Grafos

Grafo

Um <u>grafo</u> é uma tripla (V, E, φ), onde

- V é o conjunto finito de elementos chamados <u>vértices</u>

- E é um conjunto finito de elementos chamados <u>arestas</u>

- φ é a <u>função de incidência</u> que associa cada aresta a um par não ordenado de vértices.

Exemplo

Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo, onde

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$$

$\varphi(e_1) = \{v_5, v_5\}$, $\varphi(e_2) = \{v_2, v_3\}$, $\varphi(e_3) = \{v_0, v_3\}$

$\varphi(e_4) = \{v_4, v_5\}$, $\varphi(e_5) = \{v_5, v_1\}$, $\varphi(e_6) = \{v_0, v_1\}$

$\varphi(e_7) = \{v_0, v_2\}$, $\varphi(e_8) = \{v_0, v_3\}$, $\varphi(e_9) = \{v_0, v_4\}$

$$\varphi(e_{10}) = \{v_3, v_4\}$$

Desenho de um Grafo

Grafos possuem uma representação gráfica amigável

- Círculos representam vértices
- Segmentos de retas ligando dois círculos (vértices) representam arestas

Exemplo de Desenho de um Grafo

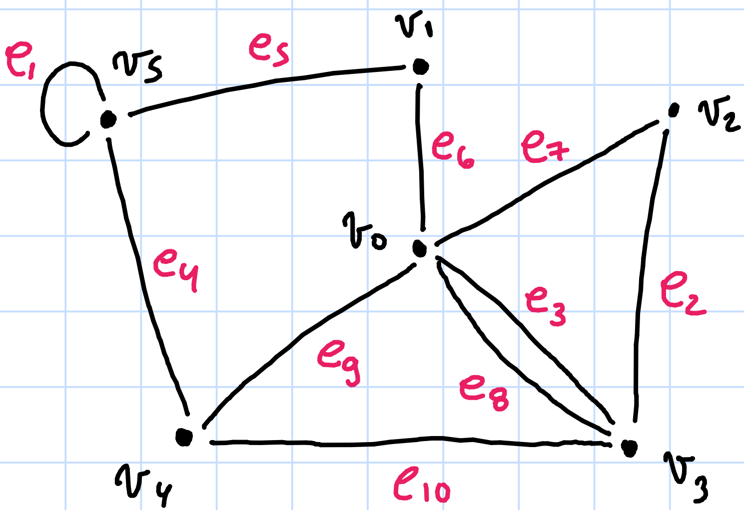
Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo, onde $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

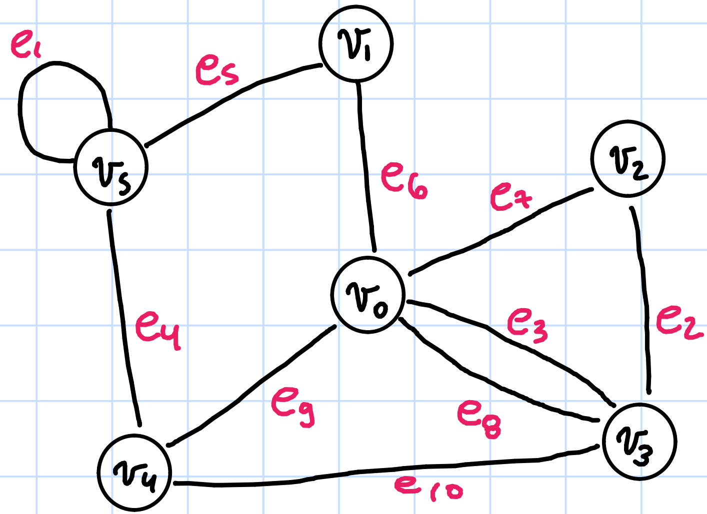
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ e

$\varphi(e_1) = \{v_5, v_5\}$, $\varphi(e_2) = \{v_2, v_3\}$, $\varphi(e_3) = \{v_0, v_3$, $\varphi(e_4) = \{v_4, v_5\}$,

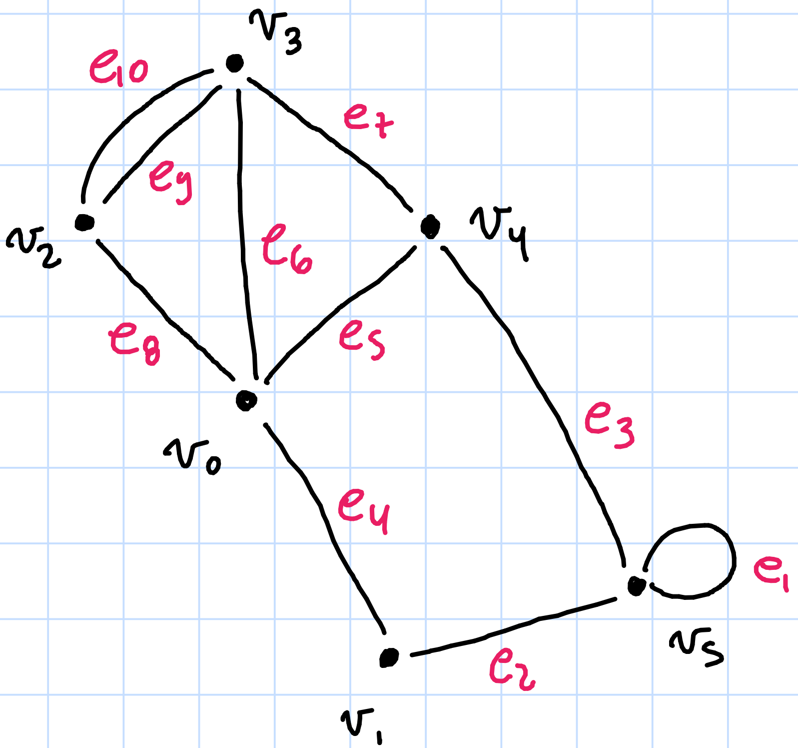
$\varphi(e_5) = \{v_5, v_1\}$, $\varphi(e_6) = \{v_0, v_1\}$, $\varphi(e_7) = \{v_0, v_2\}$, $\varphi(e_8) = \{v_0, v_3\}$,

$\varphi(e_9) = \{v_0, v_4\}$, $\varphi(e_{10}) = \{v_3, v_4\}$

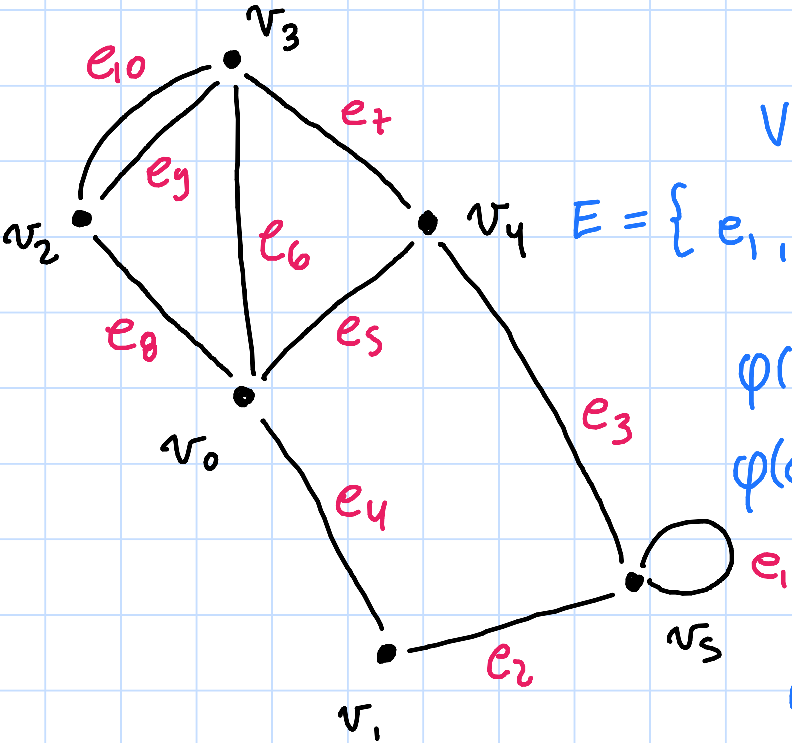




É comum definirmos um grafo pelo seu desenho



É comum definirmos um grafo pelo seu desenho



$$G = (V, E, \varphi)$$

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$$

$\varphi(e_1) = \{v_5, v_5\}$, $\varphi(e_2) = \{v_1, v_5\}$

$\varphi(e_3) = \{v_4, v_5\}$, $\varphi(e_4) = \{v_0, v_1\}$

$\varphi(e_5) = \{v_0, v_4\}$, $\varphi(e_6) = \{v_0, v_3\}$

$\varphi(e_6) = \{v_0, v_3\}$, $\varphi(e_7) = \{v_4, v_3\}$

$\varphi(e_8) = \{v_0, v_2\}$, $\varphi(e_9) = \{v_2, v_3\}$, $\varphi(e_{10}) = \{v_2, v_3\}$

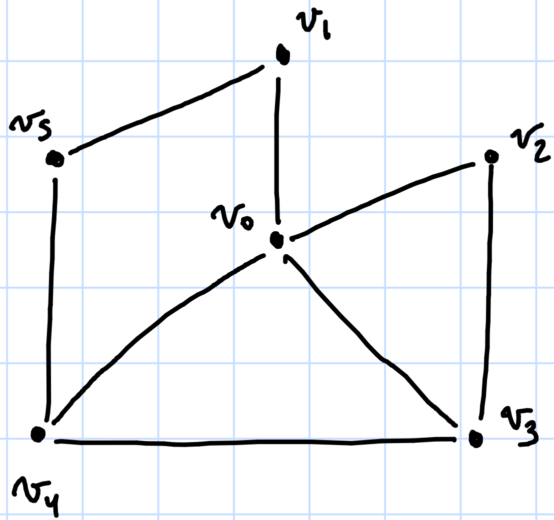
Nomenclatura

Dado um grafo $G = (V, E, \varphi)$, definimos

- $V(G) = V$
- $E(G) = E$
- a <u>ordem</u> de G, denotado por $v(G)$, é $|V(G)|$
- $e(G) = |E(G)|$
- Duas arestas e, f são <u>paralelas</u> se $\varphi(e) = \varphi(f)$
- uma aresta e é um laço se $\varphi(e) = \{u, u\}$, para algum $u \in V$
- Denotamos uma aresta $\{u, v\}$ por uv (ou vu)

Grafos Simples

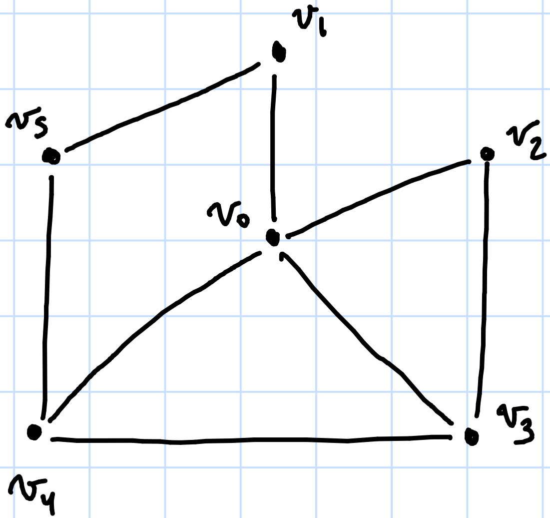
Dizemos que um grafo G é <u>simples</u> se G ñ possui arestas paralelas e nem laços.



Em um grafo simples podemos determinar φ implicitamente

Podemos definir um grafo Simples como um par (V, E), onde V é o conjunto finito de elementos chamados vértices e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V

Exemplo de Grafos Simples



$$G = (V, E)$$

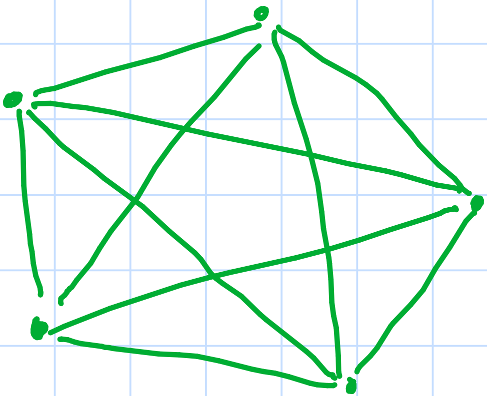
$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$$

Neste curso vamos trabalhar apenas com grafos simples

Proposição Se G é um grafo simples, então

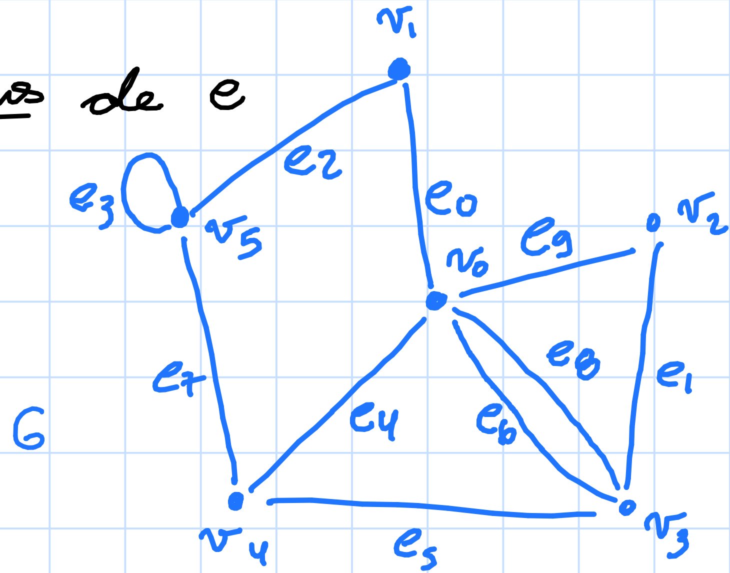
$$e(G) \leq \binom{v(G)}{2} = \frac{v(G)[v(G)-1]}{2}$$



Adjacência e Vizinhança

Se $e \in E(G)$ e se $e = uv$, dizemos:

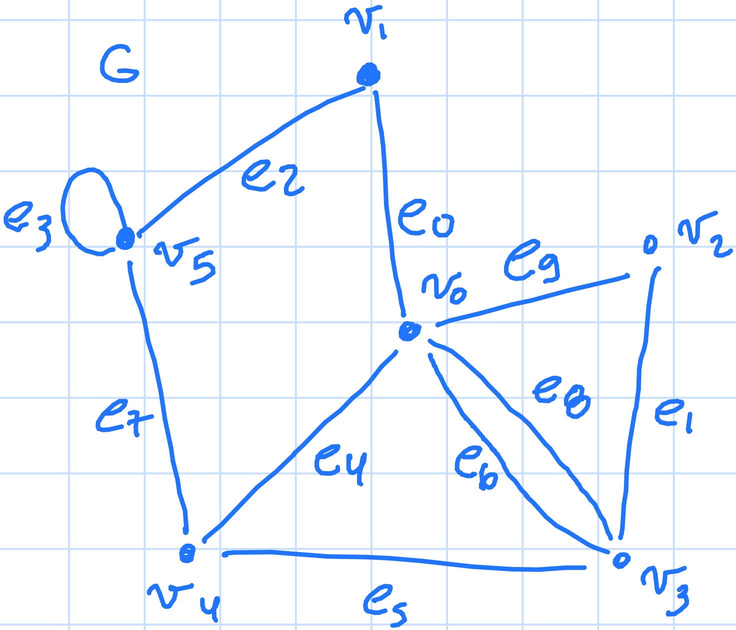
- u e v são <u>vizinhos</u> ou <u>adjacentes</u>
- u é <u>adjacente</u> a v (vice-versa)
- u é <u>vizinho</u> de v
- u e v são <u>extremos</u> de e
- e <u>incide</u> em u



Vizinhança

A <u>vizinhança</u> de um vértice u de um grafo G é

$$N_G(u) = \{ v \in V(G) : uv \in E(G) \}$$

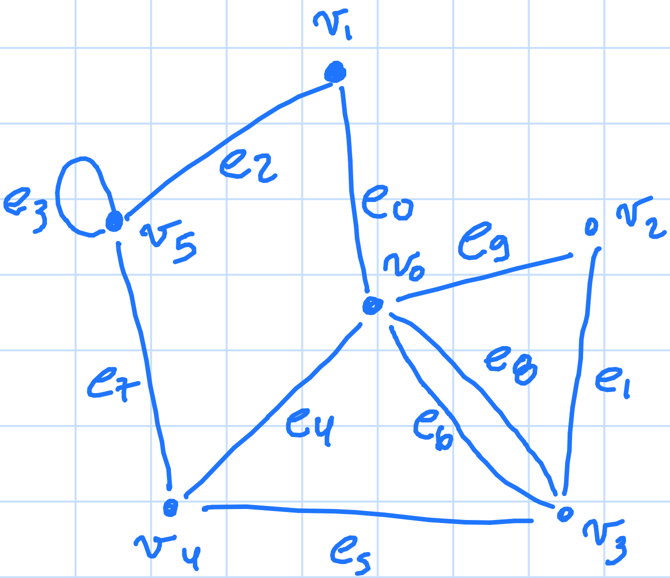


$$N_G(v_3) = \{ v_2, v_0, v_4 \}$$

$$N_G(v_5) = \{ v_1, v_4, v_5 \} \quad !!$$

Grau

O **grau** de um vértice v de um grafo G, denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas incidentes* a v



* laço conta duas vezes

$$d_G(v_3) = 4$$

$$d_G(v_5) = 4$$

* Se G é um grafo simples então $d_G(v) = |N_G(v)|$

* Se $d(v) = 0$, então dizemos que v é um vértice isolado.

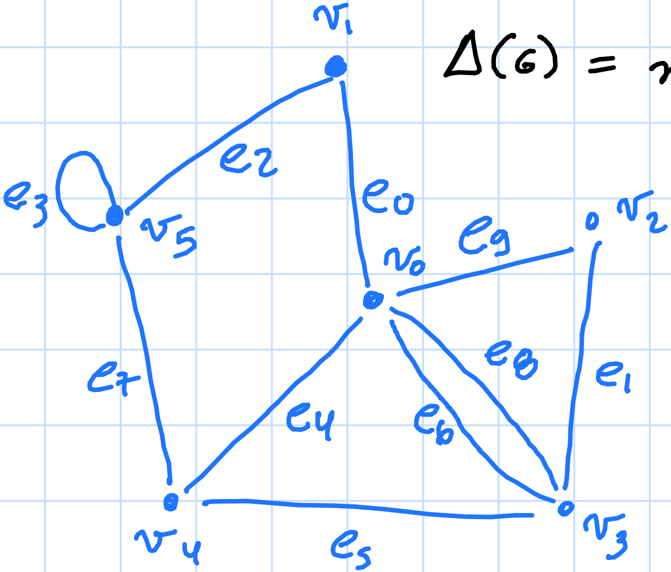
Grau mínimo e máximo

* O <u>grau mínimo</u> de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é

$$\delta(G) = \min\{d_G(u) : u \in V(G)\}$$

* O <u>grau máximo</u> de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é

$$\Delta(G) = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\}$$



$$\delta(G) = 2$$

$$\Delta(G) = 5$$

Simplificação de Notação

Quando o grafo G é claro pelo contexto

equivalente

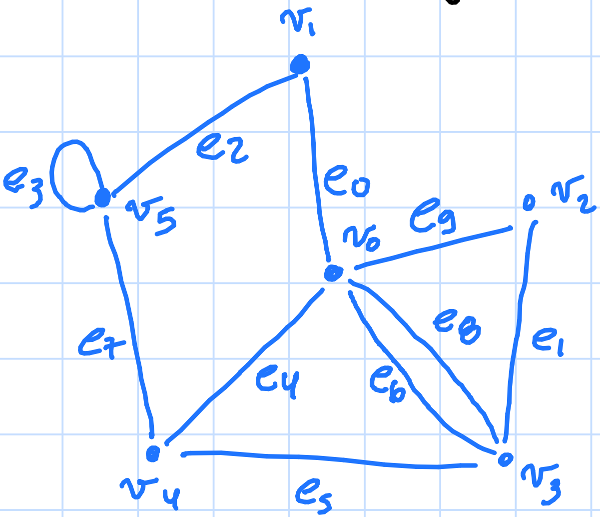
$$N(v) \equiv N_G(v)$$

$$d(v) \equiv d_G(v)$$

Teorema (Aperto de mãos) Para todo grafo G, vale

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G)$$

Corolário Todo grafo possui um número par de vértices de grau ímpar

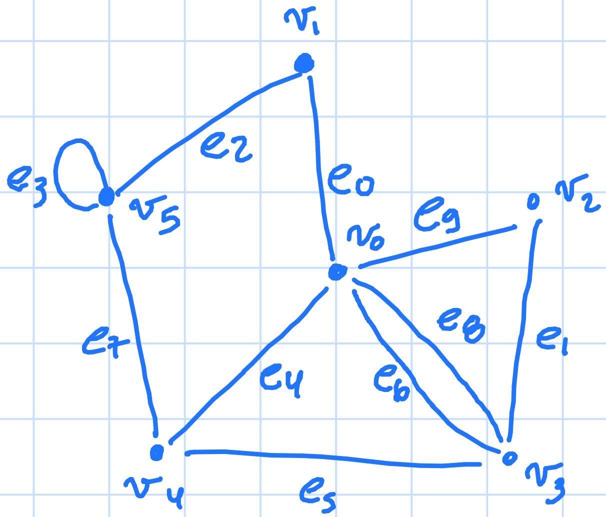


$e = 10$

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 5 + 2 + 2 + 4 + 3 + 4$$
$$= 20$$

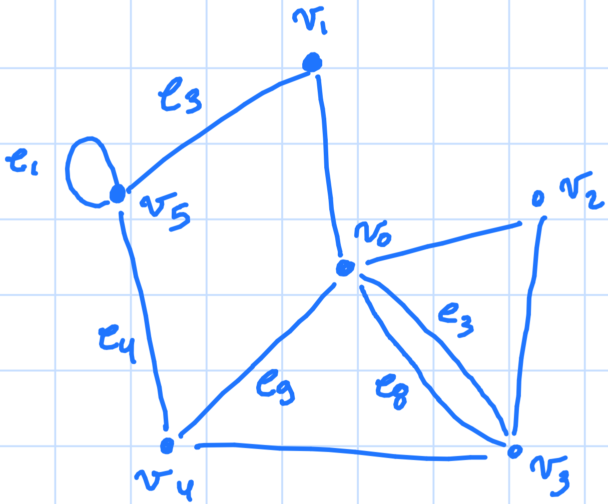
Vértices com grau ímpar: v_0, v_4

Teorema Todo grafo possui ao menos dois vértices com o mesmo grau

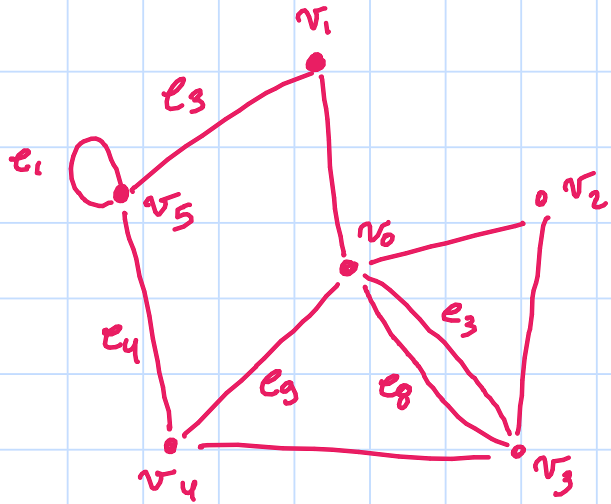


Igualdade Entre grafos

Dois grafos $G = (V, E, \varphi)$ e $H = (A, B, \phi)$ são <u>idênticos</u> se $V = A$, $E = B$, $\varphi = \phi$.

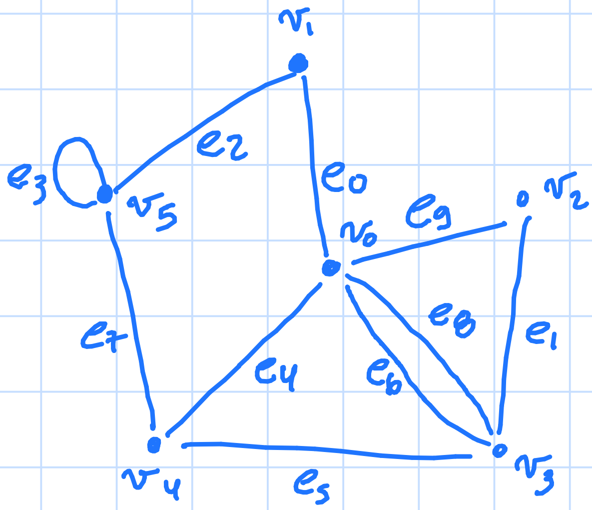


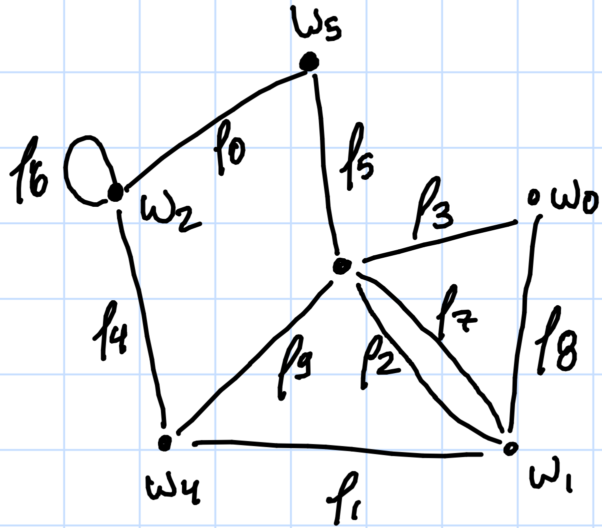
G



H

Isomorfismo

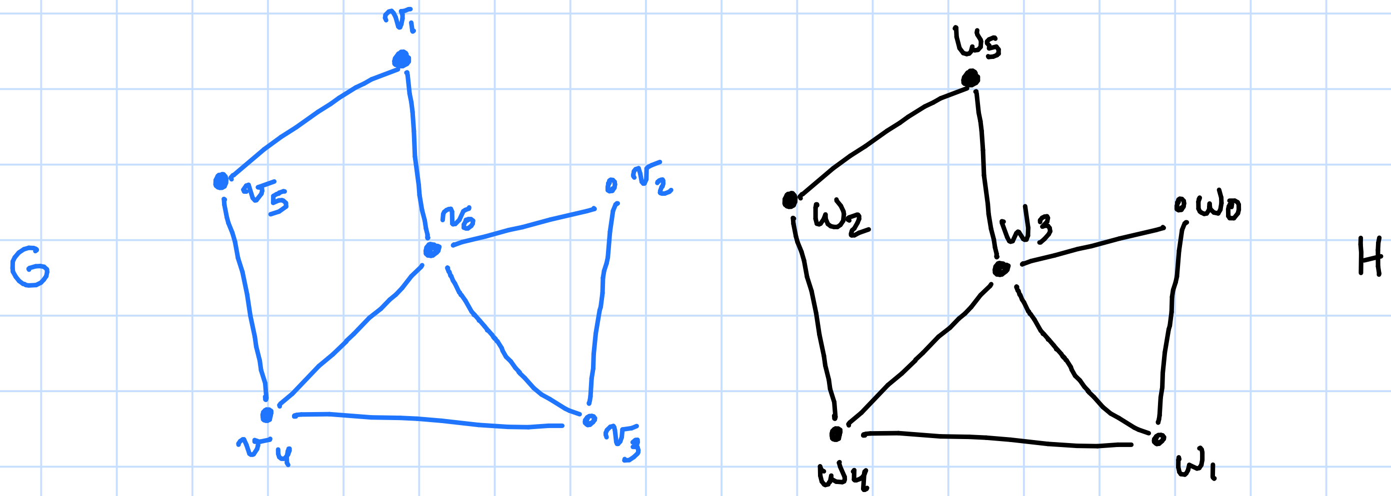




Se os grafos G e H apresentam estruturas idênticas quando ignorados os rótulos dos vértices e arestas, então dizemos que G e H são <u>isomorfos</u> (iso = igual, morfo = forma).

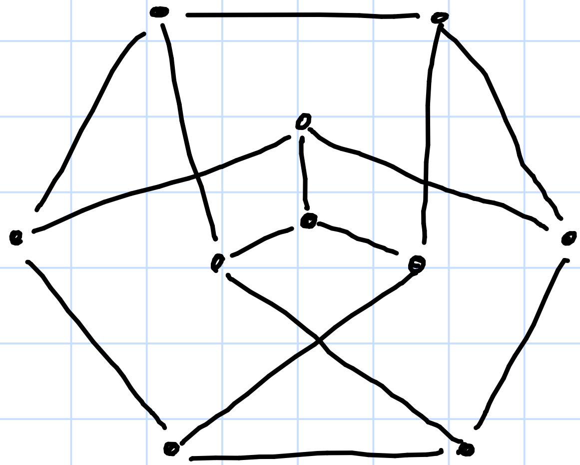
Isomorfismo

Dois grafos simples $G=(V,E)$ e $H=(A,B)$ são <u>isomorfos</u> se existe uma bijeção $\pi : V \to A$ tal que $uv \in E$ sse $\pi(u)\pi(v) \in B$.



$$\pi = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ w_3 & w_5 & w_0 & w_1 & w_4 & w_2 \end{pmatrix}$$

* Às vezes desenhamos um grafo sem rótulos, para representar qualquer grafo isomorfo ao desenho



* Escrevemos $G \simeq H$ para denotar que o grafo G é isomorfo ao grafo H.

Subgrafos

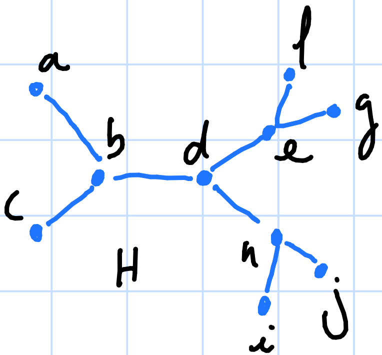
Um grafo H é <u>subgrafo</u> de um grafo G, denotado por $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$

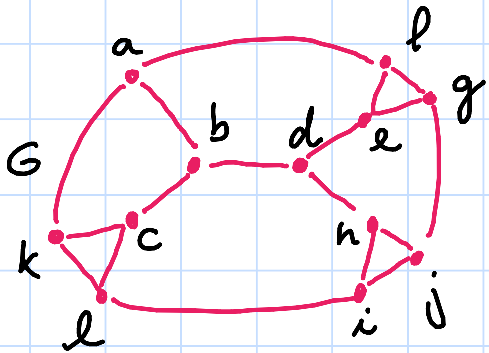
$V(H) = \{a, b, \dots, j\}$

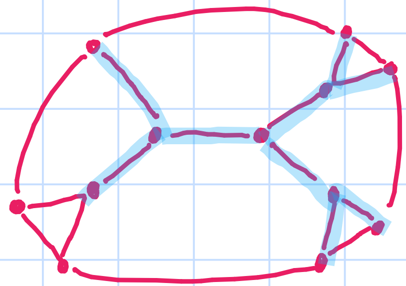
$E(H) = \{ab, bc, bd, de, dh, ef, eg, hi, hj\}$

$V(G) = \{a, b, \dots, l\}$

$E(G) = E(H) \cup \{lk, ak, af, fg, gj, ji, il, ck, cl\}$





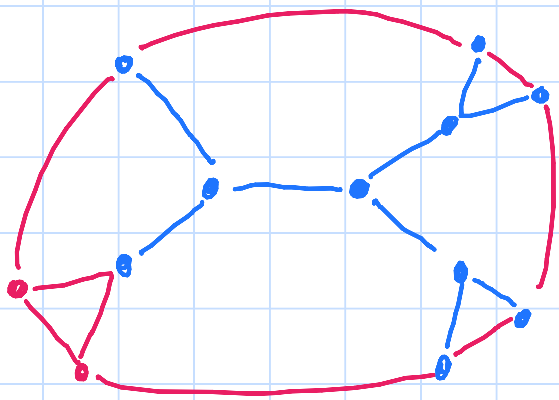


Note que todo grafo é um subgrafo de si.

Subgrafos

As seguintes frases são equivalentes:

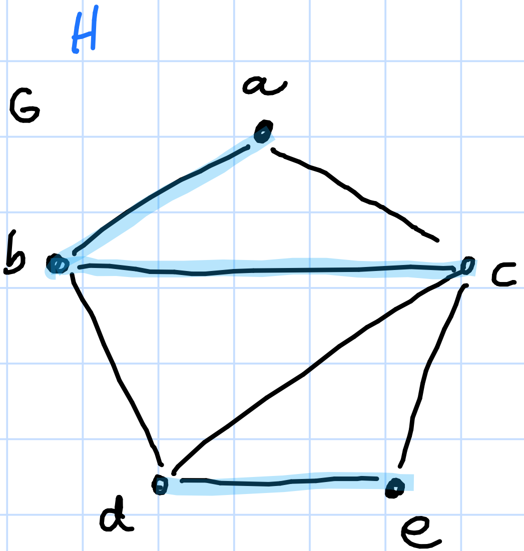
- H é um subgrafo de G
- $H \subseteq G$
- G contém (o grafo) H



Subgrafos

Um subgrafo H de um grafo G é <u>gerador</u> se

$$V(H) = V(G)$$



$V(H) = \{a, b, c, d, e\}$
$E(H) = \{ab, bc, de\}$

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$
$E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, ce, de\}$

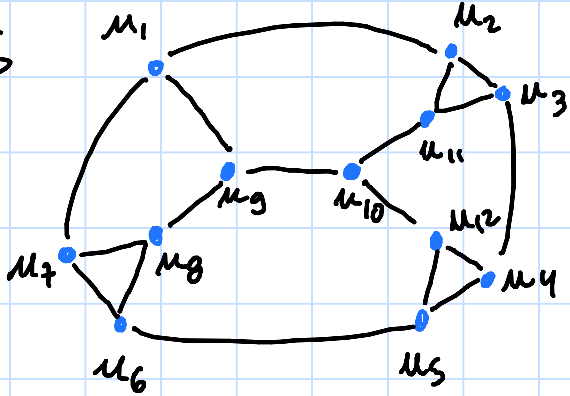
Operações

Se S é um subconjunto de vértices de um grafo G, definimos G − S como sendo o grafo

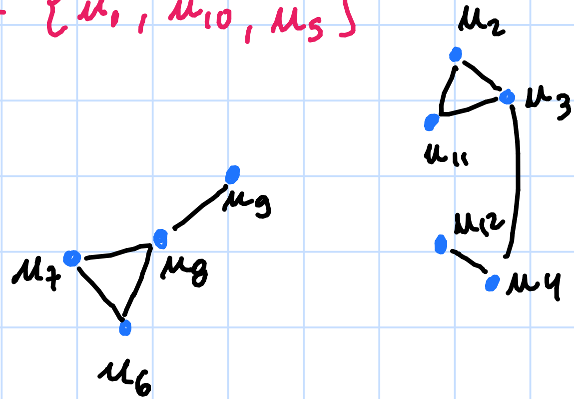
$$V(G-S) = V(G)\setminus S$$

$$E(G-S) = \{uv \in E(G) : u, v \in V(G)\setminus S\}$$

G



$G - \{u_1, u_{10}, u_5\}$



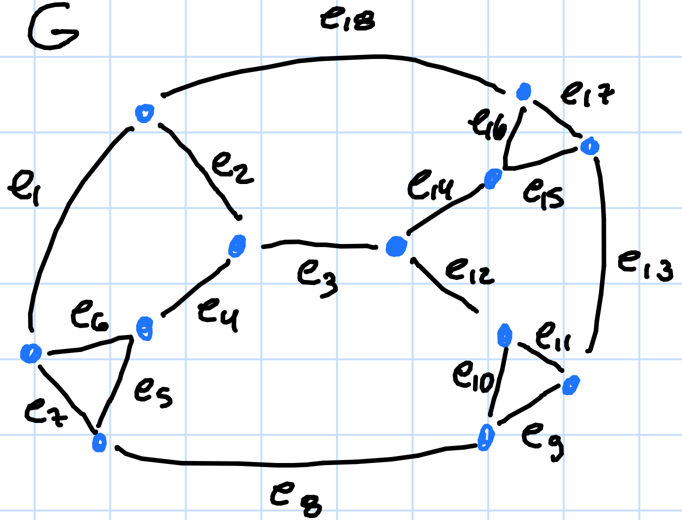
Operações

Se S é um subconjunto de arestas de um grafo G, definimos $G \setminus S$ como sendo o grafo

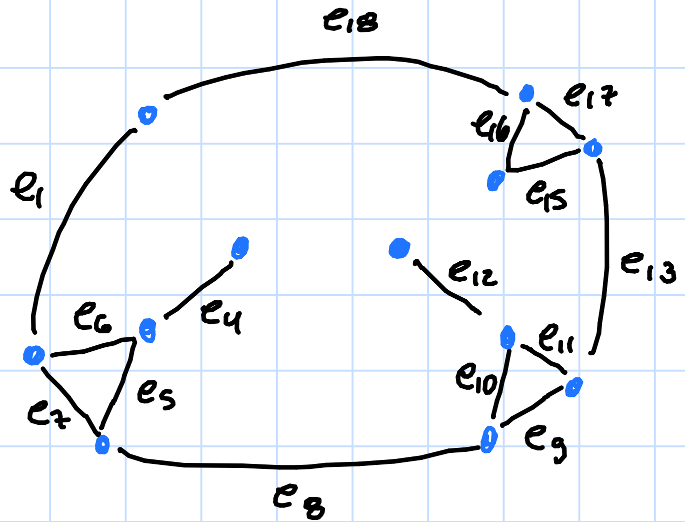
$$V(G\setminus S) = V(G)$$

$$E(G\setminus S) = E(G)\setminus S$$

G



$G\setminus\{e_2, e_3, e_{14}\}$



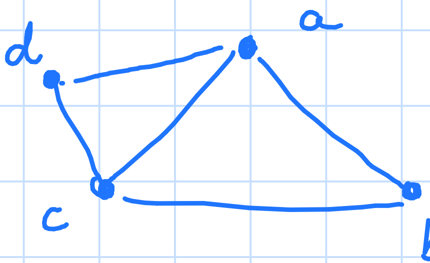
Quando $S = \{x\}$, i.e., S é um conjunto unitário, simplificamos a notação da seguinte maneira

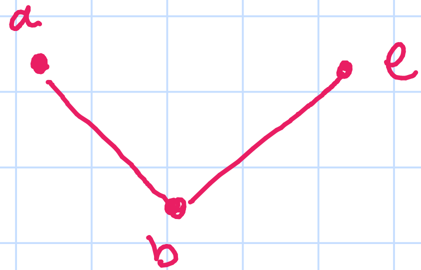
$$G - x \equiv G - S$$
$$G \setminus x \equiv G \setminus S$$

Dados dois grafos $G=(V,E)$ e $H=(A,B)$, definimos a união dos grafos G e H, denotada por $G+H$, como sendo o grafo

$$V(G+H) = V \cup A \qquad E(G+H) = E \cup B$$

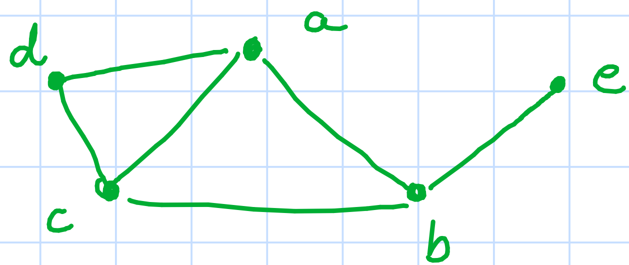
G





H

G+H



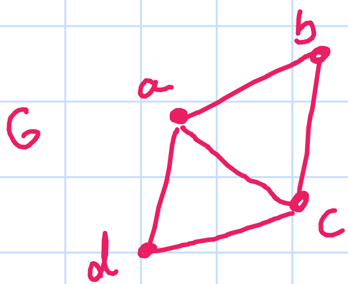
Abuso de notação: é comum tratermos um conj. de arestas $S = \{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_\ell v_\ell\}$ como sendo o grafo G_S tal que

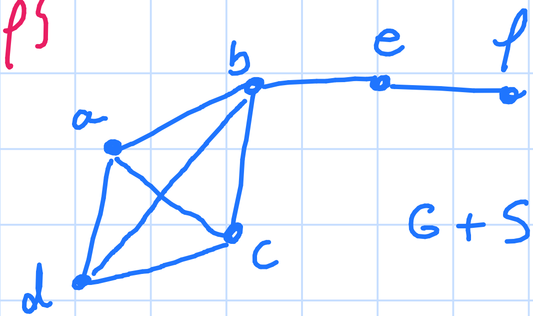
$$V(G_S) = \{u_1, u_2, \ldots, u_\ell, v_1, v_2, \ldots, v_\ell\}$$

$$E(G_S) = S$$

Assim podemos escrever $G+S$ para denotar $G+G_S$

$S = \{bd, be, ef\}$



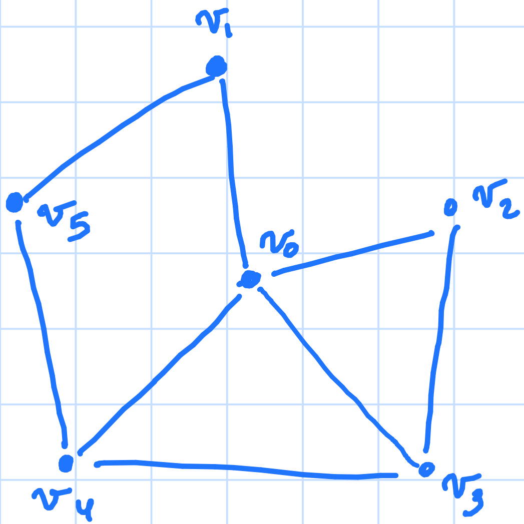


Passeio

Um **passeio** é uma sequência de vértices $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ tal que

(i) $u_i \in V(G)$, para $0 \leq i \leq \ell$

(ii) $u_i u_{i+1} \in E(G)$, para $0 \leq i < \ell$



$P = v_0 v_2 v_3 v_0 v_1 v_5 v_1$

Passeio

Se $P = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k$ é um passeio, então

- u_0 e u_k são os (vértices) externos/extremos
- u_i, $0 < i < k$, são os vértices internos;
- o comprimento de P é k;
- P é fechado se $u_0 = u_k$ e aberto caso contrário.
- É comum ver P como o grafo (V, E), onde

$$V = \{u_0, u_1, \ldots, u_k\}$$

$$E = \{u_0 u_1, u_1 u_2, u_2 u_3, \ldots, u_{k-1} u_k\}$$

Portanto podemos usar a notação de grafos para P, tais como $V(P)$ e $E(P)$.

Trilha, Passeio e Ciclo

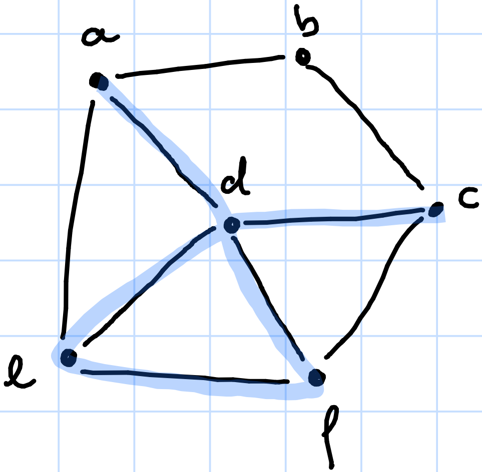
Seja $P = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ um passeio. Dizemos que

- P é uma <u>trilha</u> se P não repete arestas, i.e., $u_i u_{i+1} \neq u_j u_{j+1}$ para qualquer $i \neq j$

- P é um <u>caminho</u> se P não repete vértices, i.e., $u_i \neq u_j$ para todo $i \neq j$

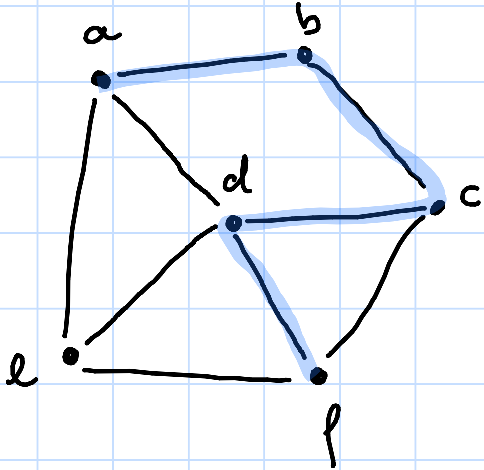
- P é um <u>ciclo</u> se P $u_i \neq u_j$ para todo $0 \leq i < j < \ell$, $u_0 = u_\ell$ e $\ell \geq 3$.

Trilha, Passeio e Ciclo



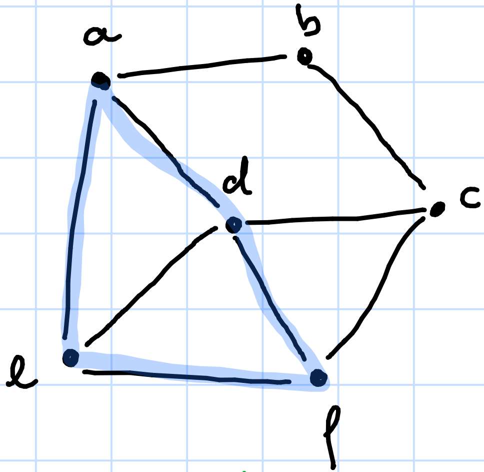
P = a, d, e, f, d, c

Trilha



P = a, b, c, d, f

Passeio

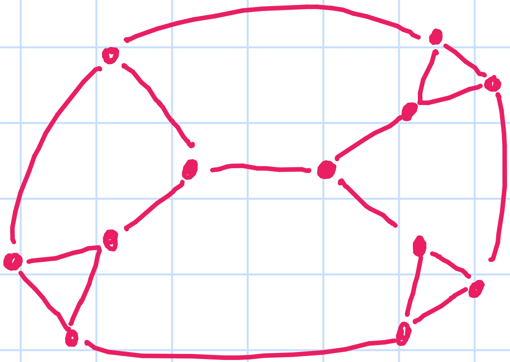


P = a, d, f, e, a

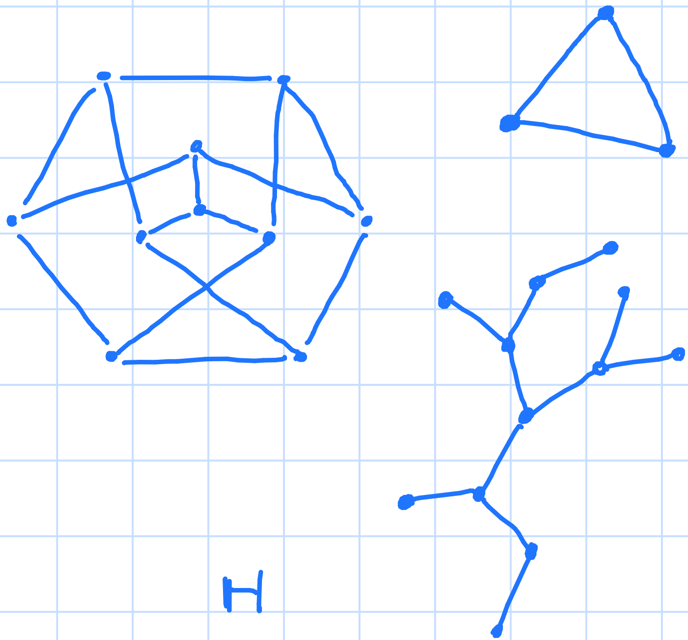
ciclo

Conexidade

um grafo no qual existe um caminho entre todo par de vértices é chamado de <u>conexo</u>. Um grafo que não é conexo é dito <u>desconexo</u>.



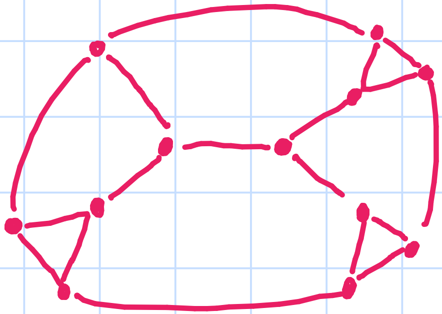
G



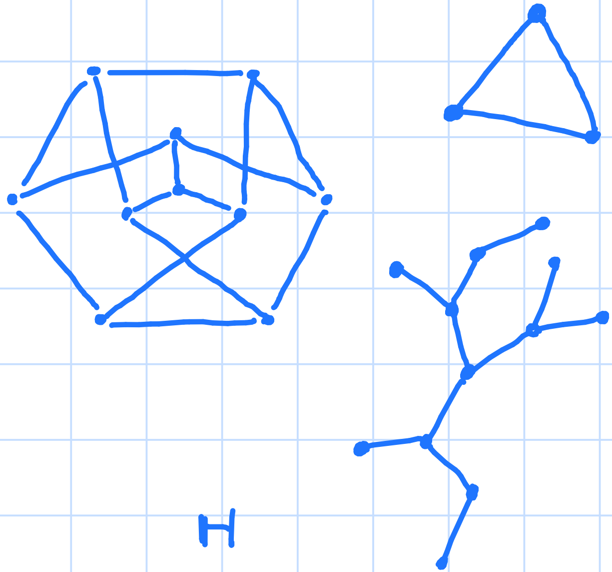
H

Conexidade

Uma <u>componente conexa</u> é um subgrafo conexo maximal.



1 componente conexa

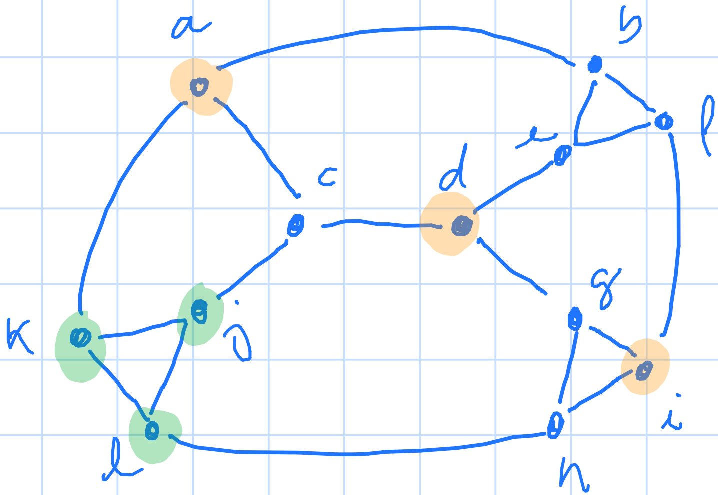


3 componentes conexas

Conjunto independente (estável) e Clique

Seja S um subconjunto de vértices de um grafo G. Então

- S é <u>estável</u> (<u>independente</u>) se para todo par de vértices $u, v \in S$, temos que $uv \notin E(G)$.
- S é uma <u>clique</u> se para todo par de vértices $u, v \in S$, temos que $uv \in E(G)$



$S_1 = \{a, d\ i\}$ é estável

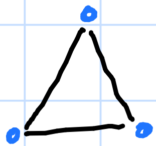
$S_2 = \{j, k, l\}$ é clique

Grafo Completo

O <u>grafo completo de ordem</u> n, denotado por K_n, é o grafo simples tal que $V(K_n)$ é uma clique.

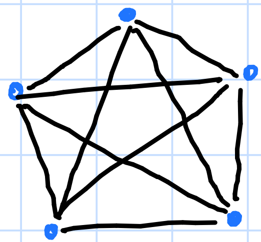
K_1

K_2

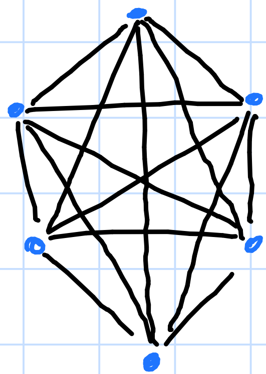


K_3

triângulo



K_5



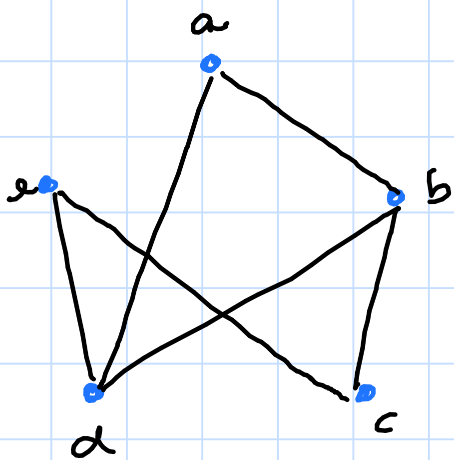
K_6

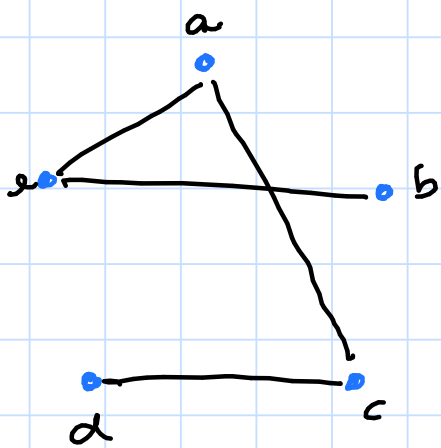
Complemento

o <u>complemento</u> de um grafo simples G é o grafo $\overline{G}$ tal que

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

$$E(\overline{G}) = \{uv : uv \notin E(G)\}$$

G 

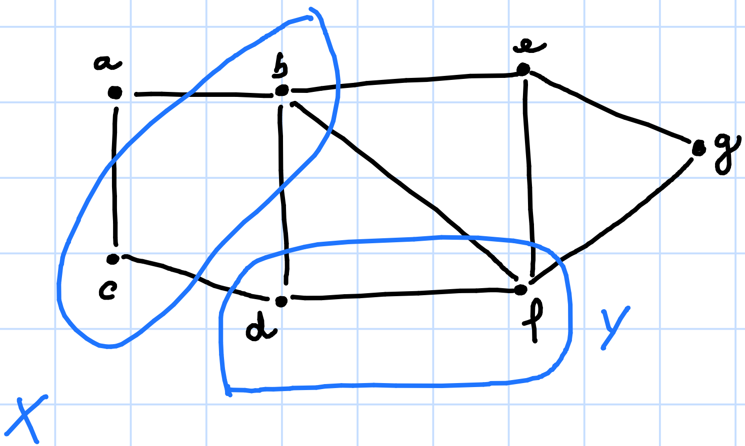
 $\overline{G}$

OBS: $G + \overline{G} \simeq K_n$, onde $n = v(G) = v(\overline{G})$

Corte (X, Y)

Dados um grafo G e dois conjuntos $X, Y \subseteq V(G)$ tais que $X \cap Y = \emptyset$, o corte (X, Y) de G, denotado por $E(X, Y)$, é o conjunto

$$\{xy \in E(G) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$



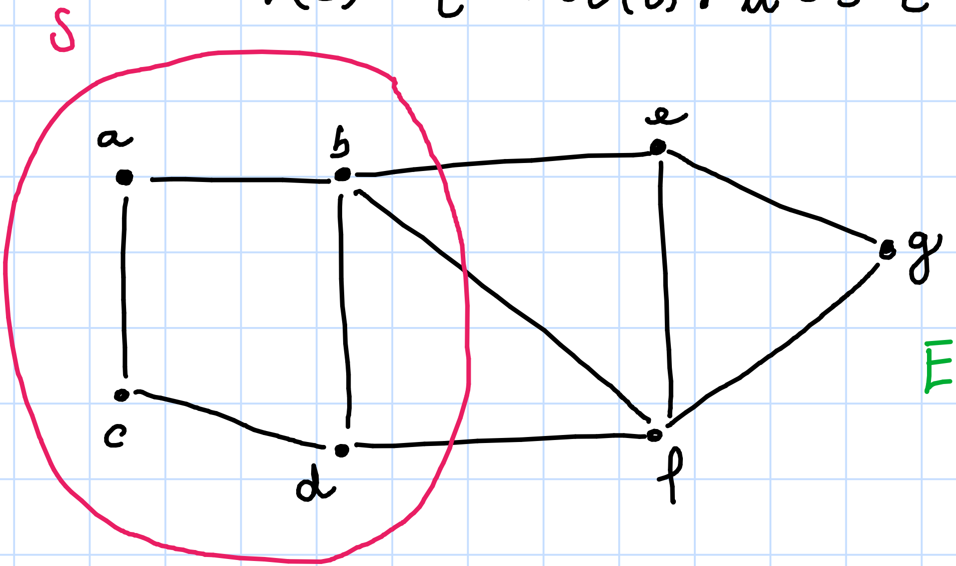
$X = \{b, c\}$, $Y = \{d, f\}$

$E(X, Y) = \{bf, bd, cd\}$

Corte

Dados um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, definimos

$$E(S) = \{uv \in E(G) : u \in S \text{ e } v \in V(G) \setminus S\}$$



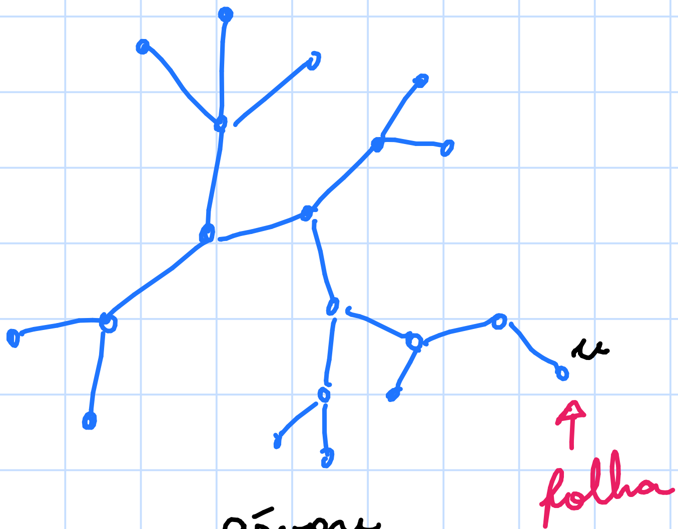
$S = \{a, b, c, d\}$

$E(S) = \{be, bf, df\}$

Dizemos que $E(S)$ é o <u>corte</u> de S

Árvore

dizemos que um grafo é uma <u>árvore</u> se ele não contém ciclos e é conexo.



árvore

- não tem raiz, mas pode ser enraizada

- uma <u>folha</u> é um vértice de grau 1

Teorema Seja G um grafo com n vértices e m arestas. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore

(b) Existe um único caminho entre qualquer par de vértices de G

(c) G é conexo e para toda aresta $e \in E(G)$, o grafo $G-e$ é desconexo (G é conexo minimal)

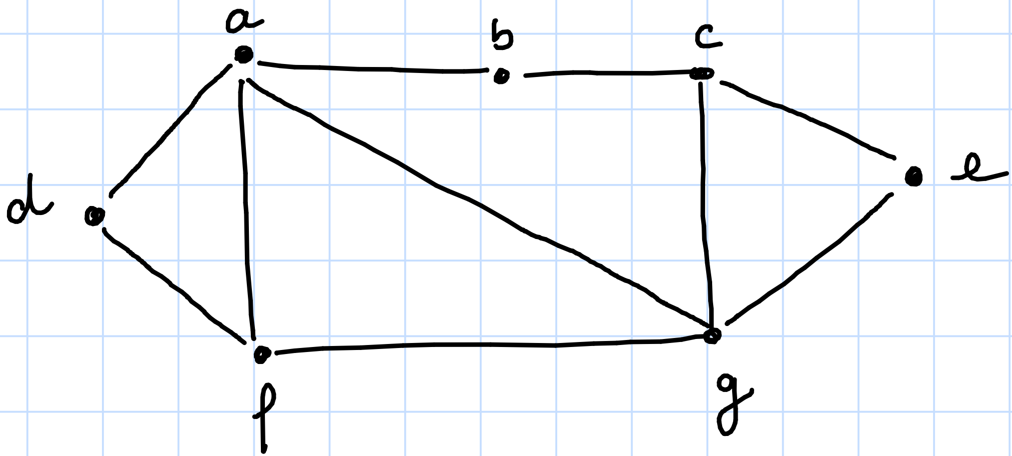
(d) G é conexo e $m = n-1$

(e) G é acíclico e $m = n-1$

(f) G é acíclico e para todo par de vértices $u, v \in V(G)$, o grafo $G + uv$ tem exatamente um ciclo (G é acíclico maximal).

Distância

Dados dois vértices u e v em um grafo G, a **distância entre u e v**, denotado por $\text{dist}_G(u,v)$, é o menor comprimento de um caminho entre u e v.



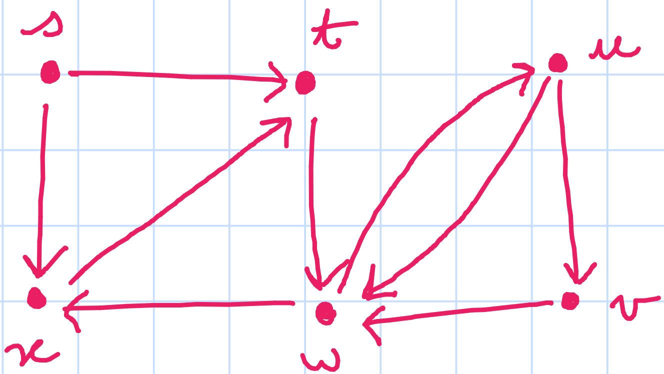
$\text{dist}_G(a,e) = 2$

Grafo Direcionado

Grafo Direcionado

Um grafo direcionado é definido de forma semelhante a um grafo, exceto que as arestas consistem de pares ordenados

- chamamos os grafos direcionados simplesmente de digrafos
- muitas vezes chamamos suas arestas de arcos



DiGrafo

Um <u>digrafo</u> é uma tripla (V, E, φ), onde

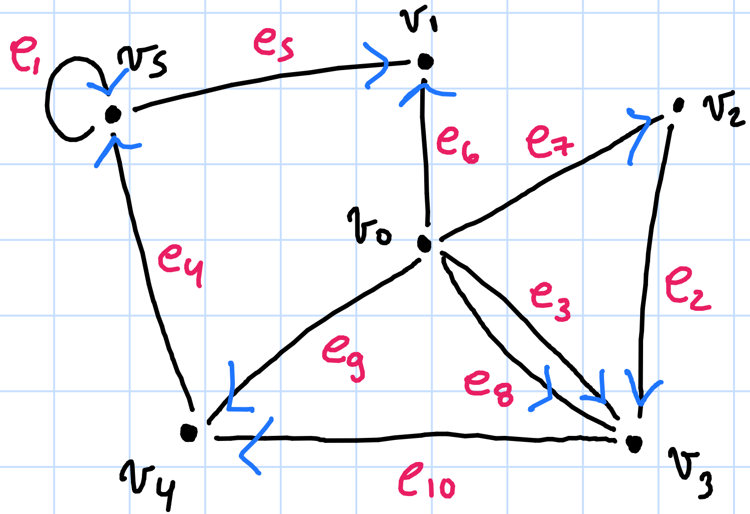
- V é o conjunto finito de elementos chamados <u>vértices</u>

- E é um conjunto finito de elementos chamados <u>arestas</u>

- φ é a <u>função de incidência</u> que associa cada aresta a um par ~~não~~ ordenado de vértices.

Exemplo de Desenho de um DiGrafo

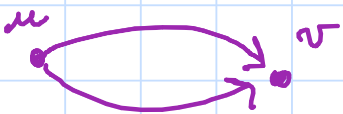
Seja $G = (V, E, \varphi)$ um grafo, onde $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ e
$\varphi(e_1) = (v_5, v_5)$, $\varphi(e_2) = (v_2, v_3)$, $\varphi(e_3) = (v_0, v_3)$, $\varphi(e_4) = (v_4, v_5)$,
$\varphi(e_5) = (v_5, v_1)$, $\varphi(e_6) = (v_0, v_1)$, $\varphi(e_7) = (v_0, v_2)$, $\varphi(e_8) = (v_0, v_3)$,
$\varphi(e_9) = (v_0, v_4)$, $\varphi(e_{10}) = (v_3, v_4)$



Nomenclatura

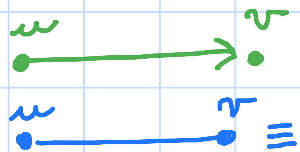
Dado um digrafo $G=(V,E,\varphi)$, definimos

- $V(G)=V$
- $E(G)=E$
- a <u>ordem</u> de G, denotado por $\nu(G)$, é $|V(G)|$
- $e(G)=|E(G)|$
- Duas arestas e, f são <u>paralelas</u> se $\varphi(e)=\varphi(f)$
- Uma aresta e é um laço se $\varphi(e)=\{u,u\}$, para algum $u \in V$
- Denotamos uma aresta (u,v) por uv ~~(ou vu)~~



Paralelas

ñ são paralelas

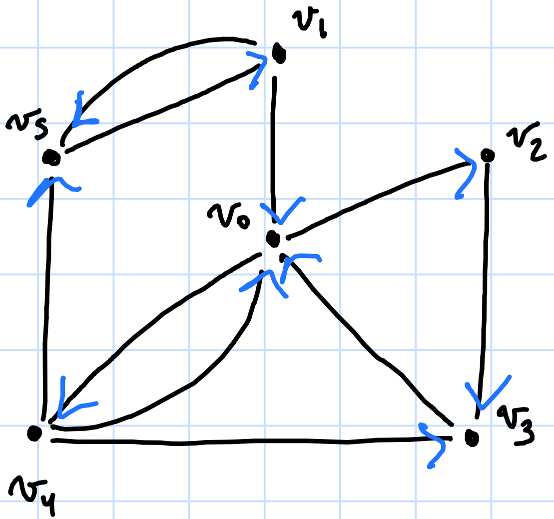


$\equiv uv$

$\equiv uv$ ou vu

DiGrafos Simples

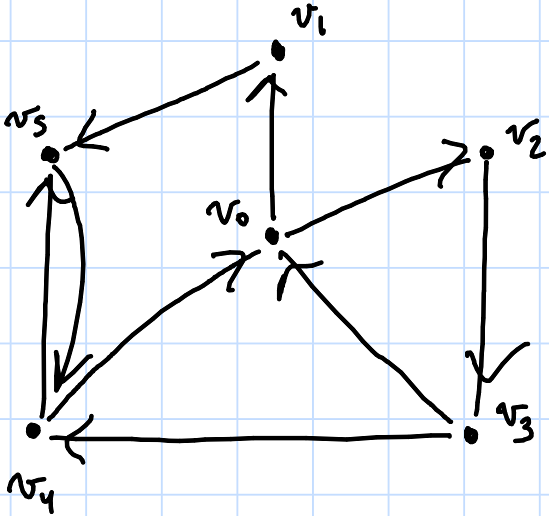
Dizemos que um Digrafo G é simples se G ñ possui arestas paralelas e nem laços.



Em um Digrafo simples podemos determinar φ implicitamente

Podemos definir um digrafo Simples como um par (V, E), onde V é o conjunto finito de elementos chamados vértices e E é um conjunto de pares ~~não~~ ordenados de elementos distintos de V

Exemplo de DiGrafos Simples



$$G = (V, E)$$

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{v_0v_1, v_0v_2, v_3v_0, v_4v_0, v_1v_5, v_5v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$$

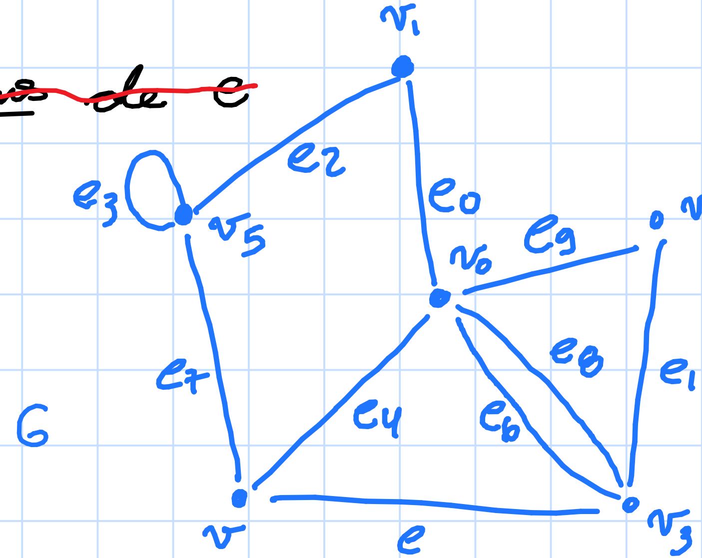
Neste curso vamos trabalhar apenas com digrafos simples

Adjacência e Vizinhança

digrafo

Se $e \in E(G)$ e se $e = uv$, dizemos:

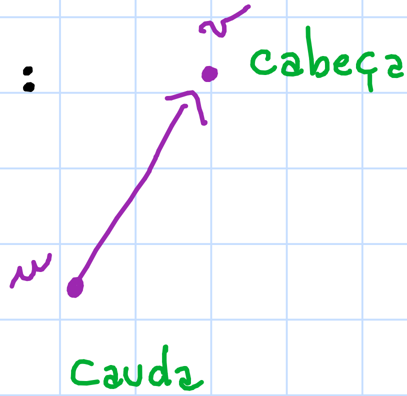
- ~~u e v são vizinhos ou adjacentes~~
- ~~u é adjacente a v (vice-versa)~~
- ~~u é vizinho de v~~
- ~~u e v são extremos de e~~
- ~~e incide em u~~



Adjacência, Vizinhança e grau

Se $e \in E(G)$ e se $e = uv$, dizemos: (dígrafo)

- e sai de u e entra em v
- u é cauda de e
- v é cabeça de e



Temos dois tipos de grau para dígrafos

- grau de saída $d^+(u)$ é o número de arestas que saem de u
- grau de entrada $d^-(u)$ é o número de arestas que entram em u

Teorema Para todo digrafo $G = (V, E)$, temos que

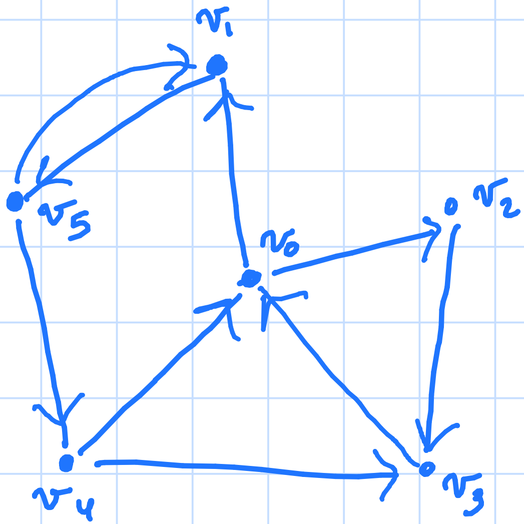
$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$$

Passeio em Digrafo

Um <u>passeio</u> é uma sequência de vértices $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ tal que

(i) $u_i \in V(G)$, para $0 \leq i \leq \ell$

(ii) $u_i u_{i+1} \in E(G)$, para $0 \leq i < \ell$



$P = v_0\, v_2\, v_3\, v_0\, v_1\, v_5\, v_1$

> As definições de trilha caminho, ciclo e subgrafo para digrafos também são idênticas as de grafos

(Di)Grafo Ponderado

Dizemos que um (di)grafo é ponderado se cada aresta e do (di)grafo está associada a um valor real w(e), denominado peso da aresta

- também dizemos que w(e) é o custo da aresta