

Análise de Tempo de Execução: Algoritmos Iterativos

1. Para cada um dos Algoritmos a seguir, forneça duas expressões, em notação assintótica, de descrição de tempo de execução, sendo uma para o melhor caso e outra para o pior caso. Nos dois primeiros algoritmos, ambos os valores n e m descrevem o tamanho da entrada, por isso suas expressões devem ser uma função sobre ambos. Use a notação Θ sempre que possível. Justifique sua resposta.

Algorithm 1 Busca em dois vetores.

```
1: Função BUSCAVETORES( $A, n, B, m, k$ )
2:   Para  $i = 1$  até  $n$  faça
3:     Se  $A[i] == k$  então
4:       Devolve verdadeiro
5:   Para  $i = 1$  até  $m$  faça
6:     Se  $B[i] == k$  então
7:       Devolve verdadeiro
8:   Devolve falso
```

Algorithm 2 Busca por elemento em comum.

```
1: Função BUSCAINTERSECAO( $A, n, B, m$ )
2:   Para  $i = 1$  até  $n$  faça
3:     Para  $j = 1$  até  $m$  faça
4:       Se  $A[i] == B[j]$  então
5:         Devolve verdadeiro
6:   Devolve falso
```

Algorithm 3 BubbleSort

```
1: Função BUBBLESORT( $A, n$ )
2:   Para  $i = n$  até 2, decrementando faça
3:     Para  $j = 1$  até  $i - 1$ , incrementando faça
4:       Se  $A[j] > A[j + 1]$  então
5:         troque  $A[j]$  com  $A[j + 1]$ 
```

Algorithm 4 Abacate

```
1: Função ABACATE( $A, B, n$ )
2:    $k \leftarrow 0$ 
3:    $i \leftarrow 1$ 
4:   Enquanto  $i \leq n$  faça
5:      $k \leftarrow k + 1$ 
6:      $j \leftarrow i + 1$ 
7:     Enquanto  $j \leq n$  e  $A[j] < B[i]$  faça
8:        $j \leftarrow j + 1$ 
9:      $i \leftarrow j$ 
10:  Devolve  $k$ 
```

Algorithm 5 Busca por elementos duplicados no mesmo vetor.

```
1: Função BUSCADUPLICADOS( $A, n$ )
2:   Para  $i = 1$  até  $n$  faça
3:     Para  $j = i + 1$  até  $n$  faça
4:       Se  $A[i] == A[j]$  então
5:         Devolve verdadeiro
6:   Devolve falso
```

2. Use a notação O para fornecer um limitante superior justo para as seguintes funções de uma biblioteca de manipulação de lista duplamente encadeada. Você pode assumir que existem n elementos na lista.

Algorithm 6 Busca de um elemento em uma lista encadeada.

```
1: Função LIST-SEARCH( $L, k$ )
2:    $x \leftarrow L.head$ 
3:   Enquanto  $x \neq NIL$  and  $x.key \neq k$  faça
4:      $x \leftarrow x.next$ 
5:   Devolve  $x$ 
```

Algorithm 7 Insere um elemento na lista

```
1: Função LIST-INSERT( $L, k$ )
2:    $x.key = k$ 
3:   Se  $L.head == NIL$  então
4:      $x.next \leftarrow x$ 
5:      $x.prev \leftarrow x$ 
6:   Senão
7:      $x.next \leftarrow L.head$ 
8:      $x.prev \leftarrow L.head.prev$ 
9:      $L.head.prev.next \leftarrow x$ 
10:     $L.head.prev \leftarrow x$ 
11:     $L.head \leftarrow x$ 
```

Algorithm 8 Remove um elemento da lista

```
1: Função LIST-REMOVE( $L, k$ )
2:    $x \leftarrow$  List-Search( $L, k$ )
3:   Se  $x == NIL$  então Devolve False
4:    $x.prev.next \leftarrow x.next$ 
5:    $x.next.prev \leftarrow x.prev$ 
6:   Se  $L.head == x$  então
7:     Se  $x.prev \neq x.next$  então
8:        $L.head \leftarrow x.prev$ 
9:     Senão
10:       $L.head \leftarrow NIL$ 
11:   Devolve True
```

3. Forneça um limitante superior justo, usando notação assintótica, para os seguintes algoritmos

```
(a) int isPrime (int n) {
    for (int i = 2; i * i <= n; i++)
        if (0 == n % i)
            return 0;
    return 1;
}
```

```
(b) int PowersOfTwo(int n) {
    int i;
    i = 0;
    while (n%2 == 0) {
        n = n/2;
        i++;
    }
    return i;
}
```

```
(c) for (i = 0; i < n-1; i++) {
    small = i;
    for (j = i+1; j < n; j++)
        if (A[j] < A[small])
            small = j;
    temp = A[small];
    A[small] = A[i];
    A[i] = temp;
}
```

```
(d) int gcd(int a, int b) {
    while (a != b) {
        if (a >= b)
            a = a - b;
        else
```

```

        b = b - a;
    }
    return a;
}

```

```

(e) int gcd(int a, int b) {
    while (b != 0) {
        int t = b;
        b = a % b;
        a = t;
    }
    return a;
}

```

4. Nesse exercício, um número inteiro x com n dígitos será representado em um vetor com n posições, uma para cada dígito, de forma invertida. Assim, por exemplo, o número 38549 é representado pelo vetor $A = (9, 4, 5, 8, 3)$.

Considere o problema de adicionar dois inteiros de n dígitos cada que estão representados em dois vetores A e B , de tamanho, portanto, n . A soma dos dois inteiros deve ser representada em um vetor C de tamanho $n + 1$.

Escreva um algoritmo que resolva esse problema e escreva uma expressão para seu tempo de execução no pior e no melhor caso, usando notação assintótica.

5. Seja $A[1..n]$ um vetor ordenado com elementos distintos. Mostre um algoritmo que decide se existe índice i , com $1 \leq i \leq n$, tal que $A[i] = i$ em tempo $O(\log n)$.

6. Sejam $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ dois vetores, cada um contendo n números ordenados. Dê um algoritmo $O(\log n)$ para encontrar a mediana de todos os $2n$ elementos dos vetores X e Y .

7. Escreva um algoritmo que rearranje um vetor $A[ini..fim]$ de inteiros de modo que tenhamos $A[ini..j - 1] \leq 0$ e $A[j..fim] > 0$ para algum j em $ini..fim + 1$. Faz sentido exigir que j esteja em $ini..fim$? Procure fazer um algoritmo rápido que não use vetor auxiliar.

8. Neste problema, considere que fotos e imagens são representadas por matrizes binárias (matrizes que contêm apenas 0's e 1's). Dada a imagem de um elemento X que está sendo procurado, que é uma matriz binária de tamanho $p \times q$, deseja-se procurá-la em uma foto F de tamanho $m \times n$. Cada posição de uma matriz é também chamada de pixel.

- Escreva em pseudocódigo uma função de nome PROCURA-SE, especificada de forma a receber parâmetros X , p , q , F , m e n como descritos acima. A função deve devolver Verdadeiro se existir uma submatriz de F delimitada por p linhas consecutivas e q colunas consecutivas que seja idêntica à matriz X , e Falso caso contrário.
- Em função dos parâmetros fornecidos à função PROCURA-SE, calcule o número de comparações de pixels feitas, no pior caso.
- Suponha que haja $N = 10$ milhões de fotos em um certo banco de dados. Adote os valores $p = q = 100$, $m = n = 1000$, e suponha que cada comparação de pixels (elementos das matrizes) gasta ao menos 10^{-13} dias (8.64 nanosegundos). Calcule, em dias, o tempo que um programa que chame a sua função PROCURA-SE N vezes levará, no pior caso, para executar todas as comparações de pixels necessárias na procura de uma imagem X nas N fotos desse banco de dados.

9. Dado um vetor A com n elementos ordenados de forma crescente e um valor k , escreva um algoritmo que encontre a quantidade de ocorrências de k em A em tempo $O(\log n)$. Por exemplo, se $A = (50, 50, 68, 68, 68, 68, 76, 79, 90)$ e $k = 68$, o algoritmo deve devolver 4. Você pode considerar que k ocorre em A ao menos uma vez.