

# MCTA003-17 - Análise de Algoritmos

## Apresentação

---

Maycon Sambinelli

m.sambinelli@ufabc.edu.br

<https://professor.ufabc.edu.br/~m.sambinelli/>

2022.Q2

Centro de Matemática, Computação e Cognição  
Universidade Federal do ABC



- 1 Bem-vindos
- 2 COVID
- 3 Análise de Algoritmos
- 4 Algoritmo para a Sequência de Fibonacci
- 5 "Algoritmo" para o problema da 3 coloração de grafos
- 6 Sobre o Curso
- 7 Exercícios de Revisão

Bem-vindos

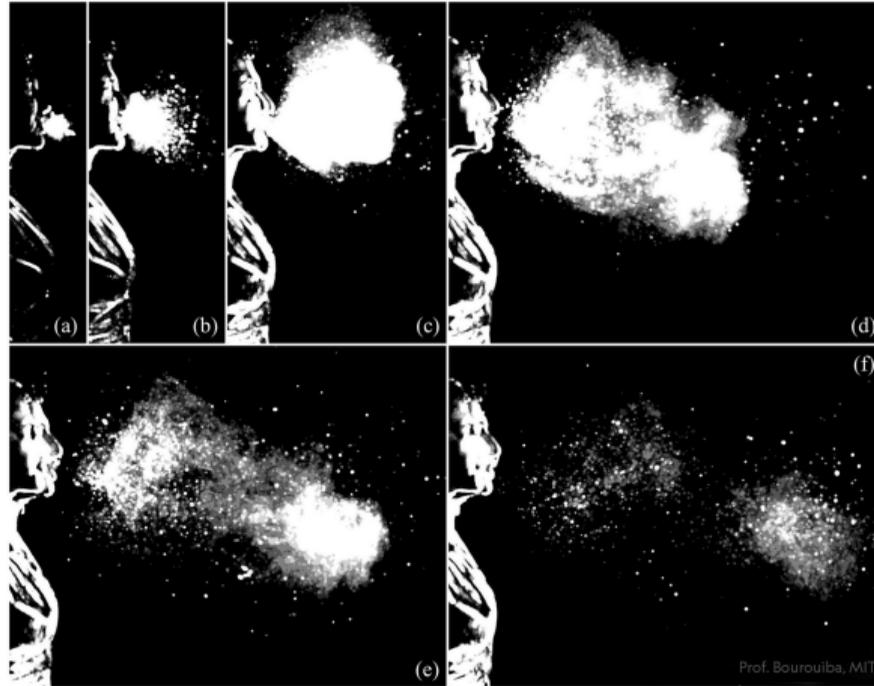
---



COVID

---

- Um espirro pode lançar partículas a uma distância de quase 2m



- Uso de máscara é obrigatório (Prefira PFF2 ou N95)
  - KN95 não é tão segura quanto as anteriores
  - Barba diminui a efetividade da máscara
- Máscara não é *chin diaper*



- Não retire a máscara para espirrar/tossir
- Cubra a boca ao tossir e espirrar



- Tome a vacina de COVID e gripe (e qualquer outra do calendário nacional).
- Se estiver com sintomas gripais, não venha à universidade e faça o teste de COVID.
- Ao ter um ataque de espirros/tosse, retire-se da sala.

**Mesmo que você não tenha medo da COVID, seja gentil e respeite as normas.**

- me notifique por e-mail
- converse com um colega para se inteirar sobre o conteúdo coberto em sala
  - a página da disciplina contém as seções do livro cobertas em cada aula, além de outros materiais de apoio, mas conteúdos adicionais podem ser passados no quadro.
- prova substitutiva:
  - atestado
  - teste positivo
  - qualquer outra condição assegurada pelo regulamento da UFABC, ou
  - converse comigo por e-mail (com antecedência)

- Conteúdo coberto pelo material de apoio; ou
- Professor substituto.

# Análise de Algoritmos

---

*“People who analyze algorithms have double happiness. First of all they experience the sheer beauty of elegant mathematical patterns that surround elegant computational procedures. Then they receive a practical payoff when their theories make it possible to get other jobs done more quickly and more economically.”*  
— Donald E. Knuth

## Definição

Um *algoritmo* é uma sequência finita de passos descritos de forma não ambígua que corretamente resolve um problema.

Um algoritmo:

- recebe um conjunto de dados **válidos** como entrada e devolve um conjunto de dados como saída.
- Para toda entrada possível ele produz uma saída que seja solução do problema para aquela entrada.

Permite:

1. Verificar a correção de um algoritmo;
2. Prever o desempenho do algoritmo
  - 2.1 Comparar algoritmos sem a necessidade de implementá-los e rodar testes de benchmark
3. Mostrar que um problema é tão difícil quanto um outro problema (reduções)

1. Algoritmo para a sequência de Fibonacci
  - Verificar a Correção
  - Prever o desempenho
  - Comparar algoritmos
2. "Algoritmo" para o problema da 3 coloração de grafos
  - Mostrar que um problema é tão difícil quanto outro

# Algoritmo para a Sequência de Fibonacci

---

A *sequência de Fibonacci* é a sequência infinita de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

A *sequência de Fibonacci* é a sequência infinita de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

## Definição

A *sequência de Fibonacci* é a sequência de números  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , onde

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1; \\ 1 & \text{se } n = 2; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

A *sequência de Fibonacci* é a sequência infinita de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

## Definição

A *sequência de Fibonacci* é a sequência de números  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , onde

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1; \\ 1 & \text{se } n = 2; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

## Problema: NÚMERO DE FIBONACCI

**Entrada:** um inteiro  $n \geq 1$

**Saída:**  $F_n$

- 1: **Função**  $\text{FIB1}(n)$
- 2:     **Se**  $n \leq 2$  **então**
- 3:         **Devolve** 1
- 4:     **Devolve**  $\text{FIB1}(n - 1) + \text{FIB1}(n - 2)$

- 1: **Função**  $\text{FIB1}(n)$
- 2:     **Se**  $n \leq 2$  **então**
- 3:         **Devolve** 1
- 4:     **Devolve**  $\text{FIB1}(n - 1) + \text{FIB1}(n - 2)$

## Perguntas:

1. Esse algoritmo resolve o problema?

- 1: **Função**  $\text{FIB1}(n)$
- 2:     **Se**  $n \leq 2$  **então**
- 3:         **Devolve** 1
- 4:     **Devolve**  $\text{FIB1}(n - 1) + \text{FIB1}(n - 2)$

## Perguntas:

1. Esse algoritmo resolve o problema?
2. Quanto tempo ele leva?

- 1: **Função**  $\text{FIB1}(n)$
- 2:     **Se**  $n \leq 2$  **então**
- 3:         **Devolve** 1
- 4:     **Devolve**  $\text{FIB1}(n - 1) + \text{FIB1}(n - 2)$

número de instruções do Algoritmo  $1 \leq 2^{n+1} - n - 2$

```
1 fib:
2     push    rbp
3     mov     rbp, rsp
4     push    rbx
5     sub     rsp, 24
6     mov     DWORD PTR [rbp-20], edi
7     cmp     DWORD PTR [rbp-20], 2
8     jg     .L2
9     mov     eax, 1
10    jmp    .L3
11 .L2:
12    mov     eax, DWORD PTR [rbp-20]
13    sub     eax, 1
14    mov     edi, eax
15    call   fib
16    mov     ebx, eax
17    mov     eax, DWORD PTR [rbp-20]
18    sub     eax, 2
19    mov     edi, eax
20    call   fib
21    add     eax, ebx
22 .L3:
23    mov     rbx, QWORD PTR [rbp-8]
24    leave
25    ret
```

O valor de  $F_{3000}$  tem 627 dígitos, um valor muito alto para ser representado em um inteiro ou double.

$F_{3000} = 410615886307971260333568378719267105220125108637369252408885430926905584$   
2741134037313304916608500445608300368357069422745885693621454765026743730454468  
5216048660629249736050346977345373319688740584725529008204908690751262205905454  
2195889758031109222670849274793859539133318371244795543147611073276240066737934  
0851917318109932017067768389347667647787395021744702686278209185538422258583064  
0830166186290035826685723821023580250435195147299791967652400478423637645334726  
8364152648346245840573214241419937917242918602639810097866942392015404620153818  
6714257398350748513964211399827136406795811784581986586922859680432436567097960  
00

- Nossos números precisam ser representados em uma estrutura de **bigint/arrayNumber**.
  - Esse fato foi levado em conta durante a estimativa do número de instruções.

Nome	<b>AMD Ryzen 9 5900X</b>
Fabricante	AMD
Cores	12
Threads	24
Clock	até 4,8 GHz
Preço do processador	R\$ 2600,00
<b>Instruções por Segundo</b>	$125816 \times 10^6$

Supercomputador mais potente em operação atualmente (Jun 2022)<sup>1</sup>

Nome	Frontier
Fabricante	HPE
Núcleos	8.730.112 (CPU: 591.872, GPU: 8.138.240)
Processador	AMD Optimized 3rd Generation EPYC 64C 2GHz
GPU	AMD Instinct MI250X
Sistema Operacional	Linux (HPE Clay OS)
Localização	Oak Ridge National Laboratory - EUA
Propósito	Pesquisa Científica
Custo	US\$600 milhões
Instruções por Segundo	$10^{18}$

<sup>1</sup><https://www.top500.org/lists/top500/2022/06/>

	$n = 30$	$n = 60$	$n = 80$	$n = 100$
Desktop	17s	$\approx 212$ dias	$\approx 609$ milênios	$\approx 638979729$ milênios
Frontier	$2.19 \times 10^{-6}$	$\approx 2s$	$\approx 27$ dias	$\approx 80$ milênios

	$n = 30$	$n = 60$	$n = 80$	$n = 100$
Desktop	17s	$\approx 212$ dias	$\approx 609$ milênios	$\approx 638979729$ milênios
Frontier	$2.19 \times 10^{-6}$	$\approx 2s$	$\approx 27$ dias	$\approx 80$ milênios

- E agora, José?!

```
1: Função FIB2( $n$ )  
2:    $penultimo = 1$   
3:    $ultimo = 1$   
4:   Para  $i = 3$  até  $n$  faça  
5:      $novo = penultimo + ultimo$   
6:      $penultimo = ultimo$   
7:      $ultimo = novo$   
8:   Devolve  $novo$ 
```

```
1: Função FIB2( $n$ )
2:    $penultimo = 1$ 
3:    $ultimo = 1$ 
4:   Para  $i = 3$  até  $n$  faça
5:      $novo = penultimo + ultimo$ 
6:      $penultimo = ultimo$ 
7:      $ultimo = novo$ 
8:   Devolve  $novo$ 
```

## Perguntas:

1. Esse algoritmo resolve o problema?

```
1: Função FIB2( $n$ )
2:    $penultimo = 1$ 
3:    $ultimo = 1$ 
4:   Para  $i = 3$  até  $n$  faça
5:      $novo = penultimo + ultimo$ 
6:      $penultimo = ultimo$ 
7:      $ultimo = novo$ 
8:   Devolve  $novo$ 
```

## Perguntas:

1. Esse algoritmo resolve o problema?
2. Quanto tempo ele leva?

número de instruções do Algoritmo  $2 \leq n^2 + 5n + 3$

	$n \leq 10^5$	$n = 10^8$	$n = 10^{10}$
Desktop	$< 0,08s$	$\approx 22$ horas	$\approx 25$ anos
Frontier	$< 10^{-0,8}s$	$\approx 0,01s$	$\approx 3,17$ séculos

número de instruções do Algoritmo  $2 \leq n^2 + 5n + 3$

	$n \leq 10^5$	$n = 10^8$	$n = 10^{10}$
Desktop	$< 0,08s$	$\approx 22$ horas	$\approx 25$ anos
Frontier	$< 10^{-0,8}s$	$\approx 0,01s$	$\approx 3,17$ séculos

Podemos fazer melhor!

1: Função  $\text{FIB3}(n)$

2: Devolve  $\left[ \frac{\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}} \right]$

### Perguntas:

1. Esse algoritmo resolve o problema?

1: **Função**  $\text{FIB3}(n)$

2: **Devolve**  $\left\lfloor \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor$

### Perguntas:

1. Esse algoritmo resolve o problema?
2. Quanto tempo ele leva?

número de instruções do Algoritmo 3  $\leq 3 + \ln(n) + n^{1,5} + n$

	$n \leq 10^5$	$n = 10^8$	$n = 10^{10}$
Desktop	$< 0,00025s$	$\approx 8s$	$\approx 2,2$ horas
Frontier	$< 3 \times 10^{-11}s$	$\approx 1 \times 10^{-6}s$	$\approx 0,001s$

Qual algoritmo implementar?

- Algoritmo 1
- Algoritmo 2
- Algoritmo 3

- Não falamos de número de instrução, falamos em passos *simples* em uma máquina abstrata.
- Seja  $T_i(n)$  o tempo de execução (número de passos) do Algoritmo  $i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , para uma entrada de tamanho  $n$ .

$$T_1(n) = 2^{n+1} - n - 2 = \mathcal{O}(2^n)$$

$$T_2(n) = n^2 + 5n + 3 = \mathcal{O}(n^2)$$

$$T_3(n) = n^{1,5} + n + \lg(n) + 3 = \mathcal{O}(n^{1,5})$$

- Não falamos de número de instrução, falamos em passos *simples* em uma máquina abstrata.
- Seja  $T_i(n)$  o tempo de execução (número de passos) do Algoritmo  $i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , para uma entrada de tamanho  $n$ .

$$T_1(n) = 2^{n+1} - n - 2 = \mathcal{O}(2^n)$$

$$T_2(n) = n^2 + 5n + 3 = \mathcal{O}(n^2)$$

$$T_3(n) = n^{1,5} + n + \lg(n) + 3 = \mathcal{O}(n^{1,5})$$

$$n^{1,5} \ll n^2 \ll 2^n$$

## "Algoritmo" para o problema da 3 coloração de grafos

---

Literal	uma variável booleana ou sua negação	$x_i$ ou $\bar{x}_i$
Clausula	a disjunção de 3 literais distintos	$C_j = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$
Forma Normal Conjuntiva	uma fórmula $\Phi$ que é a conjunção de clausulas	$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$

<b>Literal</b>	uma variável booleana ou sua negação	$x_i$ ou $\bar{x}_i$
<b>Clausula</b>	a disjunção de 3 literais distintos	$C_j = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$
<b>Forma Normal Conjuntiva</b>	uma fórmula $\Phi$ que é a conjunção de clausulas	$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$

## Problema: 3-SATISFATIBILIDADE BOOLIANA (3-SAT)

**Entrada:** uma fórmula  $\Phi$  consistindo de  $k$  clausulas sobre  $n$  variáveis

**Saída:** **Verdadeiro**, se existe uma atribuição de valores as variáveis de  $\Phi$  tal que o valor de  $\Phi$  seja verdadeiro; **Falso**, caso contrário.

<b>Literal</b>	uma variável booleana ou sua negação	$x_i$ ou $\bar{x}_i$
<b>Clausula</b>	a disjunção de 3 literais distintos	$C_j = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$
<b>Forma Normal Conjuntiva</b>	uma fórmula $\Phi$ que é a conjunção de clausulas	$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$

## Problema: 3-SATISFATIBILIDADE BOOLIANA (3-SAT)

**Entrada:** uma fórmula  $\Phi$  consistindo de  $k$  clausulas sobre  $n$  variáveis

**Saída:** **Verdadeiro**, se existe uma atribuição de valores as variáveis de  $\Phi$  tal que o valor de  $\Phi$  seja verdadeiro; **Falso**, caso contrário.

$$\Phi = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$$

<b>Literal</b>	uma variável booleana ou sua negação	$x_i$ ou $\bar{x}_i$
<b>Clausula</b>	a disjunção de 3 literais distintos	$C_j = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$
<b>Forma Normal Conjuntiva</b>	uma fórmula $\Phi$ que é a conjunção de clausulas	$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$

## Problema: 3-SATISFATIBILIDADE BOOLIANA (3-SAT)

**Entrada:** uma fórmula  $\Phi$  consistindo de  $k$  clausulas sobre  $n$  variáveis

**Saída:** **Verdadeiro**, se existe uma atribuição de valores as variáveis de  $\Phi$  tal que o valor de  $\Phi$  seja verdadeiro; **Falso**, caso contrário.

$$\Phi = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)$$

Solução:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
V	V	F	T

## Problema: 3-COLORAÇÃO DE GRAFOS (3-COLORAÇÃO)

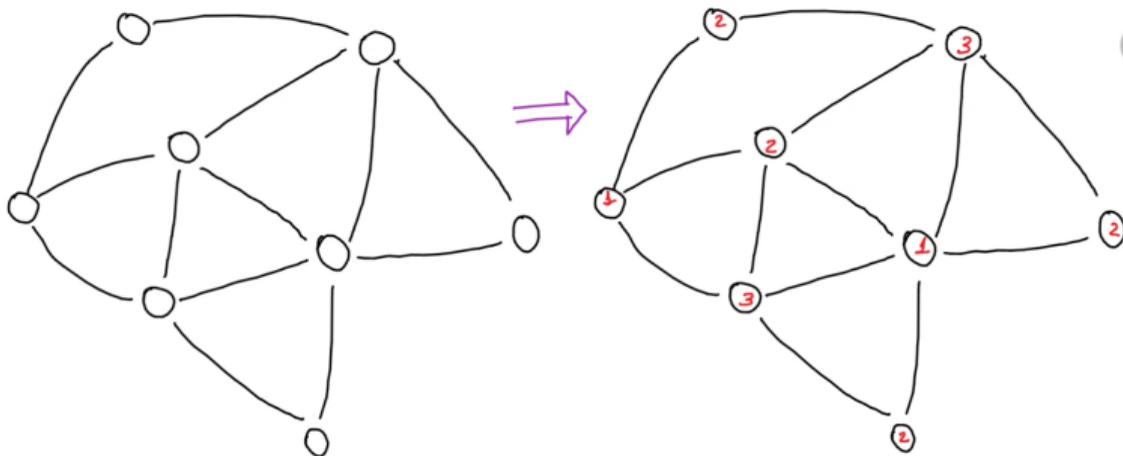
**Entrada:** uma grafo  $G$

**Saída:** **Verdadeiro**, se existe uma coloração  $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  tal que se  $uv \in E(G)$ , então  $c(u) \neq c(v)$ ; e **Falso**, caso contrário.

## Problema: 3-COLORAÇÃO DE GRAFOS (3-COLORAÇÃO)

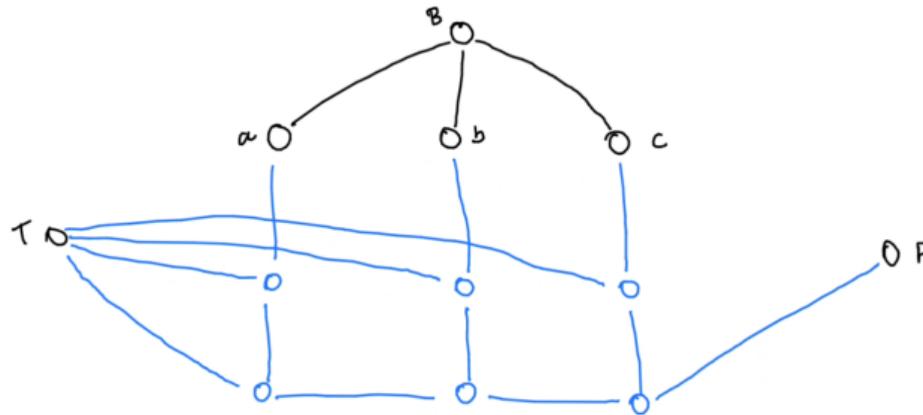
**Entrada:** uma grafo  $G$

**Saída:** **Verdadeiro**, se existe uma coloração  $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  tal que se  $uv \in E(G)$ , então  $c(u) \neq c(v)$ ; e **Falso**, caso contrário.

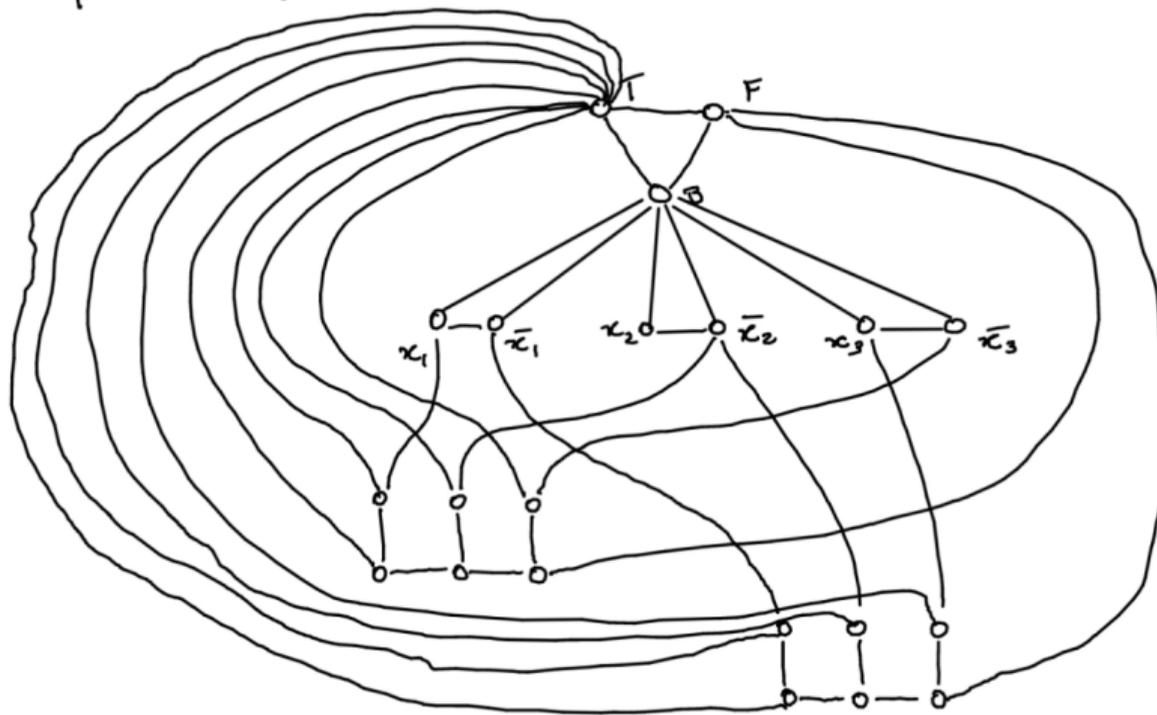


Dada uma fórmula  $\Phi$ , vamos construir o grafo  $G(\Phi)$

1. Crie os vértices  $v_i$  e  $\bar{v}_i$  para cada variável  $v_i$  de  $\Phi$
2. Crie três vértices adicionais chamados  $T$ ,  $F$ ,  $B$ , coloque todas as arestas entre esses três vértices, e ligue todos os vértices representando literais ao vértices  $B$ .
3. Conecte cada vértice literal ao vértice que representa a sua negação.
4. Para cada clausula  $(a \vee b \vee c)$ , conecte o seguinte *gadget* de 6 vértices e 13 arestas



$$\Phi = (\kappa_1 \vee \bar{\kappa}_2 \vee \bar{\kappa}_3) \wedge (\bar{\kappa}_1 \vee \bar{\kappa}_2 \vee \kappa_3)$$



- $\Phi$  é satisfazível se e somente se  $G(\Phi)$  é 3-colorível

Se tivermos um algoritmo eficiente para o problema da 3-coloração, então temos um algoritmo eficiente para o 3-SAT

## Algoritmo para 3-SAT( $\Phi$ )

1. Construa  $G(\Phi)$
2. Rode o algoritmo eficiente para o problema da 3-coloração sobre  $G(\Phi)$
3. Retorne o mesmo valor lógico do resultado do passo anterior

- $\Phi$  é satisfazível se e somente se  $G(\Phi)$  é 3-colorível
  - precisamos demonstrar!

Se tivermos um algoritmo eficiente para o problema da 3-coloração, então temos um algoritmo eficiente para o 3-SAT

## Algoritmo para 3-SAT( $\Phi$ )

1. Construa  $G(\Phi)$
2. Rode o algoritmo eficiente para o problema da 3-coloração sobre  $G(\Phi)$
3. Retorne o mesmo valor lógico do resultado do passo anterior

- $\Phi$  é satisfazível se e somente se  $G(\Phi)$  é 3-colorível
  - precisamos demonstrar!
- $G(\Phi)$  pode ser construído de forma eficiente

Se tivermos um algoritmo eficiente para o problema da 3-coloração, então temos um algoritmo eficiente para o 3-SAT

## Algoritmo para 3-SAT( $\Phi$ )

1. Construa  $G(\Phi)$
2. Rode o algoritmo eficiente para o problema da 3-coloração sobre  $G(\Phi)$
3. Retorne o mesmo valor lógico do resultado do passo anterior

- $\Phi$  é satisfazível se e somente se  $G(\Phi)$  é 3-colorível
  - precisamos demonstrar!
- $G(\Phi)$  pode ser construído de forma eficiente
  - precisamos analisar!

Se tivermos um algoritmo eficiente para o problema da 3-coloração, então temos um algoritmo eficiente para o 3-SAT

## Algoritmo para 3-SAT( $\Phi$ )

1. Construa  $G(\Phi)$
2. Rode o algoritmo eficiente para o problema da 3-coloração sobre  $G(\Phi)$
3. Retorne o mesmo valor lógico do resultado do passo anterior

- Vamos aprender a dizer que um problema A é tão difícil quanto um B

- Vamos aprender a dizer que um problema A é tão difícil quanto um B
  - redução

- Vamos aprender a dizer que um problema A é tão difícil quanto um B
  - redução
- Vamos aprender a classificar problemas:

- Vamos aprender a dizer que um problema A é tão difícil quanto um B
  - redução
- Vamos aprender a classificar problemas:
  - P, NP, NP-difícil, NP-completo

## Sobre o Curso

---



- Avisos importantes
- Objetivos
- Ementa da disciplina
- Recomendações
- Bibliografia e outros materiais
- Critérios de avaliação regular
- Mecanismo de recuperação
- Plágio
- Dias, horários e locais das aulas
- Dados importantes
- Atendimento
- Notas
- Aúdos

## MCTA003-17 - Análise de Algoritmos

Segundo Quadrimestre de 2022

Turma(s) Noturno  
 Professor: Márcio Sambinelli  
 E-mail: m.sambinelli@ufabc.edu.br  
 Cotas de Sugestões

### Avisos importantes

- 20/05 - Página no ar.

### Objetivos

- Apresentar noções e conceitos de complexidade de computação;
- Apresentar métodos e conceitos que permitam ao aluno, de maneira confiável, avaliar a qualidade de um algoritmo. A existência destes métodos e conceitos estará focalizada no cálculo de complexidade e prova de correção de algoritmos;
- Caracterizar técnicas gerais de desenvolvimento de algoritmos que permitam ao aluno melhor projetá-los conforme suas necessidades. As técnicas gerais ensinadas a serem estudadas são Divisão e Conquista, Método Guloso e Programação Dinâmica;
- Apresentar noções básicas de Classes de Complexidade, em particular as classes P, NP e NP-Completo.

### Ementa da disciplina

Conceitos básicos: recorrências, medidas de complexidade: melhor caso, caso médio e pior caso. Técnicas gerais de projeto de algoritmos: divisão e conquista, método guloso e programação dinâmica. Classes de complexidade: P, NP e NP-completude.

### Recomendações

Disciplinas: Matemática Discreta, Algoritmos e Estruturas de Dados I



## Diurno:

<http://professor.ufabc.edu.br/~m.sambinelli/courses/2022Q2-AA-D/index.html>

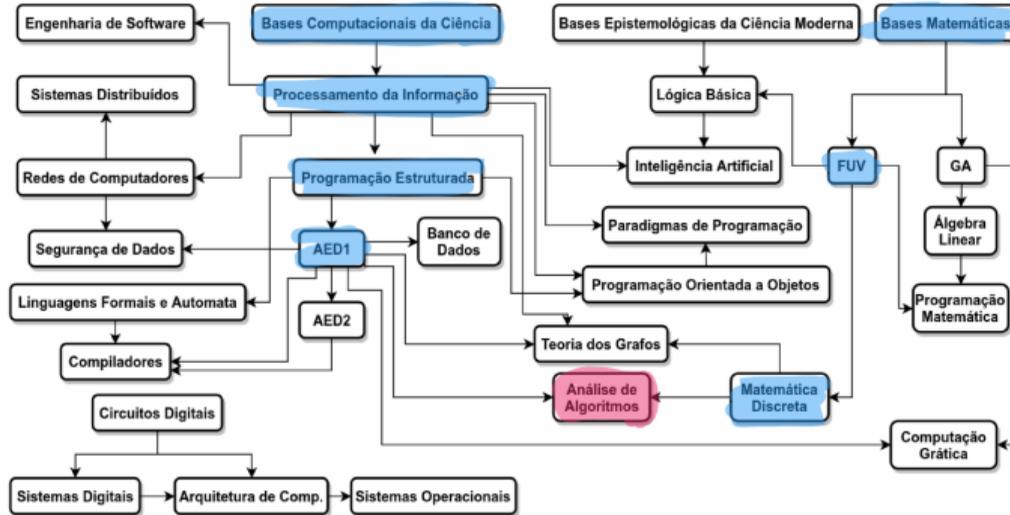
## Noturno:

<http://professor.ufabc.edu.br/~m.sambinelli/courses/2022Q2-AA-N/index.html>

1. Técnicas de solução de problemas
  - divisão e conquista
  - gulosos
  - programação dinâmica
2. Provas de correção de algoritmos
  - demonstração (prova por indução, contradição e etc)
3. Análise do tempo de execução de um algoritmo
  - Vocabulário e técnicas de análise de algoritmos
  - Notação assintótica
  - Método da iteração, substituição, árvore de recorrência e Teorema Mestre
4. Complexidade
  - Redução entre problemas
  - Problemas P, NP, NP-difíceis e NP-completos

## Disciplinas: Matemática Discreta, Algoritmos e Estruturas de Dados I

ANEXO G: FLUXOGRAMA DAS RECOMENDAÇÕES ENTRE DISCIPLINAS OBRIGATÓRIAS DO BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO



Para facilitar o acompanhamento do curso, é recomendado que você já possua:

- Conhecimentos de programação, com boas noções de algoritmos
- Familiaridade com estruturas de dados básicas (vetores, listas, pilhas, filas e árvores)
- Capacidade para reconhecer argumentos lógicos em uma prova matemática (**indução**)
- Familiaridade com álgebra matemática (conjuntos, somatórios, leis dos logaritmos e exponenciação)

## Diurno:

Segundas-feiras: 10h - 12h (sala S-207-0);

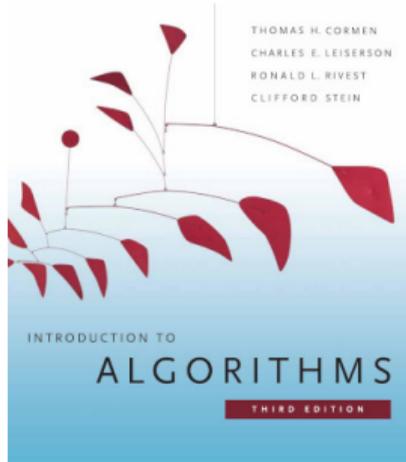
Quartas-feiras: 8h - 10h (sala S-205-0).

## Noturno:

Segundas-feiras: 21h - 23h (sala S-204-0);

Quartas-feiras: 19h - 21h (sala S-204-0);

- dois monitores
- horário a definir



A média final antes da REC (**MF**) será calculada da seguinte forma:

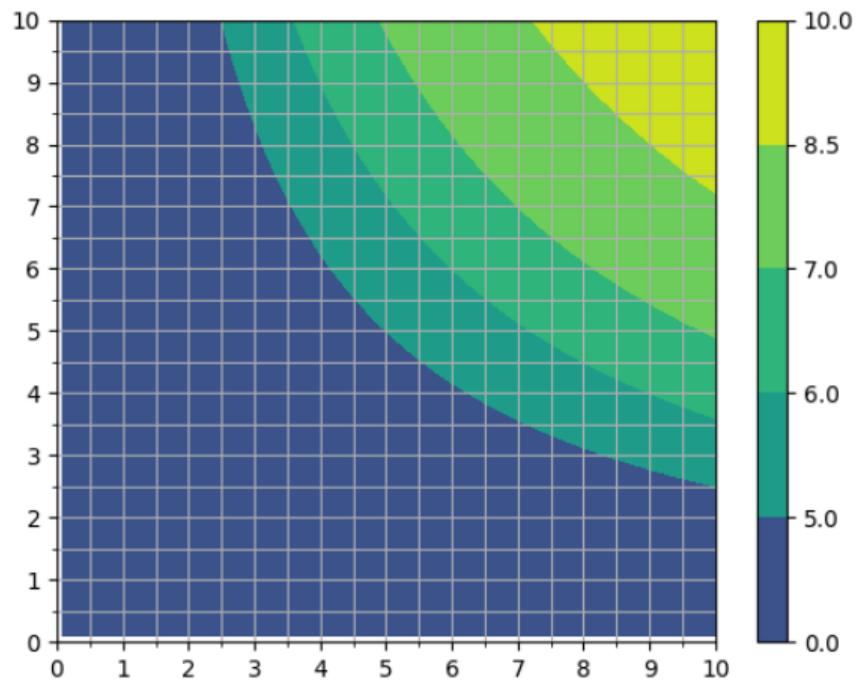
$$MF = \sqrt{P1 \times P2},$$

onde:

- $P1$  e  $P2$  são avaliações.

O seu conceito final antes da REC (**CF**) será:

$$CF = \begin{cases} \text{A,} & \text{se } MF \in [8.5; 10.0] \\ \text{B,} & \text{se } MF \in [7.0; 8.5) \\ \text{C,} & \text{se } MF \in [6.0; 7.0) \\ \text{D,} & \text{se } MF \in [5.0; 6.0) \\ \text{F,} & \text{caso contrário} \end{cases}$$



- Requisito: conceito final **D** ou **F**.
- Escopo: todos os temas vistos durante o quadrimestre.

A nota obtida na avaliação de recuperação (**NR**) será usada para obter a nota final com recuperação (**NFR**), que consiste na média:

$$NFR = \frac{MF + NR}{2}$$

O conceito final com recuperação (**CFR**) será calculado da seguinte maneira:

$$CFR = \begin{cases} C, & \text{se } CF = D \text{ e } NFR \geq 6; \\ D, & \text{se } CF = D \text{ e } NFR < 6; \\ D, & \text{se } CF = F \text{ e } NFR \geq 5; \\ F, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

## Avaliações:

- Avaliação 1: 03/07 (Qua)
- Avaliação 2: 24/08 (Qua)

## Recuperação:

- 24/09 (Sáb) às 10h:00 (sala a definir)

- Extremamente importante



- Extremamente importante



- Simulado da prova
- Podem ser entregues no dia das avaliações
  - Não valem nota, mas valem moral

## Exercícios de Revisão

---

Prove que se  $a < b$  e  $c < d$ , então  $c - b < d - a$ .

Avalie sem calculadora:  $\log_4 \frac{u^2}{\sqrt{v}}$ , sabendo que  $\log_4 u = 3,2$  e  $\log_4 v = 1,3$

Avalie a expressão

$$\sum_{j=0}^{\log_{4/3} n - 1} 2^j \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^j n}$$

Prove que a soma dos  $n$  primeiros cubos perfeitos é  $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  para todo  $n \geq 1$ .

Seja  $S$  um vetor. O que o algoritmo a seguir faz?

- 1: **Função**  $\text{CATIORO}(S, i, j)$
- 2:     **Se**  $i \geq j$  **então**
- 3:         **Devolve sim**
- 4:     **Se**  $S[i] == S[j]$  **então**
- 5:         **Devolve**  $\text{CATIORO}(S, i + 1, j - 1)$
- 6:     **Devolve não**