notação, denotaremos uma aresta $\{u, v\}$ simplesmente por uv (ou vu, já que $\{u, v\} = \{v, u\}$).

2.1 Adjacência e vizinhança

- Se $e \in E(G)$ e $e = uv$, dizemos:
  - u e v são *vizinhos* ou *adjacentes*;
  - u é adjacente a v ou vizinho de v (e vice-versa);
  - u e v são *extremos* de e;
  - e *incide* em u (e em v).
- A *vizinhança* de $u \in V(G)$, denotada $N_G(u)$ ou apenas $N(u)$, é o conjunto de vizinhos de u, isto é, $\{v \colon uv \in E(G)\}$ (N de *neighborhood*).
- Arestas com um extremo em comum também são chamadas de adjacentes.

2.2 Grau

- O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado $d_G(v)$ ou $d(v)$, é o número de arestas incidentes a v (d de *degree*).
  - No caso de G ser um grafo não simples, note que podemos ter $d_G(v) \neq |N_G(v)|$ para algum $v \in V(G)$.
- Se $d(v) = 0$, v é dito *isolado*.
- O *grau mínimo* de um grafo G, denotado $\delta(G)$, é o menor grau dentre os graus de todos os vértices de G, isto é,

$$\delta(G) = \min\{d_G(u) \colon u \in V(G)\} \ .$$

- O *grau máximo* de um grafo G, denotado $\Delta(G)$, é o maior grau dentre os graus de todos os vértices de G, isto é,

$$\Delta(G) = \max\{d_G(u) \colon u \in V(G)\} \ .$$

O teorema a seguir estabelece uma relação identidade fundamental que relaciona os graus dos vértices com o número de arestas em um grafo.

Teorema 1 (Aperto de mãos)**.** *Para todo grafo G temos que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m(G)$.*

Demonstração. Uma aresta uv é contada duas vezes na soma dos graus, uma em $d(u)$ e outra em $d(v)$. □

Demonstração. Por indução em $m = m(G)$.

No caso base, $m = 0$, o que significa que o grau de todo vértice é 0 e, portanto, o resultado vale.

Considere agora um grafo G com $m > 0$ arestas e suponha que para todo grafo H com k arestas, sendo $0 \leq k < m$, vale que $\sum_{v \in V(H)} d_H(v) = 2m(H) = 2k$

Como G tem pelo menos uma aresta, seja xy uma aresta de G. Considere agora um grafo G' construído a partir de G removendo-se apenas a aresta xy. Note que, por hipótese de indução, vale que $\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2m(G') = 2(m(G) - 1)$.

Por construção, temos que $d_G(x) = d_{G'}(x) + 1$, $d_G(y) = d_{G'}(y) + 1$ e $d_G(v) = d_{G'}(v)$ para todo $v \in V(G) \setminus \{x, y\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V(G)} d_G(v) &= d_G(x) + d_G(y) + \sum_{v \in V(G) \setminus \{x,y\}} d_G(v) \\
&= d_{G'}(x) + d_{G'}(y) + 2 + \sum_{v \in V(G) \setminus \{x,y\}} d_{G'}(v) \\
&= 2 + 2m(G') = 2m(G) \ .
\end{aligned}$$

□

Demonstração. Considere uma matriz $M = \{x_{ij}\}$ de ordem $n(G) \times m(G)$ onde x_{ij} indica se a aresta j incide no vértice i. Note que $\sum_{i \in V(G)} \sum_{j \in E(G)} x_{ij} = 2m(G)$. Claramente, $\sum_{j \in E(G)} x_{ij} = d_G(i)$. $\square$

Demonstre esse teorema por indução no número de vértices.

Corolário 2. *Todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.*

2.3 Algumas classes de grafos

- Um grafo é *nulo* se $V(G) = E(G) = \emptyset$.
- Um grafo é *vazio* se $E(G) = \emptyset$.
- Um grafo é *trivial* se $|V(G)| = 1$ e $E(G) = \emptyset$.
- Um grafo é *k-regular* se todos os seus vértices possuem grau k, onde $k \in \mathbb{Z}^+$.
- Um grafo é *regular* se ele é k-regular para algum k.
- Um grafo é *completo* se $uv \in E(G)$ para todo $u, v \in V(G)$:
  - O grafo completo de n vértices é denotado K_n.
  - Ele é $(n-1)$-regular.
  - O grafo K_3 é chamado de *triângulo*.
  - Todo K_n tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.
- Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y ($X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$) de modo que toda aresta de G tem um extremo em X e outro em Y.
  - Neste caso dizemos que G é *(X,Y)-bipartido*.
  - É comum denotar tal grafo por $G[X,Y]$.
  - Se $r = |X|$ e $s = |Y|$, então $|E(G)| \leq rs$.
- $G[X,Y]$ é *bipartido completo* se todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y.
  - Denotamos o grafo bipartido completo com $p = |X|$ e $q = |Y|$ por $K_{p,q}$.

Um grafo $G = (V,E)$ é um *caminho* se $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ e $E(G) = \{v_i v_{i+1} : 0 \leq i < n\}$.

Teorema 3. *Todo caminho é bipartido.*

O teorema a seguir dá uma condição *suficiente* para um grafo não ser bipartido.

Teorema 4. *Seja G um grafo com n vértices. Se G tem mais do que $n^2/4$ arestas, então G não é bipartido.*

Demonstração. Seja G um grafo com mais do que $n^2/4$ arestas e, para fins de contradição, suponha que G é bipartido. Seja (X, Y) a bipartição de G, com $x = |X|$ e $y = |Y|$. Então temos

$$\frac{(x+y)^2}{4} = \frac{n^2}{4} < m(G) \leq xy \ .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &< 4xy \\
x^2 + 2xy + y^2 - 4xy &< 0 \\
x^2 - 2xy + y^2 &< 0 \\
(x-y)^2 &< 0 \ ,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. □

1. O resultado do Teorema 4 nos permite concluir que se $m(G) \leq n^2/4$, então o grafo é bipartido? (*a condição é suficiente, mas ela é necessária?*)
2. Será que conseguimos algum valor melhor do que $n^2/4$? (*existem grafos bipartidos com $n^2/4$ arestas?*)

2.4 Representações

- Seja $G = (V, E)$ um grafo com $n = n(G)$ e $m = m(G)$.
- Uma *matriz de adjacências* é uma matriz $M = (m_{ij})$ de dimensões $n \times n$ tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } ij \in E(G) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Uma *lista de adjacências* é uma lista que contém n listas, sendo uma para cada vértice. A lista de um vértice contém seus vizinhos em alguma ordem.

- Por que mais de uma representação? Qual é a melhor? Qual ocupa mais espaço?
- Qual o custo computacional para (i) testar se uma aresta existe, (ii) remover uma aresta, e (iii) encontrar os vizinhos de um vértice?

2.5 Subgrafos

- Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.
  - Dizemos que G *contém* H.
  - Dizemos que G é *supergrafo* de H.
  - Escrevemos $H \subseteq G$.
- Um grafo H é *subgrafo gerador* de G se é subgrafo de G e $V(H) = V(G)$.
- Dado $S \subseteq V(G)$, o subgrafo de G *induzido por* S é o subgrafo $G[S]$ tal que $V(G[S]) = S$ e $E(G[S])$ contém todas as arestas de G que possuem ambos extremos em S, isto é, $E(G[S]) = \{uv \in E(G) \colon u, v \in S\}$.
- Dado $F \subseteq E(G)$, o subgrafo de G *induzido por* F é o subgrafo $G[F]$ tal que $E(G[F]) = F$ e $V(G[F])$ contém todos os vértices de G que são extremos de alguma aresta em F ($V(G[F]) = \{v \in V(G) \colon \exists vu \in F\}$).

2.6 Passeios, trilhas, caminhos e ciclos

- Um *passeio* é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $0 \leq i < k$.
  - v_0 é a *origem* ou *vértice inicial.*
  - v_k é o *término* ou *vértice final.*
  - v_0 e v_k são *extremos* do passeio.
  - $v_1, \ldots, v_{k-1}$ são *vértices internos* ao passeio.
  - O *comprimento* do passeio é o número de arestas nele (k).
  - O passeio é *par* se seu comprimento for par e *ímpar* caso contrário.
  - Ele é *fechado* se sua origem e término são iguais.
- Uma *trilha* é um passeio que não repete arestas.
- Uma *trilha fechada* é um passeio fechado que não repete arestas.
- Um *caminho* é um passeio que não repete vértices.
- Um *ciclo* é um passeio fechado de comprimento não nulo que não repete vértices internos.
- Quando conveniente, tratamos um passeio $W = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ como sendo o grafo com $V(W) = \{v_0, \ldots, v_k\}$ e $E(W) = \{v_i v_{i+1} \colon 0 \leq i < k\}$.
- Um grafo que é apenas um caminho com n vértices é denotado por P_n.
- Um grafo que é apenas um ciclo com n vértices é denotado por C_n.
- A *distância* entre dois vértices u e v, denotada $\mathrm{dist}_G(u, v)$, é a menor quantidade de arestas de um caminho entre u e v em G, ou ∞ se não houver caminho entre u e v em G.

Muitas aplicações envolvem determinar se um grafo tem um subgrafo com certas propriedades.

Teorema 5. *Seja G um grafo no qual todos os vértices têm grau pelo menos 2. Então G contém um ciclo.*

- Reescreva o enunciado do Teorema 5 usando $\delta(G)$.
- Todo ciclo é bipartido?

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja bipartido. Ele dá uma *caracterização* para grafos bipartidos.

Teorema 6. *Um grafo G é bipartido se e somente se G não contém ciclos ímpares.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que se G é bipartido, então G não contém ciclos ímpares.

Suponha que G é (X, Y)-bipartido. Se G não tem ciclo algum, então não há o que provar. Logo, seja $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ um ciclo de G. Sem perda de generalidade, assuma que $v_1 \in X$. Vamos mostrar que para i ímpar, com $1 \leq i \leq k$, $v_i \in X$ também.

De fato, $v_1 \in X$ e, para $i \geq 3$, se $v_{i-2} \in X$, como $v_{i-2}v_{i-1} \in E(G)$ e G é bipartido, então $v_{i-1} \in Y$. Da mesma forma, $v_{i-1}v_i \in E(G)$ implica $v_i \in X$. Como existe a aresta v_kv_1, certamente $v_k \in Y$. Como todo v_i com i ímpar está em X, então concluímos que k é par. Então todo ciclo de G é par.

Agora vamos mostrar que se G não contém ciclos ímpares, então G é bipartido.

Seja G um grafo sem ciclos ímpares e assuma, sem perda de generalidade, que G é conexo (existe um caminho de u a v para todo par $u, v \in V(G)$). Tome um vértice x qualquer e defina $X = \{v \in V(G) \colon \operatorname{dist}_G(x, v) \text{ é par } \}$ e $Y = \{v \in$

$V(G)$: $\text{dist}_G(x,v)$ é ímpar $\}$. Por definição, $X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$. Então, basta provar que não há arestas entre vértices de X e não há arestas entre vértices de Y para termos uma (X,Y)-partição de G.

Inicialmente tome dois vértices u e v em X. Considere P_{xu} e Q_{xv} como sendo caminhos mais curtos entre x e u e entre x e v, respectivamente.

Como x é um vértice que está em ambos os caminhos, então existe pelo menos um vértice w em comum nesses caminhos. Seja $P_{xu} = (x, v_1, v_2, \ldots, v_i, w, v_{i+1}, \ldots, v_p, u)$ e $Q_{xv} = (x, u_1, u_2, \ldots, u_j, w, u_{j+1}, \ldots, u_q, v)$ onde nenhum vértice em $\{v_{i+1}, \ldots, v_p\}$ está em Q_{xv} e nenhum vértice em $\{u_{j+1}, \ldots, u_q\}$ está em P_{xu} (w é o último vértice em comum dos dois caminhos). Note primeiramente que $i = j$ pois P_{xu} e Q_{xv} são caminhos mais curtos[2]. Como u e v estão em x, P_{xu} e Q_{xv} têm quantidade par de arestas cada um. Sejam $P_{wu} = (w, v_{i+1}, \ldots, v_p, u)$ e $Q_{wv} = (w, u_{j+1}, \ldots, u_q, v)$. Temos então que $|E(P_{wu})| + |E(Q_{wv})|$ é par. Como $(u, v_p, \ldots, v_{i+1}, w, u_{j+1}, \ldots, u_q, v)$ é um caminho, se uv existisse em $E(G)$ teríamos um ciclo de tamanho ímpar em G. Como escolhemos u e v arbitrariamente, concluímos que X é um conjunto independente.

De forma análoga podemos mostrar que não há arestas entre vértices de Y[3]. $\square$

2.7 Modificando grafos

- Remoção de um conjunto $S \subseteq V(G)$ de vértices: $G - S = G[V(G) \setminus S]$
- Remoção de um conjunto $F \subseteq E(G)$ de arestas: $G - F = G[E(G) \setminus F]$
- Abuso de notação: $G - v = G - \{v\}$ para $v \in V(G)$, $G - e = G = \{e\}$ para $e \in E(G)$.
- Adição de um conj. $S \nsubseteq V(G)$ de vértices: $G + S = (V \cup S, E)$
- Adição de um conj. $F \nsubseteq E(G)$ de arestas: $G + F = (V, E \cup F)$ e $F \subseteq V(G) \times V(G)$.
- Abuso de notação: $G + v = G + \{v\}$ para $v \notin V(G)$ e $G + e = G + \{e\}$ para $e = uv$ com $u, v \in V(G)$ e $e \notin E(G)$.

2.8 Extremalidade

- O Teorema 4 diz que seja G é um grafo com n vértices e tem mais do que $n^2/4$ arestas, então G não é bipartido. Em outras palavras, se G de ordem n é bipartido, então G tem no máximo $n^2/4$ arestas.
- Ter menos do que $n^2/4$ arestas implica em ser bipartido?
  - Não, por exemplo o C_7 tem $7 < 49/4 = 12,25$ arestas.

[2] Por quê?
[3] Exercício.

- Se G é bipartido de ordem n, obviamente G tem no máximo $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ arestas. O Teorema 4 diminuiu esse limitante para $\frac{n^2}{4}$. Será que é possível diminuir mais?
  - Não, pois o $K_{n/2,n/2}$ tem exatamente $n^2/4$ arestas.

Com o Teorema 6, podemos reescrever o Teorema 4: "Se G de ordem n não tem ciclos ímpares, então G tem no máximo $n^2/4$ arestas." Será que dá para enfraquecer a hipótese e ainda manter o limitante?

Teorema 7 (Mantel, 1907)**.** *Se G é um grafo de ordem n que não contém triângulos, então G tem no máximo $n^2/4$ arestas.*

Demonstração. Por indução no número n de vértices do grafo.

Se $n \leq 2$, a afirmação vale trivialmente. Seja $n > 2$ qualquer e suponha que todo grafo de ordem k, com $2 \leq k < n$, sem triângulos tem no máximo $k^2/4$ arestas.

Seja G um grafo de ordem n que não contém triângulos. Sejam x e y dois vértices adjacentes em G e seja H o subgrafo obtido de G após a remoção de x e y ($H = G - \{x, y\}$).

Como $xy \in E(G)$, x e y não podem ter vizinhos em comum, pois caso contrário teríamos um triângulo em G. Sejam $E_x = \{w \in V(H) \colon xw \in E(G)\}$ e $E_y = \{w \in V(H) \colon yw \in E(G)\}$. Como G não contém triangulos, temos que cada vértice de $V(H)$ é adjacente em G a no máximo um vértice do conjunto $\{x, y\}$. Assim, temos que $|E_x \cup E_y| \leq n - 2$. Note que H não contém triângulos e $n(H) = n - 2$. Por hipótese de indução, $m(H) \leq \frac{(n-2)^2}{4}$. Então

$$\begin{aligned} m(G) &= m(H) + |E_x| + |E_y| + 1 \\ &\leq m(H) + (n-2) + 1 \\ &\leq \frac{(n-2)^2}{4} + n - 1 \\ &= \frac{n^2 - 4n + 4}{4} + \frac{4n - 4}{4} = \frac{n^2}{4} \ . \end{aligned}$$

□

Existe uma outra prova para o Teorema de Mantel que acaba mostrando quais grafos sem triângulos tem exatamente $n^2/4$ arestas[4].

[4] A saber, é só o $K_{n/2,n/2}$ mesmo.

Triângulo é o K_3. Uma pergunta natural é qual a maior quantidade de arestas possível em um grafo que não contém K_r como subgrafo, para $r > 3$.

Teorema 8 (Turán, 1941)**.** *Se G é um grafo de ordem n que não contém K_{r+1}, para $r \geq 2$, então G tem no máximo $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$ arestas.*

Teorema 9. *Todo grafo que não contém ciclos tem pelo menos dois vértices de grau 1.*

2.9 Maximalidade e minimalidade

- Na prova do Teorema 5, começamos por escolher um caminho mais longo no grafo (um caminho máximo).
  - Matematicamente falando, isso é ok.
  - Algoritmicamente falando, nem tanto.
  - Encontrar um caminhos máximos em um grafo qualquer é um problema NP-completo.
- A prova pode continuar válida se substituirmos "caminho mais longo" por "caminho maximal".
  - Um caminho maximal é um caminho que não pode ser estendido para um caminho maior do que ele a partir de nenhum de seus extremos.
  - Ele é fácil de ser encontrado: comece de qualquer vértice e vá seguindo por novos vértices até não conseguir mais.

    Implemente uma função EncontraCiclo(G) usando a técnica descrita na prova do Teorema 5 porém usando um caminho maximal.
- Conceitos de maximalidade e minimalidade são muito importante em grafos.
- Seja $\mathcal{G}$ uma família de subgrafos de G.
  - Um subgrafo $H \in \mathcal{G}$ é *maximal em* $\mathcal{G}$ se nenhum outro subgrafo de $\mathcal{G}$ propriamente contém H.
  - Um subgrafo $H \in \mathcal{G}$ é *minimal em* $\mathcal{G}$ se nenhum outro subgrafo de $\mathcal{G}$ está propriamente contido em H.
- Por exemplo, seja $\mathcal{G}$ o conjunto que contém todos os caminhos de G. Um *caminho maximal de* G é um membro de $\mathcal{G}$ que é maximal.
  - Faça exemplos de caminhos maximais.
  - Perceba por que não é tão interessante falar em caminhos minimais.
- Não confunda maximal com máximo e nem minimal com mínimo!

- Maximal = nenhum outro o contém.
- Máximo = maior de todos.
- Minimal = não contém nenhum outro.
- Mínimo = menor de todos.

O teorema a seguir garante que se um grafo tem grau mínimo alto, então ele contém caminhos e ciclos longos.

Teorema 10. *Se G é um grafo com $\delta(G) \geq 2$, então G contém um caminho de comprimento pelo menos $\delta(G)$ e um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G)+1$.*

Demonstração. Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho maximal em G. Note que todo vizinho de v_k está em P. Como $d(v_k) \geq \delta(G)$, v_k tem pelo menos $\delta(G)$ vizinhos e, assim, P tem comprimento pelo menos $\delta(G)$. Seja i o menor índice tal que $v_i v_k \in E(G)$. O ciclo $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ tem pelo menos $\delta(G)+1$ arestas pois contém v_k e todos os seus vizinhos. □

2.10 Diâmetro e cintura

- O *diâmetro* de G, denotado $\operatorname{diam}(G)$, é a maior das distâncias entre todos os pares de vértices de G, isto é,

$$\operatorname{diam}(G) = \max\{\operatorname{dist}_G(u,v) \colon u, v \in V(G)\} \ .$$

- A *cintura* de G, denotada $g(G)$, é a quantidade de arestas do menor ciclo de G (ciclo mínimo), ou ∞ se G não tem ciclos (g de *girth*).

O teorema a seguir relaciona essas duas medidas.

Teorema 11. *Se G contém um ciclo, então $g(G) \leq 2\operatorname{diam}(G)+1$.*

Demonstração. Seja $k = g(G)$ e $C = (v_1, \dots, v_k, v_1)$ o menor ciclo de G. Note que não existem caminhos com menos do que $\lceil k/2 \rceil$ arestas entre v_1 e $v_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}$ em G, caso contrário G teria um ciclo menor. Por definição, $\operatorname{diam}(G) = \max\{\operatorname{dist}_G(u,v) \colon u, v \in V(G)\} \geq \operatorname{dist}_G(v_1, v_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}) = \lfloor k/2 \rfloor$. Assim, temos que $\operatorname{diam}(G) \geq \lfloor g(G)/2 \rfloor \geq (g(G)-1)/2$, de onde $g(G) \leq 2\operatorname{diam}(G)+1$. □

Teorema 12. *Se G é um grafo k-regular com $g(G) = 4$, então G tem pelo menos $2k$ vértices.*

Demonstração. Seja G um grafo k-regular com $g(G) = 4$. Considere $v \in V(G)$ qualquer. Note que $|N(v)| = d(v) = k$. Como G não tem triângulos, então não existem arestas em $G[N(v)]$. Assim, um vértice $u \in N(v)$ tem como vizinhos v e outros $k-1$ vértices fora de $N(v)$. Então $n(G) \geq 1 + |N(v)| + (|N(u)| - 1) = 2k$. □

Teorema 13. *Seja G um grafo com* $\mathrm{diam}(G) = 2$ *e* $\Delta(G) = n-2$. *Então* $m \geq 2n-4$.

2.11 Conexidade

- Um grafo no qual existe um caminho entre todo par de vértices é chamado *conexo*.
- Um grafo que não é conexo é dito *desconexo*.
- Um grafo desconexo consiste de um conjunto de *componentes conexas*, que são subgrafos conexos maximais.
  - Denotamos o número de componentes conexas de um grafo G por $c(G)$.
- Observações:
  - Componentes distintas não têm vértices em comum.
  - Acrescentar uma aresta com extremos em componentes distintas diminui o número de componentes em uma unidade.
  - Acrescentar uma aresta em um grafo qualquer diminui o número de componentes de 0 ou 1 unidade.
  - Remover uma aresta de um grafo qualquer aumenta o número de componentes de 0 ou 1 unidade.
  - Remover um vértice de um grafo qualquer aumenta o número de componentes de 0 ou 1 unidade.

Teorema 14. *Se u e v são os únicos vértices de grau ímpar em G, então existe um uv-caminho.*

- Uma aresta $e \in E(G)$ cuja remoção de G gera um grafo com mais componentes conexas do que G é uma *aresta de corte* ou *ponte*.
- Um vértice $v \in V(G)$ cuja remoção de G gera um grafo com mais componentes conexas do que G é um *vértice de corte* ou *articulação*.

O teorema a seguir caracteriza arestas de corte em grafos.

Teorema 15. *Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a nenhum ciclo.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que se e é aresta de corte, então e não pertence a nenhum ciclo.

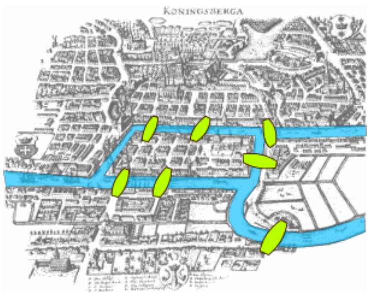
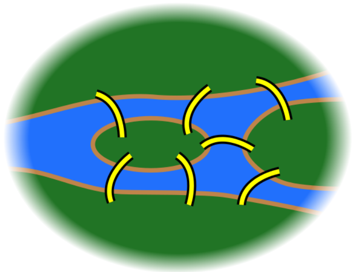
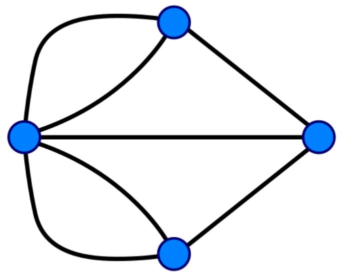
Seja $e = xy$ uma aresta de corte e suponha, para fins de contradição, que e pertence a um ciclo $C = (x, v_1, \ldots, v_p, y, x)$. Seja $G' = G - e$. Por definição, G' tem mais componentes do que G e note que x e y estão em componentes diferentes de G'. Contudo, o caminho $(x, v_1, \ldots, v_p, y)$ está em G', um absurdo.

Agora vamos mostrar que se e não pertence a nenhum ciclo, então e é uma aresta de corte.

Suponha que $e = xy$ não pertence a nenhum ciclo e, para fins de contradição, suponha que e não é de corte. Seja $G' = G - e$. Como e não é de corte, G' tem as mesmas componentes de G, o que significa que existe caminho P entre x e y em G'. Esse caminho P juntamente com a aresta e forma um ciclo em G, uma contradição. □

3 Grafos eulerianos

- A cidade de Königsberg ficava no rio Pregel, na Prussia.
- O rio delimitava quatro regiões de terra ligadas por sete pontes.

- Saindo de casa, é possível ao morador percorrer cada ponte exatamente uma vez e voltar para casa?
- Leonard Euler, em 1736, modelou o problema como um problema de grafos (provavelmente o primeiro).
  - Ele percebeu que só seria possível realizar o percurso se existissem apenas vértices com grau par.

Um grafo é *par* se todos os seus vértices têm grau par.

Corolário 16. *Todo grafo conexo e par com pelo menos dois vértices contém um ciclo.*

3.1 Trilhas eulerianas

- Seja T uma trilha em um grafo G. Dizemos que:
  - T é uma *trilha euleriana* se T é uma trilha fechada e $E(T) = E(G)$.
  - T é uma *trilha euleriana aberta* se T é uma trilha aberta e $E(T) = E(G)$.
  - Note que uma trilha euleriana (aberta) visita todas as arestas do grafo.
  - G é um *grafo euleriano* se contém uma trilha euleriana.

Observe como "se comporta" uma trilha euleriana (aberta) ao redor dos vértices do grafo.

O teorema a seguir dá uma caracterização para grafos eulerianos. A ida é um resultado de Euler, de 1736, e a volta é um resultado de Hierholzer, de 1873.

Teorema 17. *Um grafo conexo G é euleriano se e somente se G é par.*

Demonstração. Considere um grafo G conexo. Primeiro vamos mostrar que se G é euleriano, então G é par.

Seja $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ uma trilha euleriana de G. Note que para $i = 1, 2, \ldots, k$, as arestas $v_{i-1}v_i$ e v_iv_{i+1} contribuem com duas unidades para o grau de v_i, onde $v_{k+1} = v_1$. Então todo vértice de G tem grau múltiplo de dois e, portanto, par.

Agora vamos mostrar que se G é par, então G é euleriano. Vamos usar indução em $m = |E(G)|$. Se $m = 0$, então por ser conexo G é dado por $V(G) = \{v\}$ e $E(G) = \emptyset$. A trilha (v) é fechada e contém todas as arestas de G e, portanto, o resultado vale.

Agora, assuma que $m > 1$ e considere que todo grafo conexo par com menos do que m arestas é euleriano. Como G é conexo e par, temos que $\delta(G) \geq 2$, e como $m > 1$, temos que $|V(G)| \geq 2$. Assim, pelo Corolário 16, G contém um ciclo $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$. Seja $G' = G - E(C)$.

Note que cada componente conexa de G' é par. Sejam $G'_1, G'_2, \ldots, G'_\ell$ as componentes não triviais[5] de G'. Note que para $i = 1, 2, \ldots, \ell$, temos que $|E(G'_i)| < m$. Assim, pela hipótese de indução, temos que, para $i = 1, 2, \ldots, \ell$, a componente G'_i possui uma trilha euleriana T_i. Agora, vamos mostrar como combinar tais trilhas das componentes de G' com o ciclo C para formar uma trilha euleriana de G.

Como o grafo G é conexo, temos que $V(C) \cap V(G'_i) \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, \ldots, \ell$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, \ell$, seja v_{r_i} o vértice mais à esquerda na sequência $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (dos vértices de C) tal que $v_{r_i} \in V(C) \cap V(G'_i)$. Considere a sequência de vértices visitados pela trilha T_i como tendo início e, portanto, fim em v_{r_i}. Defina $C_1 = (v_1, \ldots, v_{r_1 - 1})$, $C_{\ell+1} = (v_{r_\ell + 1}, \ldots, v_1)$ e $C_i = (v_{r_{i-1}+1}, \ldots, v_{r_i - 1})$ para $2 \leq i \leq \ell$ e note que $C = (C_1, v_{r_1}, C_2, v_{r_2}, \ldots, C_\ell, v_{r_\ell}, C_{\ell+1})$. Assim, a trilha $T = (C_1, T_1, C_2, T_2, \ldots, C_\ell, T_\ell, C_{\ell+1})$ é uma trilha euleriana em G. □

[5] Veja a definição de grafo trivial na Seção 2.3.

Outra demonstração para "Se G é par, então G é euleriano."

Demonstração. Seja G conexo e par. Considere uma trilha máxima T em G. Primeiramente vamos provar que T é fechada. Suponha, por contradição, que T começa no vértice u e termina em um vértice $v \neq u$. Então existe uma quantidade ímpar de arestas de T que incidem em v. Mas como $d(v)$ é par, existe pelo menos uma aresta vw incidente a v que não está em T. Mas então T seguida de vw é uma trilha maior do que T, um absurdo.

Resta mostrar que $T = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ é euleriana. Suponha, por contradição, que T não é euleriana. Então existe uma aresta $e \in E(G)$ que não está em T. Como G é conexo, existe um caminho de um dos extremos de e até algum v_i. Então existe $e' = v_i w$ que não está em T. Mas a trilha $(w, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ é maior do que T, um absurdo. □

3.2 Decomposição de grafos

- Uma *decomposição* de G é uma coleção $\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ de subgrafos de G tal que:
  - para qualquer $1 \leq i < j \leq k$, temos que $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$; e
  - $\cup_{i=1}^{k} E(G_i) = E(G)$.
- Dizemos que uma decomposição $\mathcal{D}$ de um grafo G é uma *decomposição em ciclos* se todo elemento de $\mathcal{D}$ é um ciclo.

Teorema 18. *Um grafo é par se e somente se ele pode ser decomposto em ciclos.*

Demonstração. Vamos mostrar que se um grafo pode ser decomposto em ciclos, então ele é par. Seja G um grafo que pode ser decomposto em ciclos. Como todos os vértices de um ciclo têm grau 2 e toda aresta do grafo faz parte de exatamente um ciclo, então todos os vértices de G têm grau par.

Agora vamos mostrar que se um grafo é par, então ele pode ser decomposto em ciclos. Vamos supor por contradição que nem todo grafo par pode ser decomposto em ciclos. Seja $\mathcal{N}$ o conjunto de todos os grafos pares que não podem ser decompostos em ciclos. Seja $G \in \mathcal{N}$ minimal em $\mathcal{N}$[6].

Pelo Corolário 16, G contém um ciclo C. Seja $G' = G - E(C)$. Note que $d_{G'}(u) = d_G(u) - 2$ para todo $u \in V(C)$ e que $d_{G'}(u) = d_G(u)$ caso contrário. Assim, G' é um grafo par. Note que se G' admitisse decomposição em ciclos $\mathcal{D}$, então $\mathcal{D} \cup \{C\}$ seria uma decomposição em ciclos de G. Logo, G' não admite decomposição em ciclos. Mas então G' deve pertencer a $\mathcal{N}$. Como $G' \subset G$, temos uma contradição com a escolha de G. □

Conjectura 19 (Hajós, 1968)**.** *Todo grafo par com n vértices pode ser decomposto em no máximo $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ ciclos.*

Provar a volta do Teorema 18 por indução usando o Corolário 16.

O teorema a seguir caracteriza grafos que contêm uma trilha euleriana aberta.

Teorema 20. *Um grafo conexo G contém uma trilha euleriana aberta se e somente se G tem exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Teorema 21. *Um grafo par não possui arestas de corte.*

3.3 Algoritmo de Fleury

- Para descobrir se um grafo é euleriano ou se tem uma trilha euleriana aberta, basta percorrer seus vértices testando a paridade dos graus (Teorema 17 e Teorema 20).
- Para fornecer uma trilha euleriana (aberta), podemos utilizar o algoritmo de Fleury (1883).
- Importante: se existem 0 vértices de grau ímpar, comece em qualquer um; se existem 2 vértices de grau ímpar, comece em um deles. Ideia:
  - Siga as arestas uma por vez, removendo-as do grafo.
  - Se você tiver que escolher entre uma ponte e uma não ponte, *sempre* escolha a não ponte.
  - Pare quando as arestas acabarem.

[6] É comum escrevermos: “Seja G um contraexemplo minimal no número de arestas” ao invés das últimas três frases.

Função $\textsc{Fleury}(G, v)$
  $W \leftarrow (v)$, $x \leftarrow v$, $H \leftarrow G$
  Enquanto $d_H(x) \neq 0$ **faça**
    Escolha $xy \in E(H)$ onde xy não é ponte a menos que não haja alternativa
    Adicione xy a W
    $x \leftarrow y$, $H \leftarrow H - xy$
  Devolve W

Como descobrir se uma aresta xy é ponte?

Teorema 22. *Se G é um grafo conexo par, W devolvida pelo algoritmo de Fleury é uma trilha euleriana.*

Demonstração. Seja W devolvida pelo algoritmo após a execução sobre G e v.

Primeiro, note que W é trilha: sempre que escolhemos uma aresta para fazer parte de W a removemos do grafo. Agora, note que W é fechada: o vértice final de qualquer trilha fechada tem grau par na trilha e o algoritmo para quando atinge um vértice x tal que $d_H(x) = 0$ (x tinha grau par inicialmente e só removemos arestas que são usadas na trilha).

Resta mostrar que W é euleriana. Suponha por contradição que não é.

Seja H o grafo ao fim da execução do algoritmo. Se W não é euleriana, então $E(H) \neq \emptyset$. Além disso, como W é trilha fechada, H é par. Seja $X \subseteq V(G)$ o conjunto de vértices com grau positivo em H. Note que $V(G) \setminus X \neq \emptyset$ pois $v \in V(G) \setminus X$. Note que, por construção, em H não existe aresta entre X e $V(G) \setminus X$ mas em G existe, pois G é conexo. Então W contém arestas com um extremo em X e outro em $V(G) \setminus X$. Considere xy como a última aresta desse tipo ($x \in X$ e $y \in V(G) \setminus X$) que foi escolhida pelo algoritmo. Note que no momento em que ela foi escolhida, ela era ponte. Nesse mesmo momento, a escolha estava sendo feita em x (pois a trilha acaba em $V(G) \setminus X$). Mas H é par e, portanto, $d_H(x) \geq 2$, ou seja, havia outras arestas não ponte incidentes a x, pelo Teorema 21, violando a regra de escolha do algoritmo. $\square$

Mostre que o algoritmo de Fleury funciona quando o grafo contém dois vértices de grau ímpar e o algoritmo inicia em um deles.

4 Árvores

- Dada uma rede com n computadores, qual o menor número de ligações diretas que deve existir para que seja sempre possível fazer comunicação (não necessariamente direta) entre quaisquer dois nós?
- Qual o menor número de arestas de um grafo conexo?

Teorema 23. *Se G é um grafo conexo, então $m \geq n - 1$.*

Demonstração. Por indução em n.

No caso base, quando $n = 1$, devemos ter $m = 0$ e claramente o resultado vale.

Considere então um grafo G com n vértices, $n > 1$, e suponha que todo grafo conexo com k vértices, $1 \leq k < n$, tem pelo menos $k - 1$ arestas.

Note que se $\delta(G) \geq 2$, então temos $2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 2n$, de onde $m \geq n > n - 1$ e o resultado vale. Podemos então assumir que existe um vértice v tal que $d_G(v) = 1$. Seja $G' = G - v$. Claramente, G' é conexo e tem $n' = n - 1$ vértices. Se m' é a quantidade de arestas de G', então por hipótese temos que $m' \geq n' - 1$. Como $m' = m - 1$, temos $m - 1 = m' \geq n' - 1 = n - 2$, de onde $m \geq n - 1$. □

É verdade que se $m \geq n - 1$, então G é conexo?

Existem grafos com $m \geq n - 1$ que são conexos?

E com $m = n - 1$? O que esses grafos têm em comum?

Se G é conexo com $m = n - 1$, então G não tem ciclos?

Vamos relacionar ase seguintes propriedades nos resultados a seguir: ser conexo, não conter ciclos e ter $n - 1$ arestas.

Lema 24. *Se G é um grafo conexo com $m = n - 1$, então G não tem ciclos.*

Demonstração. Seja G conexo com $m = n - 1$ e suponha, por contradição, que G contém um ciclo C. Seja $e \in E(C)$ e seja $G' = G - e$. Pelo Teorema 15, a aresta e não é de corte e, portanto, G' é conexo. Note que $|V(G')| = |V(G)| = n$ e $|E(G')| = |E(G)| - 1 = n - 2$, contrariando o Teorema 23. □

Demonstração. Seja G conexo com $m = n - 1$ e suponha, por contradição, que G contém um ciclo C_ℓ. Seja $H = G - V(C_\ell)$ e sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de H. Como cada G_i é conexa, pelo Teorema 23, vale que $m(G_i) \geq n(G_i) - 1$. E como G é conexo, então existe ao menos uma aresta entre C_ℓ e G_i, para todo i. Então $m \geq \ell + \sum_{i=1}^{k} m(G_i) + k \geq \ell + \sum_{i=1}^{k} (n(G_i) - 1) + k = \ell + \sum_{i=1}^{k} n(G_i) - k + k = n$, o que é uma contradição, pois $m = n - 1$. □

Lema 25. *Se G é conexo e não tem ciclos, então $m = n - 1$.*

Demonstração. Por indução em n.

No caso base, se $n = 1$, o grafo não tem arestas e, de fato, $m = n - 1$.

Considere então um grafo G conexo e sem ciclos com $n > 1$ vértices e suponha que todo grafo conexo e sem ciclos com k vértices, para $1 \leq k < n$, tem exatamente $k - 1$ arestas.

Note que existe um vértice $v \in V(G)$ com $d_G(v) = 1$, pelo Teorema 9. Note ainda que $G' = G - v$ é conexo, não tem ciclos e tem $n - 1$ vértices. Então por hipótese, $m(G') = n(G') - 1 = n - 2$. Como $m(G') = m - 1$, então $m = n - 1$. □

Lema 26. *Se G não tem ciclos e vale que $m = n - 1$, então G é conexo.*

Demonstração. Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de G. Note que $\sum_{i=1}^{k} n(G_i) = n$ e $\sum_{i=1}^{k} m(G_i) = m$. Cada G_i não tem ciclos e é conexo, então, pelo Lema 25, $m(G_i) = n(G_i) - 1$. Somando para todos os componentes,

$$m = \sum_{i=1}^{k} m(G_i) = \sum_{i=1}^{k} (n(G_i) - 1) = n - k \;\; .$$

Sabemos, por hipótese, que $m = n - 1$, de forma que k só pode ser 1. Logo, G é conexo. □

- Um grafo sem ciclos é dito *acíclico*.
- Uma *árvore* é um grafo conexo acíclico.
- Uma *floresta* é um grafo acíclico.
- Uma *folha* é um vértice de grau 1.

Corolário 27. *Um grafo conexo G é uma árvore se e somente se $m = n - 1$.*

Lema 28. *Toda árvore G com $n \geq 2$ possui pelo menos duas folhas.*

A que outras classes de grafos uma árvore pertence?

Teorema 29. *Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) G é uma árvore.

(b) Existe um único caminho entre quaisquer dois vértices de G.

(c) G é conexo e para toda $e \in E$, $G - e$ é desconexo. (G é conexo minimal.*)*

(d) G é conexo e $m = n - 1$.

(e) G é acíclico e $m = n - 1$.

(f) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, $G + uv$ tem exatamente um ciclo. (G é acíclico maximal.*)*

Demonstração. Vamos mostrar que se (a) então (b), se (b) então (c), se (c) então (d), se (d) então (e), se (e) então (f) e se (f) então (a).

Primeiro vamos mostrar que se (a) então (b). Seja G uma árvore e, para fins de contradição, suponha que existem vértices $u, v \in V(G)$ tais que existem dois caminhos P e Q distintos entre u e v. Seja xw a primeira aresta de Q que não pertence a P. Ela pertence a um subcaminho maximal de Q que não possui arestas de P e vai até um vértice y. Esse subcaminho juntamente com o subcaminho de P que vai de x a y forma um ciclo em G, uma contradição.

Agora vamos mostrar que se (b) então (c). Suponha que vale (b). Então claramente G é conexo. Agora suponha por contradição que nem toda aresta de G é de corte. Seja e uma tal aresta. Então pelo Teorema 15, e pertence a um ciclo $C = (u, \dots, v, u)$ de G. Claramente, existem dois caminhos distintos entre u e v, uma contradição.

Agora vamos mostrar que se (c) então (d). Seja G conexo onde toda aresta é de corte. Então pelo Teorema 15, nenhuma aresta de G pertence a ciclos, ou seja, G é acíclico. Pelo Lema 25, $m = n - 1$.

Agora vamos mostrar que se (d) então (e). Se G é conexo e $m = n - 1$, então pelo Lema 24 temos que G é acíclico.

Agora vamos mostrar que se (e) então (f). Seja G acíclico com $m = n - 1$. Pelo Lema 26, G é conexo. Então G é uma árvore, por definição. Como (a) implica (b), todo par de vértices possui um único caminho entre eles. Sejam u e v dois vértices de G que não são adjacentes. Então $G + uv$ tem um único ciclo.

Por fim, vamos mostrar que se (f) então (a). Suponha que vale (f). Então G é acíclico e resta mostrar que ele é conexo. Se para todo par u, v de vértices não adjacentes vale que $G + uv$ tem um único ciclo, então existe um uv-caminho. Logo, G é conexo. □

O resultado a seguir caracteriza vértices de corte em árvores.

Teorema 30. *Seja T uma árvore. Um vértice $v \in V(T)$ é de corte se e somente se ele não é uma folha.*

Demonstração. ($\rightarrow$) Seja $v \in V(T)$ um vértice de corte. Como T é árvore, é um grafo conexo e, portanto, $T - v$ tem pelo menos 2 componentes conexas. Então v é adjacente a cada uma delas, de forma que $d_T(v) \geq 2$.

($\leftarrow$) Agora seja $v \in V(G)$ um vértice que não é folha em T. Então $d_T(v) \geq 2$. Sejam x e y dois dos vizinhos de v. Pelo Teorema 29, existe um único caminho entre x e y, e ele deve passar por v. Se removermos v, perdemos caminho e deixamos x e y em componentes distintas de $T - v$. Como T é conexo, então v deve ser de corte. □

4.1 Árvores geradoras

- Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo gerador de G que é uma árvore.

Teorema 31. *Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

Demonstração. Suponha que nem todo grafo conexo contém uma árvore geradora. Seja G um contra exemplo minimal no número de arestas. Se G não tivesse ciclos, seria uma árvore, uma contradição. Então G tem algum ciclo e seja e uma aresta desse ciclo. Note que $G' = G - e$ é conexo. Pela escolha de G, concluímos que G' contém uma árvore geradora T'. Mas $V(T') = V(G') = V(G)$ e $E(T') \subseteq E(G') \subset E(G)$, o que significa que T' é árvore geradora de G, uma contradição. □

Teorema 32. *Sejam T e T' duas árvores geradoras de G. Para cada $e \in E(T) \setminus E(T')$, existe $f \in E(T') \setminus E(T)$ tal que $T - e + f$ e $T' - f + e$ são árvores geradoras de G.*

- Um problema clássico em otimização combinatória é o problema *da árvore geradora mínima*:

  Entrada: G e $w\colon E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

  Objetivo: encontrar árvore geradora T tal que $\sum_{e \in E(T)} w(e)$ é mínimo.

  - Kruskal, Prim, Boruvka.

5 Buscas

- Como descobrir se um dado grafo é conexo?
- Poderíamos verificar se há caminhos entre todos os pares de vértices.
- No caso de grafos grandes, essa abordagem pode consumir muito tempo porque o número de caminhos entre pares pode ser muito grande.
- A propriedade a seguir sobre árvores contidas em um grafo nos dá uma base para um algoritmo eficiente para qualquer grafo:
  - Seja T uma árvore que é subgrafo de um grafo G.
  - Se $V(T) = V(G)$, então T é geradora e podemos concluir que G é conexo.
  - Se $V(T) \neq V(G)$, existem duas possibilidades: ou não há arestas entre $V(T)$ e $V(G) \setminus V(T)$, caso em que G é desconexo, ou há.
  - No último caso, para qualquer aresta $xy \in E(G)$, onde $x \in V(T)$ e $y \in V(G) \setminus V(T)$, o subgrafo de G obtido ao adicionar o vértice y e a aresta xy a T é também uma árvore contida em G.
- Podemos então começar com uma árvore trivial consistindo de um único vértice inicial e aumentá-la como descrito acima, terminando com uma árvore geradora do grafo ou com uma árvore não geradora que não pode mais ser aumentada.
- Procedimentos assim costumam ser chamados de *busca* e a árvore resultante é chamada de *árvore de busca*.

1: **Função** BUSCA(G, s)
2:     crie um grafo T com $V(T) = \{s\}$ e $E(T) = \emptyset$
3:     **Enquanto** há arestas de G entre $V(T)$ e $V(G) \setminus V(T)$ **faça**
4:         seja xy uma aresta com $x \in V(T)$ e $y \in V(G) \setminus V(T)$
5:         $V(T) = V(T) \cup \{y\}$
6:         $E(T) = E(T) \cup \{xy\}$

- Note que encontrar uma aresta xy na linha 4 envolve percorrer as vizinhanças dos vértices que já estão na árvore, uma a uma, para determinar qual vértice e aresta podem ser adicionados à árvore.
- Na prática, nem sempre se constrói uma árvore explicitamente, mas se faz uso de uma terminologia comum:
  - Seja T uma árvore enraizada em s (vértice no qual a busca foi iniciada).
  - Cada vértice no caminho de s a um vértice v é um *ancestral* de v.
  - O ancestral imediato de um vértice v diferente da raiz é seu *predecessor*, $pred(v)$.
  - Podemos ver que $E(T) = \{(pred(v), v) \colon v \in V(T) \setminus \{s\}\}$, motivo pelo qual não é necessário construir a árvore explicitamente.

```
Função Busca(G, s)
    marque s como visitado e todos os outros vértices como não visitados
    Enquanto possível faça
        escolha aresta uv com u visitado e v não
        se não houver essa aresta, pare
        marque v como visitado
        indique pred(v) = u
```

- Se o seu objetivo é apenas determinar se um grafo é conexo, qualquer algoritmo de busca serve (a ordem em que as vizinhanças são consideradas não importa).
- Mas algoritmos de busca nos quais critérios específicos são utilizados para determinar tal ordem podem prover informação adicional sobre a estrutura do grafo.
  - Um algoritmo de busca no qual as vizinhanças dos vértices em T são consideradas no estilo "primeiro a entrar, primeiro a sair", ou seja, por ordem decrescente do tempo em T, é chamado de *busca em largura* (ou BFS, de *breadth-first search*).
  - A BFS pode ser usada para encontrar as distâncias em um grafo, por exemplo.
  - Já um algoritmo no qual as vizinhanças dos vértices em T são consideradas no estilo "último a entrar, primeiro a sair", ou seja, tenta-se adicionar vértices vizinhos aos mais recentemente adicionados à T, é chamado de *busca em profundidade* (ou DFS, de *depth-first search*).
  - A DFS pode ser usada para encontrar os vértices e arestas de corte de um grafo, por exemplo.

O lema a seguir nos diz que Busca(G, s) marca todos os vértices que estão na mesma componente conexa de s[7]. Em outras palavras, a árvore construída (mesmo que implicitamente) é geradora da componente conexa que contém s.

Lema 33. *No fim da execução de* Busca*(G, s), um vértice v está marcado se e somente se existe um caminho de s a v em G.*

5.1 Busca em largura (BFS - *Breadth-First Search*)

- A ideia de considerar os vértices já marcados na ordem "primeiro a entrar, primeiro a sair" faz com que os vértices sejam explorados por camadas (s na 0, seus vizinhos na 1, etc. …).
- Esse algoritmo pode ser usado para: encontrar componentes conexas; calcular distância entre vértices; encontrar caminhos entre vértices; detectar ciclos; verificar se um grafo é bipartido (e dar uma bipartição em caso positivo); encontrar uma árvore geradora ou uma floresta geradora; etc.

[7] De certa forma, isso dá algum significado ao termo "busca" utilizado pela literatura.

- Leva tempo $O(n + m)$ usando a estrutura de dados fila.

```
sejam D e pred vetores indexados por vértices
D[v] ← ∞ para todo v ∈ V(G)
pred[v] ← NULL para todo v ∈ V(G)
inicialize todos os vértices como não visitados
BFS(G, s)
```

```
Função BFS(G, s)
    D[s] ← 0
    marque s como visitado
    crie uma fila vazia Q
    Enfileira(Q, s)
    Enquanto Q ≠ ∅ faça
        u ← Desenfileira(Q)
        Para cada v ∈ N(u) faça
            Se v não foi visitado então
                marque v como visitado
                Enfileira(Q, v)
                D[v] ← D[u] + 1
                pred[v] ← u
```

Lema 34. *No fim da execução de* BFS*(G, s), um vértice v está visitado se e somente se existe sv-caminho.*

Demonstração. Claramente BFS é um caso especial de Busca. □

- O lema acima mostra que BFS$(G,\ s)$ visita todos os vértices que estão na mesma componente conexa de s.

- Queremos agora mostrar que $D[v]$, calculado por BFS$(G,\ s)$, é igual a $\mathrm{dist}(s, v)$, $\forall v \in V(G)$. Precisaremos dos três seguintes resultados auxiliares.

Lema 35. *Seja G um grafo e $s \in V(G)$ qualquer. Para toda aresta $uv \in E(G)$,* $\mathrm{dist}(s, v) \leq \mathrm{dist}(s, u) + 1$.

Demonstração. Se existe su-caminho, então existe sv-caminho. Note que o menor sv-caminho não pode ser maior do que o menor su-caminho seguido da aresta uv. Portanto, a inequação vale nesse caso. Se não existe su-caminho, $\mathrm{dist}(s, u) = \infty$ e a inequação também vale. □

Lema 36. *No fim de* BFS*(G, s),* $D[v] \geq \text{dist}(s, v)\ \forall v \in V(G)$*.*

Demonstração. Por indução no número k de operações de atualização do vetor D. No caso base, $k = 1$, isto é, a primeira atualização do vetor D ocorre na linha 2. Neste caso, temos então $D[s] = 0$ e $D[v] = \infty$ para todo $v \neq s$. Como $\text{dist}(s, s) = 0$ e $\text{dist}(s, v) \leq \infty$, o resultado segue.

Considere agora a k-ésima operação de atualização do vetor D, com $k > 1$, e suponha que após a k'-ésima operação de atualização de D, onde $1 \leq k' < k$, vale que $D[v] \geq \text{dist}(s, v)\ \forall v \in V(G)$.

A k-ésima operação de atualização de D, para $k > 1$, ocorre na linha 12. Esta operação modifica apenas a entrada do vetor D referente ao vértice v, e assim, $D[w] \geq \text{dist}(s, w)$, para $w \neq v$, segue diretamente da hipótese de indução. Vamos agora mostrar que a propriedade também é válida para o vértice v. Na k-ésima operação de atualização de D, fazemos $D[v] = D[u] + 1$, onde u é um vizinho de v ($uv \in E(G)$). Por hipótese de indução, temos que $D[u] \geq \text{dist}(s, u)$, e pelo Lema 35, temos que $\text{dist}(s, v) \leq \text{dist}(s, u) + 1$. Assim, $D[v] = D[u] + 1 \geq \text{dist}(s, u) + 1 \geq \text{dist}(s, v)$. □

Lema 37. *Em* BFS*(G, s), se u é removido antes de v da fila, então* $D[u] \leq D[v]$*.*

Demonstração. Vamos mostrar que a qualquer momento se a fila contém $(v_1, \ldots, v_k)$, então $D[v_1] \leq D[v_2] \leq \cdots \leq D[v_k] \leq D[v_1] + 1$. Faremos isso por indução no número de iterações do laço **enquanto**.

Na primeira iteração, s é removido e seus vizinhos são adicionados em Q. Por construção, $D[v] = D[s] + 1 = 1$, $\forall v \in N(s)$. Assim, se ao fim da primeira iteração a fila é $Q = (v_1, \ldots, v_k)$, então vale que $D[v_i] = D[v_{i+1}]$ para $1 \leq i < k$.

Agora considere a j-ésima iteração e suponha que ao fim da j'-ésima iteração, com $1 \leq j' < j$, a fila é $Q = (x_1, \ldots, x_{k'})$, onde vale $D[x_1] \leq \cdots \leq D[x_{k'}] \leq D[x_1] + 1$.

Seja $Q = (v_1, \ldots, v_k)$ no começo da j-ésima iteração. Durante a iteração, o vértice v_1 é removido e seus vizinhos $w_1, \ldots, w_t$ são adicionados, deixando $Q = (v_2, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_t)$ ao fim da iteração. Como $D[w_1] = \cdots = D[w_t] = D[v_1] + 1$ e, por hipótese, $D[v_1] \leq D[v_2]$, então $D[w_t] \leq D[v_2] + 1$. Como $D[v_k] \leq D[v_1] + 1$, por hipótese, e $D[w_1] = D[v_1] + 1$, então $D[v_k] \leq D[w_1]$. □

Teorema 38. *Ao fim da execução de* BFS*(G, s), temos* $D[v] = dist(s, v)\ \forall v \in V(G)$*.*

Demonstração. Por contradição, suponha que $D[v] \neq \text{dist}(s, v)$ para algum v. Dentre todos os vértices v onde $D[v] \neq \text{dist}(s, v)$, escolha o vértice v com menor valor de $\text{dist}(s, v)$. Pelo Lema 36,

$$D[v] > \text{dist}(s, v)\ .$$

Seja u imediatamente antes de v num sv-caminho mínimo ($uv \in E(G)$). Então $\text{dist}(s,v) = \text{dist}(s,u) + 1$. Pela escolha de v, temos $D[u] = \text{dist}(s,u)$. Então

$$D[v] > \text{dist}(s,v) = \text{dist}(s,u) + 1 = D[u] + 1 \ . \tag{1}$$

No momento em que BFS remove u da fila, podemos ter v visitado ou não. Se v não está visitado, vai entrar na fila neste momento pois é vizinho de u, de forma que deveríamos ter $D[v] = D[u] + 1$, contradizendo (1). Então v está visitado. Isso se deu porque existe algum vértice $w \neq u$ vizinho de v que o marcou como visitado antes de u. Na iteração em que w marca v, temos que w acabou de ser desenfileirado de Q e, pelo Lema 37, temos $D[w] \leq D[u]$. Note que nesta mesma iteração atribuímos $D[v] = D[w] + 1$. Assim, $D[v] = D[w] + 1 \leq D[u] + 1$, contradizendo (1). □

- Para encontrar ciclos usando a BFS, adicione o seguinte teste:

  Se v é visitado **e** $u \neq \mathit{pred}[v]$ **então**
      encontrou um ciclo

- Para encontrar componentes conexas:

  Função ComponentesConexas(G)
      $\mathit{contador} \leftarrow 0$
      seja *comp* um vetor global
      marque todos os vértices como não visitados
      Para cada $s \in V(G)$ **faça**
          Se s é não visitado **então**
              $\mathit{comp}[s] \leftarrow s$
              $\mathit{contador} \leftarrow \mathit{contador} + 1$
              BFS(G, s) ▷ Adicione linha $\mathit{comp}[v] \leftarrow s$ em BFS, após linha 10
      Devolve *contador*

- Para testar se um grafo é bipartido:

  Função Bipartido(G)
      seja *parte* um vetor binário onde cada entrada armazena 0 ou 1
      seja s um vértice qualquer
      $\mathit{parte}[s] \leftarrow 0$
      crie uma fila vazia Q
      Enfileira(Q, s)
      marque s como visitado e todos os outros vértices como não visitados
      Enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**
          $u \leftarrow$ Desenfileira(Q)
          Para cada $v \in N(u)$ **faça**
              Se v é não visitado **então**
                  $\mathit{parte}[v] \leftarrow 1 - \mathit{parte}[u]$
                  marque v como visitado
                  Enfileira(Q, v)
              Senão Se v é visitado **e** $\mathit{parte}[u] == \mathit{parte}[v]$ **então**
                  Devolve *null*

Devolve *parte*

Prove que o algoritmo BIPARTIDO de fato decide se um grafo é bipartido.

6 Caminhos mínimos em grafos ponderados

- Considere G com custo nas arestas dado por $w\colon E \to \mathbb{R}$
- O custo $w(P)$ de um caminho $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ é a soma dos custos das arestas de P, isto é, $w(P) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i v_{i+1})$.
- Definimos $\mathrm{dist}_w(u, v)$ como sendo o custo de um uv-caminho de menor custo, ou ∞ se não houver uv-caminho.
  - Podemos dizer que até agora consideramos $w(e) = 1\ \forall e \in E$.
- Dizemos que um caminho de menor custo é um *caminho mínimo*.
- Existem basicamente duas variações de problemas de caminhos mínimos em grafos:
  - Caminho mínimo de única fonte
    Entrada: G, $w\colon E \to \mathbb{R}$ e vértice $s \in V$
    Objetivo: calcular $\mathrm{dist}_w(s, v)\ \forall v \in V(G)$
    * BFS se $w(e) = 1$, Dijkstra se $w(e) \geq 0$, ou Bellman-Ford.
  - Caminho mínimo entre todos os pares
    Entrada: G, $w\colon E \to \mathbb{R}$
    Objetivo: calcular $\mathrm{dist}(u, v)\ \forall u, v \in V$
    * Floyd-Warshall, Johnson.

6.1 Algoritmo de Dijkstra (1956)

- Esse é um algoritmo inspirado no algoritmo Busca discutido na Seção 5.
- Assim, recebe um vértice s inicial (a partir do qual se deseja calcular as distâncias).
- Mantemos um vetor D tal que $D[v]$ armazena a melhor estimativa de custo de um caminho de s a v.
- A ideia é aumentar o conjunto de vértices já visitados escolhendo-se um vértice v não visitado tal que $uv \in E(G)$ e u é visitado.
- Tal novo vértice é escolhido de forma "gulosa": é o vértice v não visitado cujo valor $D[u] + w(uv)$ é mínimo, onde u é um vizinho já visitado de v.
- Também mantemos um conjunto de vértices já visitados e um vetor *pred* tal que *pred*$[v]$ armazena o predecessor de v em um sv-caminho mínimo.
- Inicialmente, apenas $D[s] = 0$ e o algoritmo iterativamente atualiza $D[v]$ quando u é visitado e $uv \in E[G]$, sempre mantendo $D[v] = \min_{u \text{ visitado } :\, uv \in E(G)} \{D[u] + w(uv)\}$.
- Mantendo os valores em D corretamente, a cada passo o algoritmo escolhe visitar o vértice u com menor valor $D[u]$ (com menor estimativa de custo caminho).
- Tempo: $O(m \lg n)$ usando a estrutura heap e $O(mn)$ sem.

```
Função Dijkstra(G, w, s)
    Para todo v ∈ V(G) faça
        D[v] ← ∞
        pred[v] ← null
        marque v como não visitado
    D[s] ← 0
    Enquanto houver vértice não visitado faça
        seja u não visitado com menor valor D[u]
        marque u como visitado
        Para todo vértice v ∈ N(u) faça
            Se v é não visitado e D[u] + w(uv) < D[v] então
                D[v] = D[u] + w(uv)
                pred[v] = u
```

Por que Dijkstra não funciona quando os pesos das arestas são negativos?

Teorema 39. *No fim da execução de* Dijkstra*(G, w, s) com $w(e) \geq 0$ para toda $e \in E(G)$, temos $D[v] = \mathrm{dist}_w(s, v)$ para todo $v \in V(G)$.*

Demonstração. Por indução no número de iterações do laço **enquanto**, vamos mostrar que para todo v visitado, $D[v] = \mathrm{dist}_w(s, v)$.

Ao fim da primeira iteração, apenas s está visitado e, de fato, $\mathrm{dist}_w(s, 0) = 0 = D[s]$.

Agora considere a j-ésima iteração e suponha que ao fim da j'-ésima iteração, com $1 \leq j' < j$, vale que $D[v] = \mathrm{dist}_w(s, v)$ para todo v visitado até aquele momento.

Seja u o vértice escolhido no começo da j-ésima iteração. Como $u \neq s$, $\mathit{pred}[u] \neq \mathit{null}$. Seja então $z = \mathit{pred}[u]$. Nessa iteração vamos marcar u como visitado, de forma que o valor em $D[u]$, que é igual a $D[z]+w(zu)$, não será mais alterado. Basta mostrar então que $D[u] = \mathrm{dist}_w(s, u)$.

Seja P um caminho qualquer de s a u. Note que como s está visitado e u não está, então deve existir aresta xy em P tal que x está visitado e y não está. Seja xy a primeira aresta dessa forma a partir de s. Note que P tem 3 subcaminhos: (i) de s a x, com custo pelo menos $\mathrm{dist}_w(s, x)$; (ii) aresta xy, de custo $w(xy) \geq 0$; (iii) de y a u, com custo ≥ 0[8]. Note ainda que $\mathrm{dist}_w(s, s) = D[x]$, por hipótese de indução. Então, o custo de P é $w(P) \geq \mathrm{dist}_w(s, x) + w(xy) = D[x] + w(xy) \leq D[y]$. Pelo critério de escolha do algoritmo,

$$D[u] = D[z] + w(zu) \leq D[y] \leq D[x] + w(xy) \leq w(P) \ .$$

Então o caminho escolhido para u deve ser mínimo, pois não tem custo maior do que nenhum outro caminho de s a u. □

[8]Por que não dizer que o subcaminho de y a u tem custo pelo menos $\mathrm{dist}_w(y, u)$?

7 Emparelhamentos

- Motivação: casamento estável, residentes e hospitais, doação de rins, ...
- Um *emparelhamento* em um grafo G é um subconjunto $M \subseteq E(G)$ tal que quaisquer duas arestas de M não têm extremos em comum.
  - As arestas de M são duas a duas não-adjacentes.
- Se $uv \in M$, dizemos que u e v são *emparelhados* por M e escrevemos $M(u) = v$ e $M(v) = u$.
- Dado um grafo G e $X \subseteq V(G)$, dizemos que um emparelhamento M *cobre* X se cada vértice de X é extremo de alguma aresta em M.
- Um emparelhamento é *perfeito* se cobre $V(G)$.
  - Nem todo grafo possui emparelhamento perfeito.
- Um emparelhamento M de um grafo G é *maximal* se não está contido em outro emparelhamento M' de G, isto é, se $M \not\subseteq M'$ para qualquer outro emparelhamento M' de G.
- Um emparelhamento M de G é *máximo* se não há outro emparelhamento M' de G maior, isto é, se $|M'| \leq |M|$ para qualquer outro emparelhamento M' de G.
- Se $v \in V(G)$ não é coberto pelo emparelhamento M, então v é dito *livre* (em M).
- Note que um conjunto formado por uma única aresta de um grafo é um emparelhamento desse grafo.
- Assim, são problemas de interesse:
  - Encontrar um emparelhamento máximo em um grafo.
    * Egerváry (Húngaro) se G é bipartido, Edmonds para G qualquer.
  - Verificar se um dado emparelhamento é máximo.

7.1 Caminhos e ciclos alternantes

- Seja um emparelhamento M em um grafo G.
- Um *caminho M-alternante* em G é um caminho cujas arestas alternam entre arestas de M e de $E(G) \setminus M$.
- Um *ciclo M-alternante* em G é um ciclo cujas arestas alternam entre arestas de M e de $E(G) \setminus M$.

Quais os comprimentos possíveis de caminhos e ciclos M-alternantes?

Seja $\triangle$ a operação de diferença simétrica entre conjuntos: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Sejam M e M' dois emparelhamentos de um grafo G qualquer. Descreva como são os componentes de $G[M \triangle M']$.

O teorema a seguir apresenta uma caracterização de emparelhamento máximo em qualquer grafo.

Teorema 40 (Berge, 1957)**.** *Seja G um grafo e M um emparelhamento em G. O emparelhamento M é máximo se e somente se G não possui um caminho M-alternante com os extremos livres.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que se M é máximo, então G não possui um caminho M-alternante com os extremos livres. Seja M um emparelhamento máximo em G. Suponha, para fins de contradição, que exista um caminho M-alternante P com os extremos livres. Seja $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$.

Note que nenhuma aresta de $M \setminus E(P)$ é incidente a vértices de P, pois os extremos de P são livres. Logo, M' é um emparelhamento. Como ambos extremos de P são livres, $|E(P) \setminus M| = |E(P) \cap M| + 1$. Então

$$\begin{aligned} |M'| &= |M \setminus E(P)| + |E(P) \setminus M| \\ &= |M \setminus E(P)| + |E(P) \cap M| + 1 \\ &= |M| + 1 \ , \end{aligned}$$

uma contradição.

Agora vamos provar que se G não possui um caminho M-alternante com os extremos livres, então M é máximo. Seja G um grafo e M um emparelhamento tal que não existem caminhos M-alternantes em G com os extremos livres. Suponha, para fins de contradição, que M não é máximo. Seja então M' máximo ($|M'| > |M|$). Seja $H = G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$.

Note que as componentes de H são caminhos ou ciclos cujas arestas alternam entre M e M'. Então $\Delta(H) \leq 2$. Além disso, cada ciclo de H tem um número par de arestas. Assim, como $|M'| > |M|$, ao menos uma componente de H é um caminho P que tem mais arestas de M' do que de M.

As arestas nos extremos de P, portanto, são de M'. Então P é um caminho M-alternante com os extremos livres em M, uma contradição. □

7.2 Cobertura por vértices

- Uma *cobertura por vértices* de G é um conjunto $C \subseteq V(G)$ tal que para toda $uv \in E(G)$, $u \in C$ ou $v \in C$.
- Note que $V(G)$ é uma cobertura de G.
- Uma cobertura C de G é *minimal* se não existe outra cobertura C' de G contida nela, isto é, se $C' \nsubseteq C$ para qualquer outra cobertura C' de G.
- Uma cobertura C é *mínima* se não existe outra cobertura C' de G menor, isto é, se $|C'| \geq |C|$ para qualquer outra cobertura C' de G.
- Encontrar uma cobertura mínima para qualquer grafo G é um problema é NP-difícil.

O resultado a seguir relaciona emparelhamentos e coberturas.

Lema 41. *Seja G um grafo. Seja M um emparelhamento em G e C uma cobertura de G. Então $|M| \leq |C|$.*

Em particular, se M^* é um emparelhamento máximo e C^* é uma cobertura mínima, então $|M^*| \leq |C^*|$.

O resultado a seguir mostra que a relação acima é de igualdade em grafos bipartidos.

Teorema 42 (Kőnig, 1931)**.** *Seja G um grafo bipartido. O tamanho de um emparelhamento máximo em G é igual ao tamanho de uma cobertura mínima de G.*

Demonstração. Seja M um emparelhamento máximo em G. Se construirmos uma cobertura C tal que $|M| = |C|$, então o resultado segue do Lema 41.

Seja (X, Y) uma bipartição de G. Se M cobre X, então tome $C = X$ e o resultado segue. Então existe $U \subseteq X$ tal que U não é coberto por M.

Considere todos os caminhos M-alternantes que começam em um vértice de U. Seja S o conjunto dos extremos desses caminhos que estão em X e T o conjunto dos extremos que estão em Y. Claramente, $U \subseteq S$.

Note que T contém exatamente todos os vizinhos de algum vértice de S, isto é, não existe aresta entre $x \in S$ e $y \notin T$. Então T cobre S.

Agora note que $X \setminus S$ contém exatamente todos os vizinhos de algum vértice de $Y \setminus T$, isto é, não existe aresta entre $x \in X \setminus S$ e $y \in T$. Então $X \setminus S$ cobre $Y \setminus T$.

Assim, $C = T \cup X \setminus S$ é cobertura de G. Todo vértice de T é incidente a uma aresta de M pois, caso contrário, aumentaríamos M. Todo vértice de $X \setminus S$ e incidente a uma aresta de M, por definição, pois $U \in S$. Nenhuma aresta de M tem extremos em ambos T e $X \setminus S$, por construção. Logo, $|C| = |M|$. □

- Seja $N(S)$ o conjunto dos vértices vizinhos de $S \subseteq V(G)$, isto é, $N(S) = \{v \in V(G)\colon$ existe $u \in S$ com $uv \in E(G)\}$.
- Seja G um grafo bipartido e (X, Y) uma bipartição de G.
- Quando G possui um emparelhamento que cobre X?
  - No mínimo, $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.
- Seja G um grafo e $X \subseteq V(G)$. Definimos $\partial_G(X) = \{uv \in E(G)\colon u \in X \text{ e } v \in V(G) \setminus X\}$.

O teorema a seguir nos dá uma caracterização de grafos bipartidos que possuem um emparelhamento que cobre uma parte. Seja G um grafo bipartido e (X, Y) uma bipartição sua. Seu resultado implica que basta mostrar um subconjunto de X tem poucos vizinhos para provar que G não possui um emparelhamento que cobre X.

Teorema 43 (Hall, 1935)**.** *Seja G um grafo bipartido e (X, Y) uma bipartição de G. G possui um emparelhamento que cobre X se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.*

Demonstração. Primeiro vamos provar que se G possui um emparelhamento que cobre X, então $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$. Seja M um emparelhamento de G que cobre X. Tome um $S \subseteq X$ qualquer. Para todo $u \in S$, o vértice $M(u)$ emparelhado a u está em $N(S)$. Assim, $|N(S)| \geq |S|$.

Agora vamos provar que se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$, então G possui um emparelhamento que cobre X. Suponha, para fins de contradição, que G não possui um emparelhamento que cobre X. Seja M um emparelhamento máximo em G. Como M não cobre X, seja $a \in X$ um vértice livre em M. Seja $Z = \{v \in V(G)\colon$ existe caminho M-alternante de u a v em $G\}$. Sejam $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Note que $a \in S$.

Considere um percurso em um caminho M-alternante que começa em u. Note que chegamos em T por arestas de $E(G) \setminus M$ e saímos de T por arestas de M. Exceto por a, chegamos em $S - a$ por arestas de M. Então, os vértices de T estão emparelhados aos vértices de $S - a$ por M. Ou seja, todo vértice de T é coberto por M e, portanto, $|T| = |S| - 1$ e $T = N(S)$. Assim, $|T| = |N(S)| = |S| - 1 < |S|$, contrariando a hipótese. □

Corolário 44. *Todo grafo k-regular bipartido, com $k \geq 1$, contém um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Seja G um grafo k-regular bipartido com $k \geq 1$, e seja (X, Y) uma bipartição de G. Como $E(G) = \partial(X) = \partial(Y)$, vale que $|\partial(X)| = |\partial(Y)|$, e como G é k-regular, vale que $|\partial(X)| = k|X|$ e $|\partial(Y)| = k|Y|$. Portanto, temos que $|X| = |Y|$. Assim, para demonstrar que G possui um emparelhamento perfeito, basta mostrar que existe um emparelhamento que cobre X. Para isto, vamos utilizar o Teorema de Hall. Seja $S \subseteq X$ qualquer e seja $T = N(S)$. Como $\partial(S) \subseteq \partial(T)$, temos que $|\partial(S)| \leq |\partial(T)|$, e como G é k-regular, vale que $|\partial(S)| = k|S|$ e $|\partial(T)| = k|T|$. Assim,

$$k|S| = |\partial(S)| \leq |\partial(T)| = k|T|.$$

Consequentemente, vale que $|S| \leq |T| = |N(S)|$. Como o conjunto S foi escolhido de forma arbitrária, temos que para qualquer $S \subseteq X$, vale que $|S| \leq |N(S)|$. Assim, pelo Teorema 43, G possui emparelhamento que cobre X e, consequentemente, G possui um emparelhamento perfeito. □

[8]Note que nem sempre vale que $|N(S)| = k|S|$.

8 Grafos hamiltonianos

- Sir William Rowan Hamilton descreveu em 1856 um jogo sobre um dodecaedro:
  - uma pessoa coloca pinos em cinco vértices consecutivos e a outra precisa completar o caminho e formar um ciclo gerador.
- Um ciclo gerador em um grafo é chamado *ciclo hamiltoniano.*
- Um caminho gerador em um grafo é chamado *caminho hamiltoniano.*
- Decidir se um grafo qualquer possui ciclo ou caminho hamiltoniano é um problema NP-completo.
- Um problema clássico em otimização combinatória é o problema *do caixeiro viajante (TSP)*:

  Entrada: G e $w\colon E(G) \to \mathbb{R}$.

  Objetivo: encontrar ciclo hamiltoniano C $\sum_{e \in E(C)} w(e)$ é mínimo.
- Encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo em um grafo qualquer é um problema NP-difícil.
- Problemas de interesse:
  - Dado um grafo G, ele possui ciclo hamiltoniano? E caminho hamiltoniano?
  - Dado um grafo G que possui ciclo (ou caminho) hamiltoniano, encontre seu ciclo (ou caminho) hamiltoniano.
  - Encontrar uma caracterização para grafos que possuem ciclos/caminhos hamiltonianos.

Lema 45. *Seja G um grafo. Se G possui vértice de corte, então G não possui ciclo hamiltoniano.*

Lema 46. *Seja G um grafo bipartido e (X, Y) uma bipartição de G. Se $|X| < |Y|$, então G não possui ciclo hamiltoniano.*

Lema 47. *Seja G um grafo que possui ciclo hamiltoniano. Então o número de componentes de $G - S$ é no máximo $|S|$, para todo $S \subseteq V(G)$.*

Demonstração. Seja $C = (u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1)$ um ciclo hamiltoniano de G e seja $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_\ell\}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $s_1 = u_1$. Podemos denotar o ciclo hamiltoniano C por $(s_1, P_1, s_2, P_2, s_3, \ldots, P_{\ell-1}, s_\ell, P_\ell, s_1)$, onde P_i, com $i = 1, \ldots, \ell$, é o caminho ligando os vértices u_{j+1} e u_{k-1}, $s_i = u_j$, e $s_{i+1} = u_k$. Note que $P_i \subseteq G - S$, para todo i e, assim, todos os vértices do caminho P_i pertencem a mesma componente em $G - S$. Como todo vértice em $G - S$ pertence a um dos ℓ caminhos P_i, i.e., $V(G - S) = \cup_{i=1}^{\ell} V(P_i)$, temos que $G - S$ possui no máximo ℓ componentes. $\square$

Lema 48. *Seja G um grafo que possui caminho hamiltoniano. Então o número de componentes de $G - S$ é no máximo $|S| + 1$, para todo $S \subseteq V(G)$.*

O teorema a seguir é um resultado clássico que garante ciclo hamiltoniano para grafos nos quais todos os vértices têm grau alto.

Teorema 49 (Dirac, 1952)**.** *Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices. Se $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G possui ciclo hamiltoniano.*

Demonstração. Suponha por contradição que nem todo grafo com grau mínimo pelo menos $n/2$ possui ciclo hamiltoniano. Seja G um tal grafo com n vértices e com o maior número de arestas (G é contraexemplo maximal). Claramente, G não é completo. Assim, existem vértices u e v não adjacentes em G.

Então pela escolha de G, $G+uv$ possui ciclo hamiltoniano. Logo, G possui caminho hamiltoniano. Seja $C = (v_1, \ldots, v_n)$ um caminho hamiltoniano de G com $v_1 = u$ e $v_n = v$. Sejam $S = \{v_i \colon v_{i+1}u \in E(G)\}$ e $T = \{v_i \colon v_iv \in E(G)\}$.

Note que $S \cap T = \emptyset$, pois se $v_i \in S \cap T$, então $(v_1, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1)$ seria um ciclo hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G. Note também que $v_n \notin S \cup T$, de onde vemos que $|S \cup T| < n$. Então

$$n > |S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T| = |S| + |T| = d(u) + d(v) \ ,$$

mas

$$d(u) + d(v) \geq \delta(G) + \delta(G) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \ ,$$

uma contradição. □

A condição $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ do teorema de Dirac pode ser melhorada?

A prova do teorema de Dirac pode ser adaptada para provar os seguintes resultados.

Teorema 50 (Bondy-Chvátal, 1976)**.** *Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices tal que existem vértices u e v não adjacentes para os quais $d(u) + d(v) \geq n$. O grafo G possui ciclo hamiltoniano se e somente se $G + uv$ possui ciclo hamiltoniano.*

Teorema 51 (Ore, 1960)**.** *Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices. Se para todo par u, v de vértices não adjacentes vale que $d(u)+d(v) \geq n$, então G possui ciclo hamiltoniano.*

9 Coloração de vértices

- Suponha que temos n produtos químicos que precisam ser alocados em caminhões para transporte.
- Alguns itens não podem ficar no mesmo caminhão.
- Queremos minimizar o número de caminhões (note que n caminhões resolveriam o problema).

Seja G um grafo:

- Uma *k-coloração* (dos vértices) de G é uma função sobrejetora $c\colon V(G) \to \{1, \ldots, k\}$.
- Uma *coloração* de G é uma k-coloração de G para algum k.
- Uma coloração c de G é *própria* se $c(u) \neq c(v)$ para todo $uv \in E(G)$.
- Um *conjunto independente* de um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ de vértices mutuamente não adjacentes, i.e., para todo $u, v \in S$ vale que $uv \notin E(G)$.
- Uma *coloração própria* pode ser equivalentemente definida como um conjunto $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ de conjuntos independentes de G tal que (i) $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$; e (ii) $V(G) = \cup_{i=1}^{k} C_i$.
  - Cada conjunto independente C_i é chamado de *classe de cor*.
- Um grafo G é *k-colorível* se admite uma k-coloração própria.
- O *número cromático* de G, denotado $\chi(G)$, é o menor valor k tal que G é k-colorível.
- Se $\mathcal{C}$ é uma k-coloração própria de G e $\chi(G) = k$, então dizemos que $\mathcal{C}$ é uma *coloração mínima* de G.
  - Decidir se um grafo qualquer é 3-colorível é um problema NP-completo.
  - Encontrar $\chi(G)$ para qualquer G é um problema NP-difícil.
- $\chi(G) = 2$ se e somente se G é um grafo bipartido não vazio.
- $\chi(C_n) = 2$ se n é par.
- $\chi(C_n) = 3$ se n é ímpar.
- $\chi(K_n) = n$.

Como podemos mostrar que $\chi(G) \leq x$? E $\chi(G) \geq x$? E $\chi(G) = x$?

- Uma *clique* em um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ de vértices mutuamente adjacentes, i.e., para todo $u, v \in S$ vale que $uv \in E(G)$.
  - A maior cardinalidade de uma clique de G é denotada por $\omega(G)$.
- $\chi(G) \geq \omega(G)$.
- $\chi(G) \leq |V(G)|$.

Mostre que, para todo grafo G, $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, onde $\alpha(G)$ é o tamanho do maior conjunto independente de G.

Lema 52. *Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}$.*

Demonstração. Seja $\{X_1, \ldots, X_k\}$ uma coloração mínima de G. Para todo X_i e X_j, com $1 \leq i < j \leq k$, existe pelo menos uma aresta com um extremo em X_i e outro em X_j, pois caso contrário poderíamos dar a mesma cor a $X_i \cup X_j$, obtendo uma coloração com menos cores. Então $|E(G)| \geq \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$, de onde temos $k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}$. □

Apesar de não conseguirmos mostrar que $\chi(G)$ é maior ou igual a $\Delta(G)$, o grau máximo do grafo tem sim relação com o número cromático, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 53. *Para todo grafo G, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Nossa demonstração segue por indução em $n = |V(G)|$. Se G contém apenas um vértice, i.e., $n = 1$, então $\Delta(G) = 0$ e $\chi(G) = 1$, e o resulto segue. Então, seja G um grafo com $n > 1$ vértices e suponha que para qualquer grafo H com n' vértices, sendo $1 \leq n' < n$, vale que $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1$. Seja $u \in V(G)$ um vértice qualquer. Seja $G' = G - u$ e note que $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. Como $|V(G')| < n = |V(G)|$, pela hipótese de indução, vale que $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1$. Assim,

$$\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

Seja $\mathcal{C}'$ uma coloração mínima de G'. Vamos mostrar como obter um coloração própria para o grafo G a partir de $\mathcal{C}'$. Para isso, vamos dividir a prova em dois casos: (i) $\chi(G') < \Delta(G) + 1$; e (ii) $\chi(G') = \Delta(G) + 1$.

Primeiro, suponha que $\chi(G') < \Delta(G) + 1$. Nesse caso $\chi(G') \leq \Delta(G)$ e o conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \{\{u\}\}$ é uma coloração própria de G que usa $\chi(G') + 1$ cores. Portanto,

$$\chi(G) \leq |\mathcal{C}| = \chi(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1,$$

e o resultado segue.

Agora, suponha que $\chi(G') = \Delta(G) + 1$. Como $d_G(u) \leq \Delta(G)$, segue que $d_G(u) \leq \chi(G') - 1$, isto é, u possui no máximo $\chi(G') - 1$ vizinhos. Como $|\mathcal{C}'| = \chi(G')$, existe uma classe de cor $C \in \mathcal{C}'$ tal que $N_G(u) \cap C = \emptyset$. Nesse caso, $\mathcal{C} = \big(\mathcal{C}' \setminus \{C\}\big) \cup \big\{C \cup \{u\}\big\}$ é uma coloração própria de G que usa $\chi(G')$ cores. Então $\chi(G) \leq |\mathcal{C}| = \chi(G') = \Delta(G) + 1$ e o resultado segue. □

A prova do teorema acima nos fornece o seguinte algoritmo.

Função COLOREREC(G)
  Se $|V(G)| = 1$ **então Devolve** $\{V(G)\}$
  Seja u um vértice qualquer de G
  Seja $G' \leftarrow G - u$
  $\mathcal{C}' \leftarrow$ COLOREREC(G')
  Se $|\mathcal{C}'| \leq \Delta(G)$ **então**
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}' \cup \{\{u\}\}$
  Senão
    Seja $C \in \mathcal{C}'$ tal que $N_G(u) \cap C = \emptyset$
    $\mathcal{C} \leftarrow \big(\mathcal{C}' \setminus \{C\}\big) \cup \big\{C \cup \{u\}\big\}$
  Devolve $\mathcal{C}$

Talvez um algoritmo "mais natural" seja o seguinte.

Função COLOREREC2(G)
  Se $|V(G)| = 1$ **então Devolve** $\{V(G)\}$
  Seja u um vértice qualquer de G
  Seja $G' \leftarrow G - u$
  $\mathcal{C}' \leftarrow$ COLOREREC2(G')
  Se $N_G(u) \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{C}'$ **então**
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}' \cup \{\{u\}\}$
  Senão
    Seja $C \in \mathcal{C}'$ tal que $N_G(u) \cap C = \emptyset$
    $\mathcal{C} \leftarrow \big(\mathcal{C}' \setminus \{C\}\big) \cup \big\{C \cup \{u\}\big\}$
  Devolve $\mathcal{C}$

Mas veja que, essencialmente, esses dois algoritmos estão fazendo a mesma coisa.

O algoritmo a seguir é a versão iterativa do anterior.

Função COLORE(G)
  Seja C um vetor de tamanho n
  Para $u \in V(G)$ **faça**
    Seja c o menor valor de cor não atribuída aos vizinhos já coloridos de u
    $C[u] \leftarrow c$
  Devolve C

E ele, estando correto, pode ser usado para provar o mesmo resultado.

Demonstração 2 para o Teorema 53. No algoritmo COLORE, no momento de atribuir uma cor a um vértice v_i, a cor usada será no máximo $d(v_i)+1$. Então o maior valor de cor usada será no máximo $\Delta(G)+1$. $\square$

Os algoritmos acima não são ótimos.

- Note que o número de cores usadas pelas heurísticas acima depende muito da ordem escolhida para os vértices.
- Na verdade, é possível mostrar que sempre existe alguma ordem que faz os algoritmos retornarem uma coloração ótima.
  - O resultado mostrar que ela *existe*, e não como construí-la.

É possível melhorar o limitante $\Delta(G) + 1$?

Teorema 54 (Brooks, 1941)**.** *Seja G um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo. Então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

10 Coloração de arestas

Seja G um grafo:

- Uma *k-aresta-coloração* de G é uma função sobrejetora $c\colon E(G) \to \{1, \ldots, k\}$.
- Uma *coloração de arestas* de G (ou uma *aresta-coloração*) é uma k-aresta-coloração para algum k.
- Uma coloração de arestas c de G é *própria* se $c(xy) \neq c(xz)$ para todo $xy, xz \in E(G)$ e $y \neq z$.
- Uma *coloração própria de arestas* pode ser equivalentemente definida como um conjunto $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_k\}$ de emparelhamentos de G tal que (i) $M_i \cap M_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ e (ii) $E(G) = \cup_{i=1}^{k} M_i$.
- Um grafo G é *k-aresta-colorível* se admite uma k-aresta-coloração própria.
- O *índice cromático* de G, denotado $\chi'(G)$, é o menor valor k tal que G é k-aresta-colorível.
- Se $\mathcal{M}$ é uma k-aresta-coloração própria de G e $\chi'(G) = k$, então dizemos que $\mathcal{M}$ é uma *coloração de arestas mínima* ou *coloração de arestas ótima* de G.

- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.
- $\chi'(G) \leq |E(G)|$.
- $\chi'(C_{2k}) = 2 = \Delta(G)$.
- $\chi'(C_{2k+1}) = 3 > \Delta(G)$.

Mostre que, para todo grafo G, $\chi'(G) \geq \lceil \frac{m}{\lfloor n/2 \rfloor} \rceil$, onde $m = |E(G)|$ e $n = |V(G)|$.

O lema a seguir nos diz que $\chi'(G) = \Delta(G)$ se G é bipartido k-regular.

Lema 55. *Se G é grafo bipartido k-regular, G pode ser decomposto em k emparelhamentos perfeitos.*

- A prova a seguir é *construtiva.*
- Seja $H \subseteq G$ um subgrafo gerador de G e seja c uma k-aresta-coloração de H.
- Ideia: assumimos que já temos uma k-aresta-coloração de $H \subseteq G$ e mostramos como estendê-la para uma k-aresta coloração de G.
- Dizemos que *a cor i está sendo usada por $v \in V(G)$* se i foi atribuída a alguma aresta de H incidente a v. Caso contrário, *a cor i está livre/disponível em v.*
- Uma cor *está livre/disponível em uma aresta $uv \in E(G) \setminus E(H)$*, se a cor está livre/disponível em ambos extremos da aresta.

  - Note que qualquer cor disponível em uma aresta $e \in E(G) \setminus E(H)$ pode ser atribuída a tal aresta para estender c para uma k-aresta-coloração de $H + e$.

- Sejam i e j duas cores e sejam $M_i = \{e \in E(H) \colon c(e) = i\}$ e $M_j = \{e \in E(H) \colon c(e) = j\}$. Seja $H_{ij} = H[M_i \cup M_j]$.

  - Note que cada componente de H_{ij} é um ciclo par ou um caminho, que chamaremos de *ij-alternante*.

Teorema 56 (Kőnig, 1916)**.** *Se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Demonstração. Por indução no número m de arestas.

Quando $m = 1$, claramente $\chi'(G) = 1$, o que é igual a $\Delta(G)$.

Considere então um grafo G com $m > 1$ arestas e suponha que para qualquer grafo G' com menos de m arestas vale que $\chi'(G') = \Delta(G')$.

Seja então $uv \in E(G)$ uma aresta de G e seja $H = G - uv$. Note que, por hipótese, $\chi'(H) = \Delta(H)$. Note ainda que $\Delta(H) \leq \Delta(G)$. Vamos tentar colorir G estendendo uma coloração a H.

Se $\Delta(H) < \Delta(G)$, então podemos colorir uv com uma cor totalmente nova, gerando uma coloração para G com $\Delta(G)$ cores. Podemos então assumir que $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Considere uma coloração ótima de H e seja $M_i = \{v \colon c(v) = i\}$, onde $1 \leq i \leq \Delta(H)$. Note que, independente do grau de u e v em G, vale que $d_H(u) < \Delta(G)$ e $d_H(v) < \Delta(G)$. Assim, pelo menos uma cor i está disponível em u e pelo menos uma cor j está disponível em v. Se $i = j$, então atribua tal cor à uv, gerando uma coloração para G com no máximo $\Delta(G)$ cores.

Podemos assumir então que $i \neq j$. Considere o subgrafo $H_{ij} = H[M_i \cup M_j]$. Como a cor j está sendo usada por u e a cor i está sendo usada por v, certamente u e v têm grau um em H_{ij}. Assim, a componente de H_{ij} que contém u é um caminho ij-alternante P.

Se P terminasse em u, significaria que há em H (e em G) um caminho de v a u de comprimento par, de forma que $P + uv$ seria um ciclo ímpar em G, uma contradição com G ser bipartido. Então P não termina em u. Ao trocar as cores das arestas em P, obtemos uma coloração própria de H na qual a cor i está disponível em ambos u e v. Assim, podemos atribuir a cor i à uv, obtendo uma coloração para G com no máximo $\Delta(G)$ cores.

Como $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ para qualquer G, o resultado vale. □

- O resultado a seguir mostra que $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

- Com isso, temos que, para *qualquer* grafo G, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

- Decidir se $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ para qualquer G é um problema NP-completo.

- A prova do teorema a seguir é *construtiva*.
- Ela mostra como, sob condições favoráveis, uma k-aresta-coloração de G pode ser obtida colorindo as arestas de G uma a uma e ajustando a coloração ao longo do processo se necessário.
- Ideia: assumimos que já temos uma k-aresta-coloração de $H \subseteq G$ e mostramos como estendê-la para uma k-aresta coloração de G.
- A ferramenta principal da prova é: escolher i e j apropriadamente e trocar as cores de um certo caminho ij-alternante para obter uma nova k-aresta-coloração para a qual exista uma cor disponível para alguma aresta ainda não colorida.

Teorema 57 (Vizing, 1964)**.** *Seja G um grafo. Então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Vamos provar por indução em $m = |E(G)|$ que G é $(\Delta(G)+1)$-aresta-colorível.

Se $m = 1$, então claramente podemos aresta-colorir o grafo com $\Delta(G) + 1$ cores.

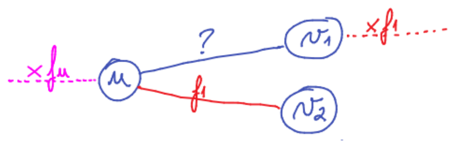
Suponha que qualquer grafo H com m' arestas, $1 \leq m' < m$, é $(\Delta(H)+1)$-aresta-colorível.

Seja G um grafo com $m > 1$ arestas. Seja $e \in E(G)$ qualquer. Por hipótese de indução, $G - e$ é $(\Delta(G - e) + 1)$-aresta-colorível. Como $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$, então $G - e$ é $(\Delta(G) + 1)$-aresta-colorível. Vamos mostrar que é possível atribuir uma das cores de $\{1, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ à e, recolorindo algumas arestas se necessário.

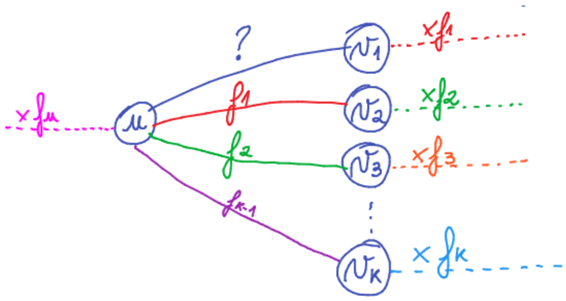
Como qualquer vértice de $G - e$ tem grau no máximo $\Delta(G)$, todo vértice tem pelo menos uma cor disponível. Em particular, os extremos da aresta e possuem cor disponível. Se a cor disponível em ambos for a mesma, então basta atribuí-la à e para colorir G propriamente.

Então seja $e = uv_1$ com f_u sendo a cor disponível em u e f_1 sendo a cor disponível em v_1, onde assumimos $f_1 \neq f_u$.

Como f_1 não está disponível para u, ela está sendo usada por outro vizinho de u, digamos v_2.

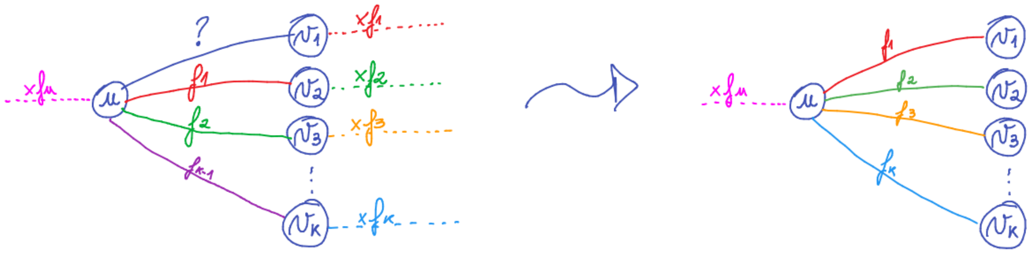


Como todo vértice de $G - e$ tem uma cor disponível, existe uma cor disponível para v_2. Vamos chamá-la de f_2. Vamos repetir esse processo de modo a encontrar uma sequência de vértices $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ e de cores $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ tal que f_i não é usada por v_i, para todo $1 \leq i \leq k$, e a aresta uv_{i+1} tem cor f_i.

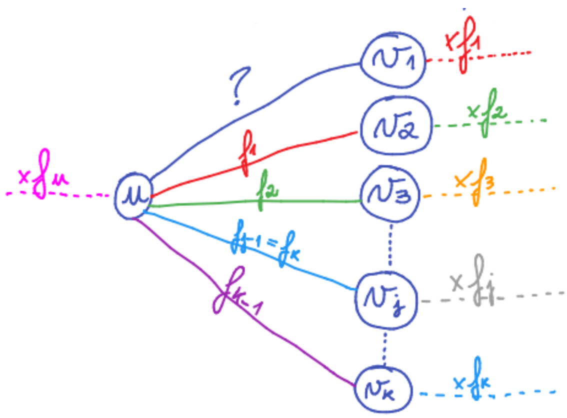


Note que como as cores $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ são usadas por u, temos que $f_u \notin \{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$.

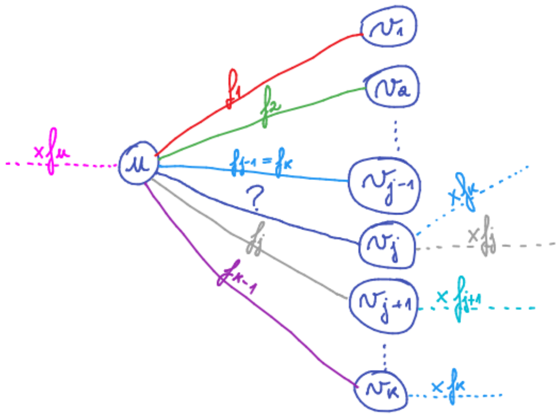
Vamos mostrar que o processo acima para. De fato, existem dois motivos para ele parar. Primeiro, pode ser porque a cor f_k não é usada por nenhum vizinho de u. Nesse caso, podemos recolorir as arestas uv_i, com $2 \leq i \leq k$, atribuindo à uv_i a cor f_i e então atribuindo à uv_1 a cor f_1. Note que isso resulta em uma $(\Delta(G) + 1)$-aresta-coloração de G.



O segundo motivo de parada do processo é porque a cor f_k já está sendo usada em u. Seja v_j o vizinho de u tal que $f_{j-1} = f_k$. Note que $v_j \neq v_k$, pois caso contrário estaríamos no caso anterior.



Vamos recolorir as arestas uv_i, para $2 \leq i < j$, atribuindo a cor f_i à uv_i, atribuindo a cor f_1 à uv_1 e deixando uv_j sem cor.



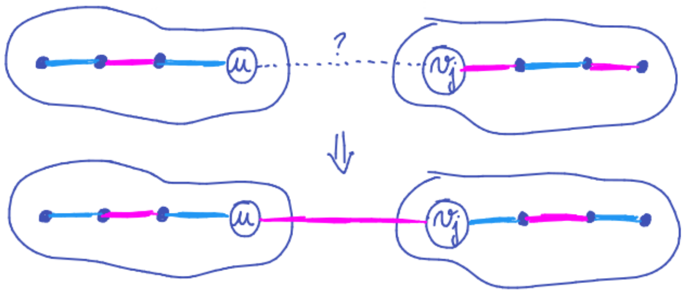
Note que agora a cor f_k está disponível para v_j. Agora o grafo $G - uv_j$ está todo aresta-colorido com no máximo $(\Delta(G) + 1)$ cores. Seja H o subgrafo de $G - uv_j$ induzido pelas cores f_u e f_k. Note que H contém apenas ciclos e caminhos. Note ainda que:

1. $d_H(u) = 1$ pois a aresta uv_{j-1} tem cor f_k e a cor f_u é livre em u;

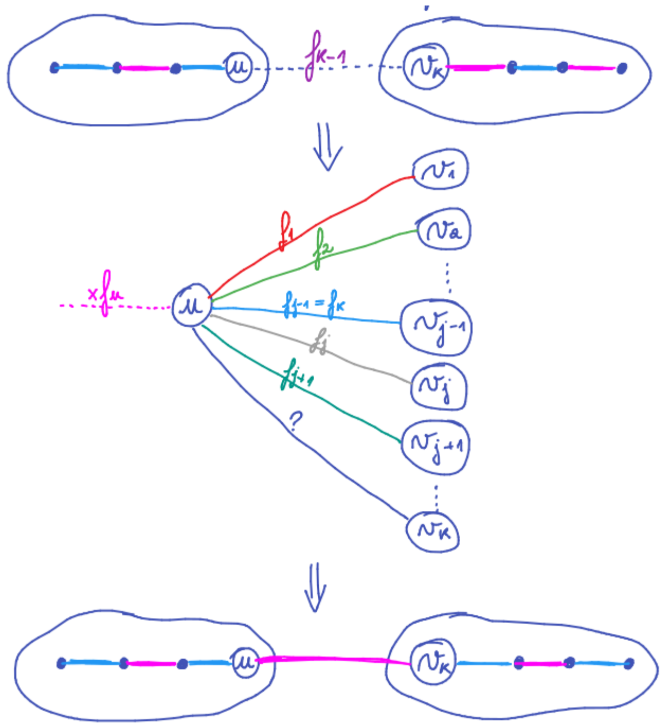
2. $d_H(v_j) \leq 1$ e $d_H(v_k) \leq 1$ pois a cor f_k é livre em v_j e em v_k.

Então u, v_j e v_k não podem estar no mesmo componente em H. Temos então dois casos:

- u e v_j estão em componentes distintas de H. Neste caso, trocamos as cores f_k e f_u na componente que contém v_j e então colorimos uv_j com f_u.



- u e v_k estão em componentes distintas de H. Neste caso, como uv_k está colorida, recolorimos as arestas uv_i com $j \leq i < k$, atribuindo a cor f_i à uv_i e deixando uv_k sem cor. Note que essa recoloração não envolve as cores f_u e f_k e, portanto, H continua o mesmo. Então trocamos as cores f_k e f_u na componente que contém v_k e atribuímos a cor f_u à uv_k.



$\square$

11 Conjuntos independentes e cliques

Conjuntos independentes:

- Um *conjunto independente* em um grafo G é um conjunto de vértices mutuamente não adjacentes.
- Formalmente, é um conjunto $X \subseteq V(G)$ tal que $E(G[X]) = \emptyset$.
- Note que um único vértice é um conjunto independente.
- Um conjunto independente X de um grafo G é *maximal* se nenhum outro conjunto independente Y de G o contém, isto é, se $X \nsubseteq Y$ para qualquer outro conjunto independente Y de G.
- Um conjunto independente X de G é *máximo* se não existe outro conjunto independente Y de G que é maior, isto é, se $|Y| \leq |X|$ para qualquer outro conjunto independente Y de G.
- Denotamos por $\alpha(G)$ a cardinalidade de um conjunto independente máximo de G.
  - É chamado *número de estabilidade* de G.
- Note que é fácil encontrar um conjunto independente maximal.
  - Repetidamente, escolha um vértice de G e remova-o juntamente com seus vizinhos até que o grafo fique vazio.
- No entanto, a maioria dos grafos têm conjuntos independentes maximais que estão longe de serem máximos.
- Encontrar $\alpha(G)$ para qualquer G é um problema NP-completo.

Cliques:

- Uma *clique* em um grafo G é um conjunto de vértices mutuamente adjacentes.
- Formalmente, é um conjunto $X \subseteq V(G)$ tal que $G[X]$ é um grafo completo.
- Note que um único vértice é uma clique.
- Uma clique X de um grafo G é *maximal* se nenhuma outra clique Y de G a contém, isto é, se $X \nsubseteq Y$ para qualquer outra clique Y de G.
- Uma clique X de G é *máxima* se não existe outra clique Y de G que é maior, isto é, se $|Y| \leq |X|$ para qualquer outra clique Y de G.
- Denotamos por $\omega(G)$ a cardinalidade de uma clique máxima de G.
- Encontrar $\omega(G)$ para qualquer G é um problema NP-completo.
- O *complemento* de um grafo G, denotado $\bar{G}$, é o grafo com $V(\bar{G}) = V(G)$ e $uv \in E(\bar{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$.

O resultado a seguir nos diz que $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$.

Teorema 58. *Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. S é uma clique em G se e somente se S é um conjunto independente em $\bar{G}$.*

Como mostramos que $\alpha(G) \leq x$?

Lema 59. *Para todo grafo G, $\alpha(G) \leq \frac{m}{\delta(G)}$, onde $m = |E(G)|$.*

Demonstração. Seja X um conjunto independente de G. Note que a quantidade de arestas que têm algum extremo em X é

$$\sum_{v \in X} d(v) \geq \sum_{v \in X} \delta(G) = |X|\delta(G) \geq \alpha(G)\delta(G) \ .$$

Por outro lado, a quantidade de arestas no grafo é $m \geq \sum_{v \in X} d(v)$. Assim, $m \geq \alpha(G)\delta(G)$, de onde o resultado segue. □

O resultado do lema anterior não pode ser melhorado, pois $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor = \lfloor |E(C_n)|/\delta(C_n) \rfloor$.

Por outro lado, $\alpha(K_n) = 1$ e $|E(K_n)|/\delta(K_n) = n/2$.

Lema 60. *Para todo grafo G, $\omega(G) \leq \chi(G)$.*

Grafos de Mycielski têm $\omega(M_k) = 2$ e $\chi(M_k) = k$.

- Do lema anterior, temos que todo limitante superior de $\chi(G)$ vale para $\omega(G)$.
  - $\omega(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$, com $m = |E(G)|$.
  - $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Como mostramos que $\alpha \geq x$?

Lema 61. *Para todo grafo G, $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$, com $n = |V(G)|$.*

Demonstração. Seja X um conjunto independente maximal em G. Note que todo vértice de $V(G) \setminus X$ tem pelo menos um vizinho em X, caso contrário X não seria maximal. Então

$$|V(G) \setminus X| \leq \sum_{v \in X} d(v) \ .$$

Por outro lado, todo vértice de X tem no máximo $\Delta(G)$ vizinhos. Então

$$\sum_{v \in X} d(v) \leq |X|\Delta(G) \ .$$

Juntando as duas inequações, temos

$$\begin{aligned} |V(G) \setminus X| &\leq |X|\Delta(G) \\ |V(G) \setminus X| + |X| &\leq |X|\Delta(G) + |X| \\ |V(G)| &\leq |X|(\Delta(G) + 1) \ . \end{aligned}$$

E o resultado segue pois $|X| \leq \alpha(G)$. □

O resultado do lema anterior não pode ser melhorado pois $\alpha(K_n) = 1 = \frac{n}{\Delta(K_n)+1}$.

Por outro lado, $\alpha(K_{n,n}) = n$ mas $\frac{2n}{\Delta(K_{n,n})+1} = \frac{2n}{n+1} \approx 2$.

12 Grafos planares

- Existe uma lenda de que muitos dos resultados da Teoria dos Grafos se desenvolveram nos 100 primeiros anos depois que o *Problema das Quatro Cores* apareceu.
- Em 1852, um aluno perguntou ao seu professor por que 4 cores sempre coloriam qualquer mapa sem que nenhuma região vizinha recebesse a mesma cor.
- Essa questão ficou como conjectura, até que foi provada em 1977.

- Um grafo é *planar* se existe algum desenho seu no plano que não possua cruzamento de arestas.
- Problemas importantes, como layout de circuitos impressos, envolvem descobrir se um grafo é planar ou não.
- Nem todos os grafos são planares, mas todo grafo pode ser desenhado em alguma superfície sem que haja cruzamentos.
- Tentar desenhar um grafo no plano sem cruzamentos e falhar não implica que o grafo não é planar!

Lema 62. *O K_5 não é planar.*

Lema 63. *O $K_{3,3}$ não é planar.*

- Uma *subdivisão* de um grafo G é um grafo H que é gerado a partir de uma sequência de subdivisões das arestas de G.

Teorema 64 (Kuratowski, 1930)**.** *Um grafo é planar se e somente se ele não contém um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.*

Corolário 65. *O grafo de Petersen não é planar.*

Teorema 66. *Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 4$.*

12.1 Faces

- Um desenho de um grafo planar G particiona o plano em uma quantidade finita de regiões chamadas *faces* de G.
- Todo grafo planar tem uma única face ilimitada, chamada *face externa*.
- Note como toda aresta tem duas faces que a tocam, exceto no caso de arestas de corte.

O teorema a seguir apresenta o que é conhecido como *fórmula de Euler*. Ele indica que todos os desenhos planos de um grafo G têm a mesma quantidade de faces. Assim, podemos denotar por $F(G)$ o conjunto das faces de G.

Teorema 67. *Seja G um grafo planar conexo. Vale que $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$.*

Demonstração. Vamos usar indução na quantidade f de faces. Quando $f=1$, o grafo não contém ciclos e, portanto, é uma árvore. Como $|E(G)|=|V(G)|-1$, a fórmula vale.

Agora considere um grafo G com $f>1$ faces e suponha que a fórmula vale para qualquer grafo planar G' com f' faces, onde $1 \leq f' < f$.

Seja $e \in E(G)$ uma aresta que pertence a um ciclo de G. Como e não é de corte, $G' = G - e$ é conexo. Agora note que cada lado da aresta e é tocado por uma face diferente em G e que essas duas faces são uma só em G'. Assim, $|F(G')| = |F(G)|-1$. Claramente, G' também é planar. Logo, $|V(G')|-|E(G')|+|F(G')|=2$.

Como $|E(G')| = |E(G)|-1$ e $|V(G')| = |V(G)|$, substituindo temos $2 = |V(G')| - |E(G')| + |F(G')| = |V(G)| - (|E(G)|-1) + (|F(G)|-1) = |V(G)|-|E(G)|+|F(G)|$, de onde a fórmula vale para G. □

Teorema 68. *Seja G um grafo planar com $c(G)$ componentes conexas. Então $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)| = 1 + c(G)$.*

A seguir veremos resultados que são consequência da fórmula de Euler e são úteis para provar não-planaridade. De forma geral, eles afirmam que um grafo planar não é "muito denso". Não é verdade, no entanto, que se o grafo não for muito denso, então ele vai ser planar.

- O grau de uma face f, denotado $d(f)$, é o comprimento do passeio fechado pelo perímetro da face.

Teorema 69. *Se G é um grafo planar, então $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$.*

Corolário 70. *Se G é um grafo planar com $|E(G)| \geq 2$, então $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.*

Demonstração. Como $d(f) \geq 3$ para toda face f de G, temos que $\sum_{f \in F(G)} d(f) \geq 3|F(G)|$. Pelo Teorema 69, $2|E(G)| \geq 3|F(G)|$. Pela fórmula de Euler, $2|E(G)| \geq 3(|E(G)| - |V(G)| + 2)$, de onde $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$. □

Corolário 71. *Se G é um grafo planar com $g(G) = k \geq 3$, então $|E(G)| \leq \frac{k}{k-2}(|V(G)| - 2)$.*

Corolário 72. *Se G é um grafo planar, então $\delta(G) \leq 5$.*

Prove o Lema 62 e o Lema 63 usando os corolários acima.