Autômatos Finitos Determinísticos - Extra

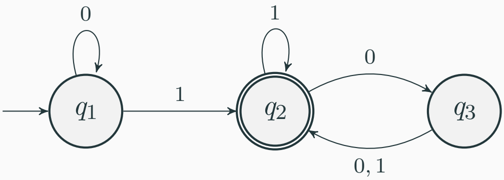
MCTA015-13 - Linguagens Formais e Automata

Prof. Maycon Sambinelli

m.sambinelli@ufabc.edu.br

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

Diagrama de Estados do AFD M^*



$L(M^*) = \{w \in \{0,1\}^* \colon w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1\}$.

Programando um AFD

Simulando um Autômato em Python

```python
def afd(delta, q, F, w):

    for s in w:
        q = delta[(q, s)]
    return q in F

# Definição da função de transição do AFD M^*
delta = {('q1', '0'): 'q1',
         ('q1', '1'): 'q2',
         ('q2', '1'): 'q2',
         ('q2', '0'): 'q3',
         ('q3', '0'): 'q2',
         ('q3', '1'): 'q2'}

afd(delta, 'q1', ['q2'], "000111101010000") # -> True
```

Demonstrando a Linguagem de um AFD

Nesta seção vamos demonstrar a linguagem reconhecida pelo AFD M^*. Antes de apresentarmos o teorema propriamente dito, vamos introduzir a definição de função de transição estendida, que proverá um notação adequada para nosso objetivo.

Função de Transição Estendida

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD. A **função de transição estendida** de M é a função $\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ definida da seguinte forma:

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$ para todo $q \in F$
- $\hat{\delta}(q, \alpha w) = \delta(\hat{\delta}(q, \alpha), w)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$ e $w \in \Sigma$

Função de Transição Estendida

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD. A **função de transição estendida** de M é a função $\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ definida da seguinte forma:

- $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$ para todo $q \in F$
- $\hat{\delta}(q, \alpha w) = \delta(\hat{\delta}(q, \alpha), w)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$ e $w \in \Sigma$

Em português: $\hat{\delta}(q, \omega)$ é o estado no qual o AFD se encontra após processar a cadeia ω começando do estado q

Aceite em um AFD – Definição Alternativa

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ um AFD e seja $\omega = w_1 w_2 \cdots w_n$ uma cadeia sobre Σ.

- **Versão 1.** Dizemos que M **aceita** ω se existe uma sequência de estados $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ tal que
  - $r_1 = q_1$
  - $\delta(r_i, w_i) = r_{i+1}, \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$
  - $r_n \in F$
- **Versão 2.** Dizemos que M **aceita** ω se $\hat{\delta}(q_1, \omega) \in F$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Teorema

Seja

$$X = \Big\{ w \in \{0,1\}^* \colon w \text{ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último } 1 \Big\}.$$

Então $L(M^*) = X$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Demonstração.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Demonstração.

- Por indução em $|\omega|$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

BASE $|\omega| = 0$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

BASE $|\omega| = 0$.

- Neste caso $\omega = \epsilon$ e, portanto, contém zero símbolos 0's e 1's.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

BASE $|\omega| = 0$.

- Neste caso $\omega = \epsilon$ e, portanto, contém zero símbolos 0's e 1's.
- Ademais, $\hat{\delta}(q_1, \epsilon) = q_1$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

BASE $|\omega| = 0$.

- Neste caso $\omega = \epsilon$ e, portanto, contém zero símbolos 0's e 1's.
- Ademais, $\hat{\delta}(q_1, \epsilon) = q_1$.
- Portanto, as condições de (1)-(3) são satisfeitas, e o resultado segue.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Passo $|\omega| > 0$.

- Seja $\omega = \alpha x$, onde $x \in \Sigma$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Passo $|\omega| > 0.$

- Seja $\omega = \alpha x$, onde $x \in \Sigma$
- Por hipótese de indução, sabemos que (1), (2), e (3) valem pra α

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Passo $|\omega| > 0$.

- Seja $\omega = \alpha x$, onde $x \in \Sigma$
- Por hipótese de indução, sabemos que (1), (2), e (3) valem pra α
- Vamos provar que (1), (2), e (3) são verdadeiros para ω

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$, então $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 0$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$, então $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 0$.
- Pela H.I., α não contém 1's, e portanto o resultado segue, já que $x = 0$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$, então $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 0$.
- Pela H.I., α não contém 1's, e portanto o resultado segue, já que $x = 0$.
- ($\Leftarrow$) Se ω não contém 1's, então α também não e $x = 0$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$, então $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 0$.
- Pela H.I., α não contém 1's, e portanto o resultado segue, já que $x = 0$.
- ($\Leftarrow$) Se ω não contém 1's, então α também não e $x = 0$.
- Pela H.I., $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e, assim, $\delta(q_1, x) = q_1$, e o resultado segue.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$,
  então:
  (a) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 1$;
  (b) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $x = 1$;
  ou
  (c) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ e $x \in \{0, 1\}$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$, então:

  (a) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 1$;
  (b) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $x = 1$;
  ou
  (c) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ e $x \in \{0, 1\}$.

- Se (a) ou (b) valem, então ω contém 1's ($x = 1$). Se (c) vale, então, por H.I., α contém 1's.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- $(\Rightarrow)$ Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$, então:
  (a) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 1$;
  (b) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $x = 1$; ou
  (c) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ e $x \in \{0, 1\}$.

- Se (a) ou (b) valem, então ω contém 1's ($x = 1$). Se (c) vale, então, por H.I., α contém 1's.
- Se $x = 1$, então existem zero 0's após o último 1, e o resultado segue.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- $(\Rightarrow)$ Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$, então:

  (a) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 1$;
  (b) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $x = 1$;
  ou
  (c) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ e $x \in \{0, 1\}$.

- Se (a) ou (b) valem, então ω contém 1's ($x = 1$). Se (c) vale, então, por H.I., α contém 1's.
- Se $x = 1$, então existem zero 0's após o último 1, e o resultado segue.
- Se $x = 0$, então a única possibilidade é que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$. Pela H.I., α contém um número ímpar de zeros após o último 1, e portanto ω contém um número par, e o resultado segue.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Leftarrow$). Temos dois casos a se considerar: $x = 0$ ou $x = 1$.
- Se $x = 0$, então α contém um número ímpar de zeros após o ultimo 1.
- Pela H.I., $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$, e assim $\delta(q_3, x) = q_2$, e o resultado segue.
- Se $x = 1$, então temos três possibilidades para α:
  (i) α não contém 1's;
  (ii) α contém 1's e possuí um número par de zeros após o último 1;
  (iii) α contém 1's e possuí um número ímpar de zeros após o último 1.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- $(\Leftarrow)$. Temos dois casos a se considerar: $x = 0$ ou $x = 1$.
- Se $x = 0$, então α contém um número ímpar de zeros após o ultimo 1.
- Pela H.I., $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$, e assim $\delta(q_3, x) = q_2$, e o resultado segue.
- Se $x = 1$, então temos três possibilidades para α:
  (i) α não contém 1's;
  (ii) α contém 1's e possuí um número par de zeros após o último 1;
  (iii) α contém 1's e possuí um número ímpar de zeros após o último 1.
- Como a H.I. vale para α, temos que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$, $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ se vale (i), (ii), e (iii), respectivamente.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Leftarrow$). Temos dois casos a se considerar: $x = 0$ ou $x = 1$.
- Se $x = 0$, então α contém um número ímpar de zeros após o ultimo 1.
- Pela H.I., $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$, e assim $\delta(q_3, x) = q_2$, e o resultado segue.
- Se $x = 1$, então temos três possibilidades para α:
  - (i) α não contém 1's;
  - (ii) α contém 1's e possuí um número par de zeros após o último 1;
  - (iii) α contém 1's e possuí um número ímpar de zeros após o último 1.
- Como a H.I. vale para α, temos que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$, $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ se vale (i), (ii), e (iii), respectivamente.
- Como pra cada uma dessas possibilidades temos uma transição de tal estado para q_2 temos que o resultado vale.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (3):

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (3):

Exercício

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (3):

Exercício

C.Q.D.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Teorema

Seja $X = \{w \in \{0,1\}^* : w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1\}$. Então $L(M^*) = X$

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Prova.

- Precisamos mostrar que $X \subseteq L(M^*)$ e $L(M^*) \subseteq X$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Teorema

Seja $X = \{w \in \{0,1\}^* : w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1\}$. Então $L(M^*) = X$

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Prova.

- Precisamos mostrar que $X \subseteq L(M^*)$ e $L(M^*) \subseteq X$
- Se $\omega \in X$, então, pelo Lema, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ e, consequentemente, $\omega \in L(M^*)$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Teorema

Seja $X = \big\{ w \in \{0,1\}^* : w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1 \big\}$. Então $L(M^*) = X$

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Prova.

- Precisamos mostrar que $X \subseteq L(M^*)$ e $L(M^*) \subseteq X$
- Se $\omega \in X$, então, pelo Lema, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ e, consequentemente, $\omega \in L(M^*)$
- Se $\omega \in L(M^*)$, então $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ e, pelo Lema, $\omega \in X$ C.Q.D.