

Notação Assintótica

# Notação Assintótica

Notação Assintótica é uma abstração que nos permite focar no que ocorre com uma função  $f(n)$  quando os valores de  $n$  crescem indefinidamente.

## Regra geral

→ termos de menor ordem  $\bar{n}$  importam

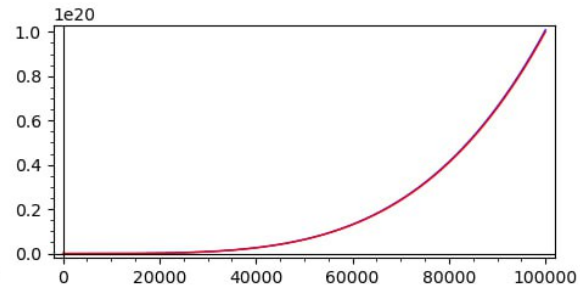
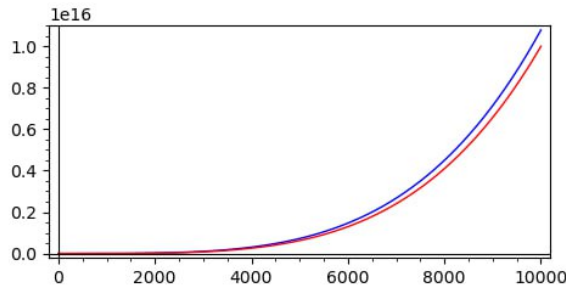
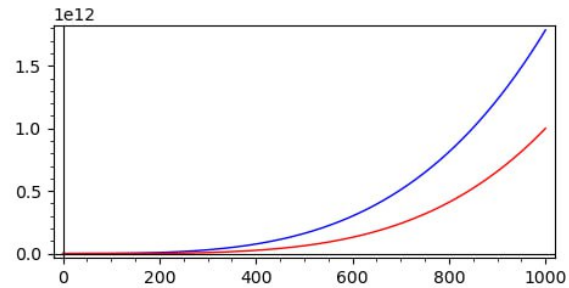
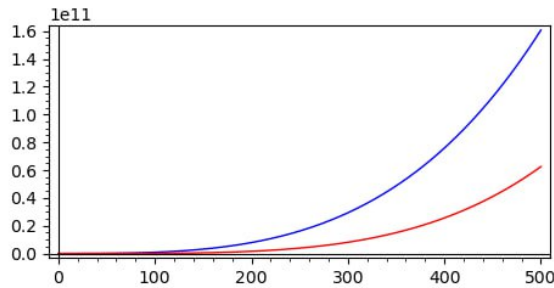
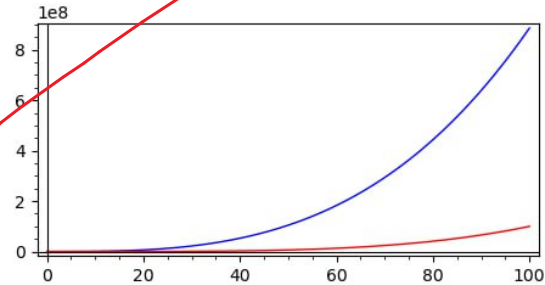
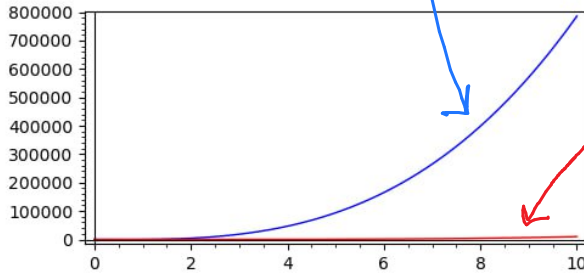
→ constantes  $\bar{n}$  importam

$$f(n) = n^4 + 786n^3 + 2n^2 - 999n + 12$$

$$f(n) \approx n^4$$

$$f(m) = m^4 + 786m^3 + 2m^2 - 999m + 12$$

$$g(m) = m^4$$



# Uma abordagem analítica

$$f(n) = n^4 + 786n^3 + 2n^2 - 999n + 12$$

$$= n^4 \left( 1 + \frac{786}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{999}{n^3} + \frac{12}{n^4} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{786}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{999}{n^3} + \frac{12}{n^4} \right) = 1$$

Onde  $n \rightarrow \infty$ ,  $f(n) \approx n^4$ .

## Outro Exemplo

$$\left. \begin{array}{l} f(m) = 475m + 34 \quad (\approx m) \\ g(m) = m^2 + 3 \quad (\approx m^2) \end{array} \right\} \text{qual função cresce mais rápido?}$$

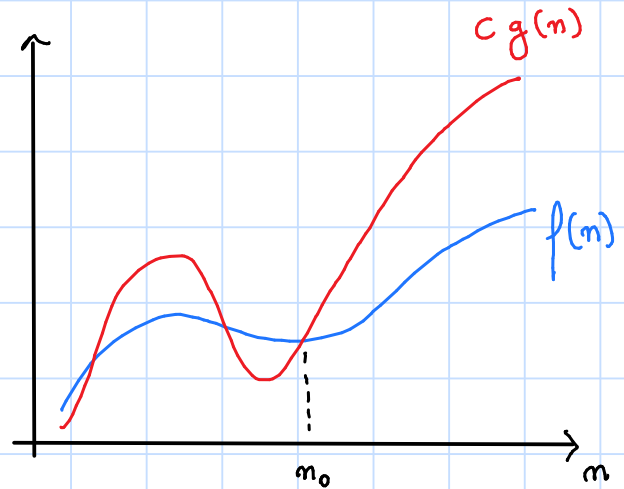
$$475m + 34 \leq m^2 + 3$$

$$0 \leq m^2 - 475m - 31$$

$m \geq 476$  temos que a  
inequação vale

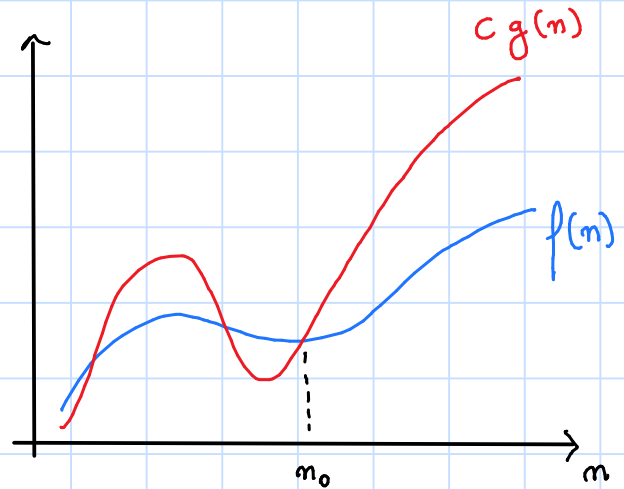
# Notação $O$ - "Oh zão"

**Def.** Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que  $f(n) \in O(g(n))$  se existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que  $f(n) \leq Cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .



# Notação $O$ - "Oh zão"

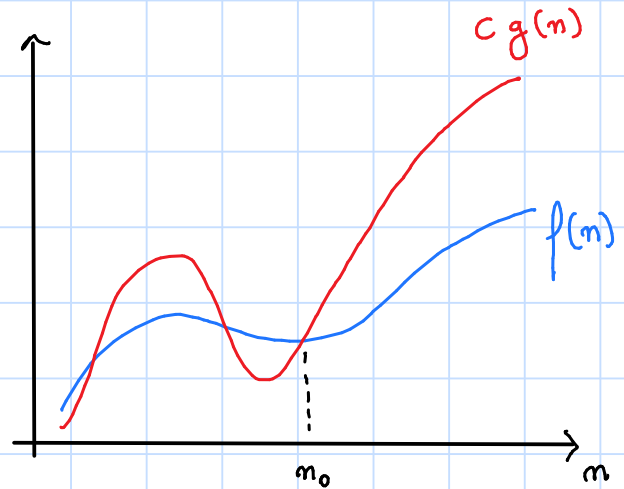
**Def.** Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que  $f(n) \in O(g(n))$  se existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que  $f(n) \leq Cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .



Significado: para valores de  $n$  "suficientemente grandes", a função  $f(n)$  é dominada por uma "versão escalada" de  $g(n)$ .

# Notação $O$ - "Oh zão"

**Def.** Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que  $f(n) \in O(g(n))$  se existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que  $f(n) \leq Cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .

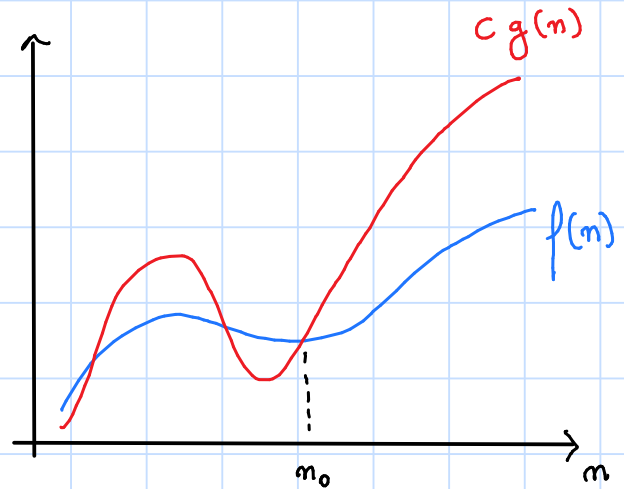


Significado: Uma versão escalada de  $g(n)$  é um limitante superior para  $f(n)$  para valores suficientemente grandes.



# Notação $O$ - "Oh zão"

**Def.** Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que  $f(n) \in O(g(n))$  se existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que  $f(n) \leq Cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .



- Note que  $O(g(n))$  é uma classe de funções, um conjunto, e  $f(n) \in O(g(n))$

# Nomenclatura e Abuso de Notação

A seguintes notações são equivalentes:

-  $f(n) \in O(g(n))$

-  $f(n)$  é  $O(g(n))$

-  $f(n) = O(g(n))$

↳ Esse abuso de notação é extremamente comum. Entretanto é importante manter em mente que  $O(g(n))$  representa um conjunto de funções.

## Exemplo - Método: Isolando a Constante

Ex: Prove que  $f(n) = 5n + 3$  é  $O(n)$ .

# Exemplo - Método: Isolando a Constante

**Ex:** Prove que  $f(n) = 5n + 3$  é  $O(n)$ .

**Sol.**

- Se  $f(n)$  é  $O(n)$ , então existem constantes  $n_0$  e  $C$  tais que

$$f(n) \leq Cn \quad \forall n \geq n_0$$

- Assim

$$5n + 3 \leq Cn$$

$$5 + \frac{3}{n} \leq C$$

Note que  $5 + \frac{3}{n} \leq 8$  para qualquer  $n \geq 1$ .

Pontanto para  $C = 8$  e  $n_0 = 1$ , temos que o resultado  $\square$

# Exemplo - Método do Sanduíche

Ex: Prove que  $f(n) = 5n + 100$  é  $O(n^2)$

Sol 1

Note que

$$5n + 100 \leq 5n + 100n = 105n \leq 105n^2$$



Vale para  $n \geq 1$

Assim, com  $C = 105$  e  $n_0 = 1$ , temos que  $f(n) \in O(n^2)$

□

# Exemplo - Método do Sanduíche

Ex: Prove que  $f(n) = 7n + 30$  é  $O(n^2)$

Sol2

Note que

$$7n + 30 \leq n^2$$



Vale para  
 $n \geq 10$

Pontanto para  $C=1$  e  
 $n_0 = 10$ , temos que  
 $f(n) \in O(n^2)$   $\square$

$$7n + 30 \leq n^2$$

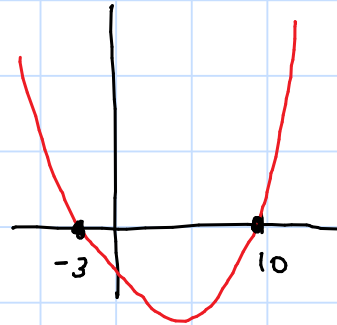
$$0 \leq n^2 - 7n - 30$$

$$\frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{2}$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{7 \pm 13}{2}$$

$$n' = 10 \text{ e } n'' = -3$$



# Exemplo

Ex: mostre que  $f(n) = 7n + 30 \notin O(\sqrt{n!})$ .

Prove por contradição mostrando que  $\bar{n}$  é possível ter as constantes

## Exemplo

Ex: mostre que  $f(n) = 7n + 30 \notin O(\sqrt{n})$ .

Sol

- Suponha para uma contradição que  $f(n) \in O(\sqrt{n})$ .
- Então existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que

$$f(n) \leq C\sqrt{n} \quad \forall n \geq n_0$$

- Assim,

$$7n + 30 \leq C\sqrt{n} \iff \frac{7n}{\sqrt{n}} + \frac{30}{\sqrt{n}} \leq C \iff 7\sqrt{n} + \frac{30}{\sqrt{n}} \leq C.$$

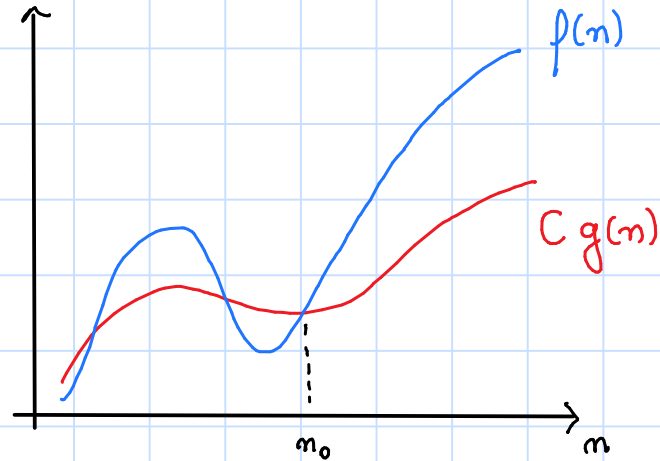
- Note que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 7\sqrt{n} = \infty$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{30}{\sqrt{n}} = 0$

- Assim,  $7\sqrt{n} + \frac{30}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$  qndo  $n \rightarrow \infty$ , o que contraria a existência de  $C$



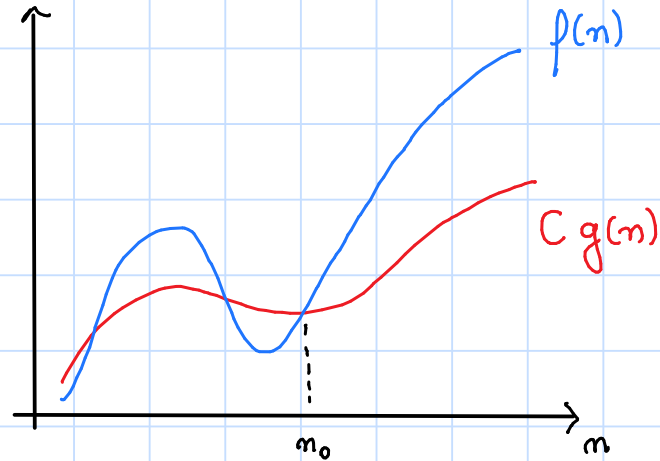
# Notação $\Omega$ - "Omega"

Def. Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que  $f(n) \in \Omega(g(n))$  se existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que  $f(n) \geq Cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .



# Notação $\Omega$ - "Omega"

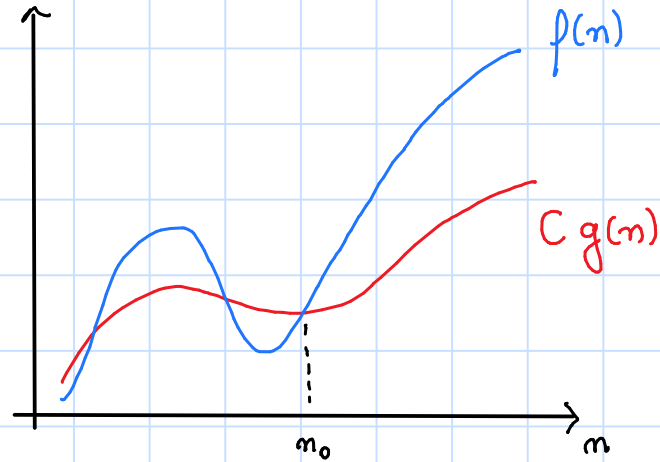
**Def.** Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que  $f(n) \in \Omega(g(n))$  se existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que  $f(n) \geq Cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .



Significado: para valores de  $n$  "suficientemente grandes", a função  $f(n)$  é limitada inferiormente por uma "versão escalada" de  $g(n)$ .

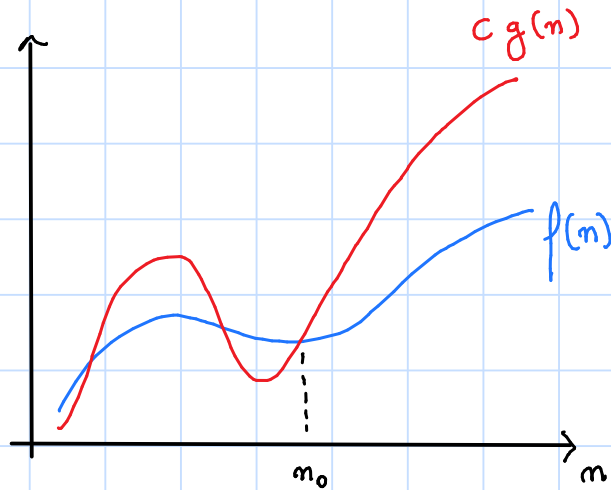
# Notação $\Omega$ - "Omega"

**Def.** Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que  $f(n) \in \Omega(g(n))$  se existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que  $f(n) \geq Cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .



Significado: Uma versão escalada de  $g(n)$  é um limitante inferior para  $f(n)$  para valores suficientemente grandes.

Teo  $f(n) \in O(g(n))$  se e somente se  $g(n) \in \Omega(f(n))$



Teo  $f(n) \in O(g(n))$  se e somente se  $g(n) \in \Omega(f(n))$

Demonstração

( $\Rightarrow$ )

Se  $f(n) \in O(g(n))$ , então existem constantes  $C$  e  $n_0$  tais que

$$f(n) \leq Cg(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Então

$$\frac{1}{C} f(n) \leq g(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Portanto

$$g(n) \in \Omega(f(n))$$

( $\Leftarrow$ )

Exercício



Exemplo - Método: isolando a constante

Ex: mostre que  $f(n) = 5n + 3 \in \Omega(n)$

# Exemplo - Método: isolando a constante

Ex: mostre que  $f(n) = 5n + 3 \in \Omega(n)$

SOL

- Se  $f(n) \in \Omega(n)$ , então existem constantes  $C$  e  $n_0$  tais que

$$f(n) \geq C g(n) \quad \forall n \geq n_0 \quad \textcircled{A}$$

- Assim,

$$5n + 3 \geq Cn \iff 5 + \frac{3}{n} \geq C$$

- Note que  $\frac{3}{n} \leq 3$  para todo  $n \geq 1$

- Assim, para  $C = 8$  e  $n_0 = 1$ , temos que  $\textcircled{A}$  vale e o teorema segue.  $\square$

# Exemplo - Método: do Sanduíche

Ex: mostre que  $f(n) = 5n + 3 \in \Omega(\sqrt{n})$

SOL

Note que

$$5n + 3 \geq 5n \geq 5\sqrt{n}$$

Assim, para  $c=5$  e  $n_0=1$ , temos que  $f(n) \in \Omega(\sqrt{n})$

□



# Exemplo - Método: do Sanduíche

↳ tirando lasquinha  
para se livrar de termo negativo

Ex: mostre que  $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

# Exemplo - Método: do Sanduíche

↳ tirando lasquinha para se livrar de termo negativo

Ex: mostre que  $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

Nosso objetivo

$$n^2 - 10n + \textcircled{7} \geq \dots \geq C n^2$$

↙ não há problema em jogar termo positivo de menor ordem fora

$$n^2 - 10n + 7 \geq n^2 - 10n \not\geq n^2 \quad \text{errado}$$

# Exemplo - Método: do Sanduíche

↳ tirando lasquinha para se livrar de termo negativo

Ex: mostre que  $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

$$n^2 - 10n = \frac{1}{2}n^2 + \boxed{\frac{1}{2}n^2 - 10n} \geq \frac{1}{2}n^2$$

↳ a ideia é tirar uma lasquinha do termo de maior ordem e fazer  $n_0$  ser tão grande que o "quadrado verde" fique positivo

# Exemplo - Método: do Sanduíche

↳ tirando lasquinha para se livrar de termo negativo

Ex: mostre que  $f(m) = m^2 - 10m + 7 \in \Omega(m^2)$

$$m^2 - 10m = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m^2 - 10m \geq \frac{1}{2}m^2$$

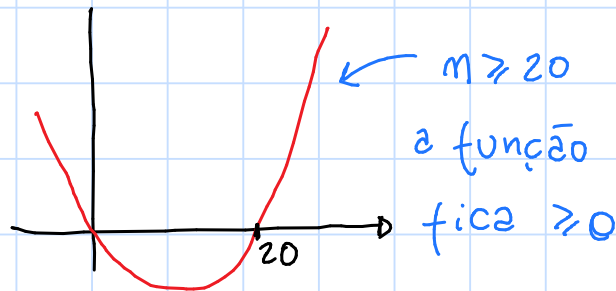
Quando  $\frac{1}{2}m^2 - 10m \geq 0$  ?

Analisando as raízes:

$$\frac{1}{2}m^2 - 10m = 0$$

$$m(\frac{1}{2}m - 10) = 0$$

$$m' = 0 \quad \text{ou} \quad m'' = 20$$



Ex: mostre que  $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

Sol

• Note que  $n^2 - 10n + 7 \geq n^2 - 10n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 - 10n$  (A)

• Note também que  $\frac{1}{2}n^2 - 10n \geq 0$  para todo  $n \geq 20$ , pois

$$\frac{1}{2}n^2 - 10n = 0 \Leftrightarrow n(\frac{1}{2}n - 10) = 0$$

que é 0 quando  $n=0$  ou

$$\frac{1}{2}n - 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n = 10 \Leftrightarrow n = 20$$

• Assim,  $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 - 10n \geq \frac{1}{2}n^2$ , e o resultado segue para  $n_0 = 20$  e  $C = 1/2$   $\square$

# Exemplo

Prova por contradição mostrando que  $\bar{n}$  é possível ter as constantes

Ex: mostre que  $f(n) = 5n + 3 \notin \Omega(n^2)$

Sol

- Suponha para uma contradição que  $f(n) \in \Omega(n^2)$
- Então existem constantes positivas  $C$  e  $n_0$  tais que

$$f(n) \geq Cn^2 \quad \forall n \geq n_0$$

• Portanto  $5n + 3 \geq Cn^2$

$$\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \geq C$$

• Note que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 0$ , o que contraria o

Fato de  $C$  ser uma constante positiva

□

# Nomenclatura e Abuso de Notação

A seguintes notações são equivalentes:

-  $f(n) \in \Omega(g(n))$

-  $f(n) \text{ é } \Omega(g(n))$

-  $f(n) = \Omega(g(n))$

↳ Esse abuso de notação é extremamente comum. Entretanto é importante manter em mente que  $\Omega(g(n))$  representa um conjunto de funções.

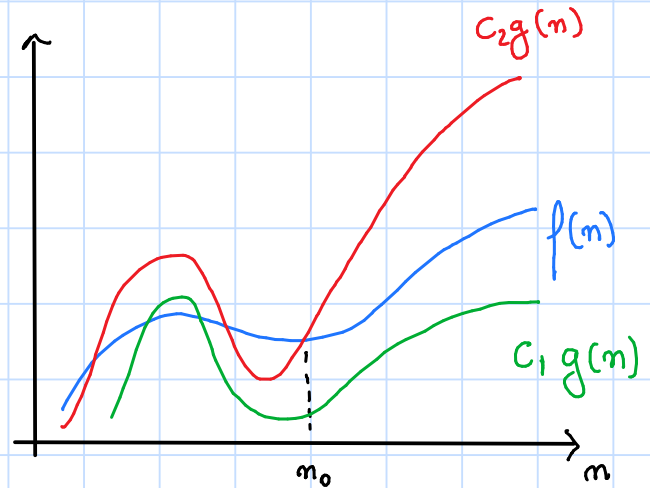
# Notação $\Theta$ - "Theta"

Def. Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que  $f(n) \in \Theta(g(n))$  se existem constantes positivas

$c_1, c_2$  e  $n_0$  tais que

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

para todo  $n \geq n_0$ .





Teo  $f(n) \in \Theta(g(n))$  sse  $f(n) \in \Omega(g(n))$  e  $f(n) \in O(g(n))$

↳ a demonstração segue diretamente das definições de  $\Theta$ ,  $\Omega$  e  $O$ .

# Nomenclatura e Abuso de Notação

As seguintes notações são equivalentes:

-  $f(n) \in \Theta(g(n))$

-  $f(n) \text{ é } \Theta(g(n))$

-  $f(n) = \Theta(g(n))$

↳ Esse abuso de notação é extremamente comum. Entretanto é importante manter em mente que  $\Theta(g(n))$  representa um conjunto de funções.

$O(1)$ ,  $\Omega(1)$  e  $\Theta(1)$

Escrevemos  $f(n) = O(1)$  e  $f(n) = \Omega(1)$  para denotar que  $f(n)$  é limitada superiormente e inferiormente, respectivamente, por uma constante  $c$ .

$\exists c$  e  $n_0$  tais que  $f(n) \leq c \cdot 1$

Quando  $f(n) = O(1)$  e  $f(n) = \Omega(1)$ , também escrevemos  $f(n) = \Theta(1)$

# Notação $O$ - "onzinho"

**Def** Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que

$$f(n) \in O(g(n))$$

se para toda constante  $C > 0$ , existe um  $n_0$  tal que

$$f(n) < Cg(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

# Nomenclatura e Abuso de Notação

As seguintes notações são equivalentes:

-  $f(n) \in o(g(n))$

-  $f(n) \text{ é } o(g(n))$

-  $f(n) = o(g(n))$

-  $f(n) \ll g(n)$

← notação nova!

# Notação $\omega$ - "omeguzinho"

**Def** Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Dizemos que

$$f(n) \in \omega(g(n))$$

se para toda constante  $C > 0$ , existe um  $n_0$  tal que

$$f(n) > Cg(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Teo  $f(n) \in o(g(n))$  sse  $g(n) \in \omega(f(n))$ .

# Notação e Abuso de Notação

As seguintes notações são equivalentes:

- $f(n) \in w(g(n))$ .
- $f(n) \in w(g(n))$ .
- $f(n) = w(g(n))$ .



# Intuição Sobre Notação Assintótica

- $f(n) = \Theta(g(n))$   $f$  cresce com a mesma razão de  $g$
- $f(n) = O(g(n))$   $f$  não cresce mais rápido que  $g$
- $f(n) = \Omega(g(n))$   $f$  cresce tão rápido quanto  $g$
- $f(n) = o(g(n))$   $f$  cresce mais devagar que  $g$
- $f(n) = \omega(g(n))$   $f$  cresce mais rápido que  $g$

# Propriedades envolvendo notação Assintótica

Sejam  $f(n)$ ,  $g(n)$  e  $h(n)$  funções positivas e assumamos que  $n \geq 0$ .

## Transitividade

Se  $f(n) \in O(g(n))$  e  $g(n) \in O(h(n))$ , então  $f(n) \in O(h(n))$   
(o mesmo vale se trocarmos  $O$  por  $\Omega$ ,  $\Theta$ ,  $o$  ou  $\omega$ )

## Reflexiva

$$f(n) \in O(f(n)) \quad f(n) \in \Omega(f(n)) \quad f(n) \in \Theta(f(n))$$

## Simetria

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$$

# Propriedades envolvendo notação Assintótica

$f(n), g(n) \in O(h(n))$ , então  $f(n) + g(n) \in O(h(n))$

$f(n) \in O(g_1(n))$  e  $h(n) \in O(g_2(n))$ , então  $f(n)g(n) \in O(g_1(n) \cdot g_2(n))$

# Limite e Notação Assintótica

As definições de notação assintótica estão relacionadas ao conceito de limite. Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  revela a relação assintótica entre  $f$  e  $g$  (desde que esse limite exista).

# Limite e Notação Assintótica

Teo Se  $f(n)$  e  $g(n)$  são funções positivas,  $n \geq 0$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  existe, então

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0, \infty \iff f(n) \in \Theta(g(n))$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty \iff f(n) \in O(g(n))$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \iff f(n) \in \Omega(g(n))$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f(n) \in o(g(n))$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \iff f(n) \in \omega(g(n))$

# Aplicação

**Ex** Prove que  $f(n) = 3n^4 - 5n^3 + 4n \in \Theta(n^4)$

**Sol**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 5n^3 + 4n}{n^4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3}$$

$$= 3 - 0 + 0 = 3.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 3$ , pelo Teorema dos Limites (a),

temos que  $f(n) \in \Theta(n^4)$

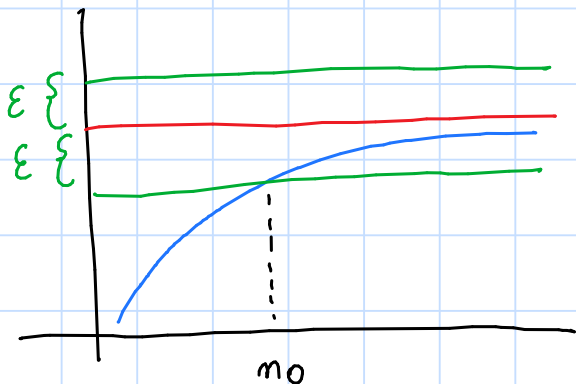
□

Teo. Dadas duas funções positivas  $f(n)$  e  $g(n)$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0, \infty$  então  $f(n) = \Theta(g)$ .

### Demonstração

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) \neq 0, \infty$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = C$ , onde  $C$  é uma constante
- Pela definição de limite, temos

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \text{ tal que } \forall n > m_0 \quad \left| \frac{f(n)}{g(n)} - C \right| < \varepsilon.$$



- Seja  $\varepsilon < C$
- Então existe um  $m_0$  tal que, para todo  $n > m_0$ , vale  $\left| \frac{f(n)}{g(n)} - C \right| < \varepsilon$

se  $\frac{f(n)}{g(n)} - c \geq 0$ , então

$$\frac{f(n)}{g(n)} - c \geq 0 \Leftrightarrow f(n) \geq cg(n)$$

Logo  $f(n) \in \Omega(g(n))$

Além disso

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - c \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} - c < \varepsilon \Leftrightarrow f(n) < (\varepsilon + c)g(n)$$

Logo  $f(n) \in O(g(n))$



se  $\frac{f(n)}{g(n)} - c \leq 0$ , então

$$\frac{f(n)}{g(n)} - c \leq 0 \Leftrightarrow f(n) \leq c g(n)$$

Logo  $f(n) \in O(g(n))$

Além disso

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - c \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\left( \frac{f(n)}{g(n)} - c \right) < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} - c > -\varepsilon$$

$\Leftrightarrow f(n) > (c - \varepsilon) g(n)$

*Como  $\varepsilon < c$ ,  $c - \varepsilon > 0$*

Logo,  $f(n) \in \Omega(g(n))$

□

**Teo** Sejam  $f$  e  $g$  funções positivas. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ ,  
então  $f \in o(g(n))$ .

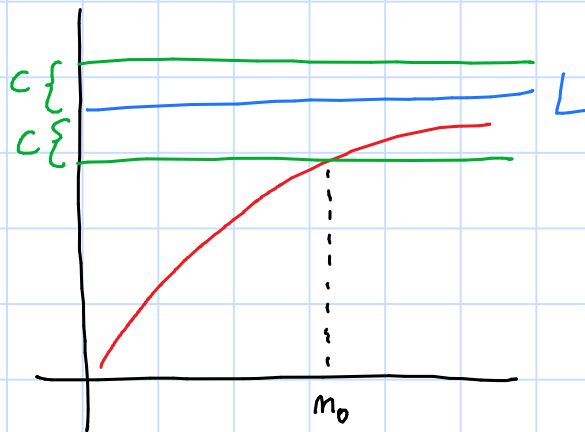
**Definição: Limite no Infinito**

Seja  $h$  uma função definida em algum intervalo  $(a, \infty)$ . Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = L$$

Então para todo  $C > 0$  existe um  $m_0$  tal que

se  $n > m_0$ , então  $|h(n) - L| < C$



**Teo** Sejam  $f$  e  $g$  funções positivas. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ ,  
então  $f \in o(g(n))$ .

**Definição: Limite no Infinito**

Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(a, \infty)$ .

Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Então para todo  $C > 0$  existe um  $m_0$  tal que

$$\text{se } n > m_0, \text{ então } \left| \frac{f(n)}{g(n)} - 0 \right| < C$$

**Def 0:** Se para toda constante  $C > 0$ , existe um  $m_0$   
tal que

$$f(n) < C g(n) \quad \forall n \geq m_0.$$

Teo Para todo  $\alpha, k > 0$  pertencentes aos reais

$$(\ln n)^k \in o(n^\alpha)$$

$$n^k \in o((1+\alpha)^n)$$

Teo Para todo  $\alpha, k > 0$  pertencentes aos reais

$$(\ln n)^k \in o(n^\alpha)$$

$$n^k \in o((1+\alpha)^n)$$

$$(\ln n)^{100000} \ll n^{0.000001}$$

$$n^{1000000000} \ll 1.000000001^n$$

Teo Para todo  $\alpha, k > 0$  pertencentes aos reais

$$\begin{aligned} (\ln n)^k &\in o(n^\alpha) \\ n^k &\in o((1+\alpha)^n) \end{aligned}$$

Demonstração

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln n}{n^{\alpha/k}} \right)^k \right) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha/k}} \right)^k$$

Por L'Hospital

$$\begin{aligned} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha/k}} \right)^k &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 1}{\frac{\alpha}{k} n^{\alpha/k-1}} \right)^k = \left( \frac{k}{\alpha} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha/k}} \right)^k \\ &= \left[ \frac{k}{\alpha} \cdot 0 \right]^k = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(1+\alpha)^n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+\alpha)^{n/k}} \right)^k$$

Por L'Hospital

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+\alpha)^{n/k}} \right)^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n}{k} (1+\alpha)^{n/k-1}} \right)^k = \frac{k(1+\alpha)}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\alpha)^{n/k}}$$

$$= \frac{k}{n} (1+\alpha) \cdot 0 = 0$$

□

Cor Para todo  $\alpha, k > 0$  pertencentes aos reais e para todo  $b > 0, b \neq 1$ , temos que

$$(\log_b m)^k \in o(m^\alpha)$$

Sabemos  $(\ln m)^k \in o(m^\alpha)$

$$\log_b m = \frac{1}{\ln b} \cdot \ln m$$

↳ escalar!



# Ordem de Crescimento

$$c \ll \log n \ll \sqrt{n} \ll n^c \ll n^c \lg n \ll 2^n \ll n!$$

Onde  $c > 1$  é uma constante





