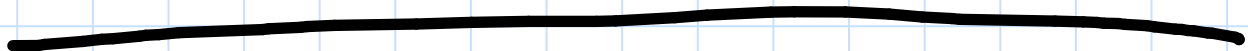


Recorrências



Recorrência

- Recorrência é uma equação na qual o n -ésimo termo da sequência é igual a uma combinação dos termos anteriores

Ex

$$T(n) = \begin{cases} 5 & \text{se } n=1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 10 & \end{cases}$$

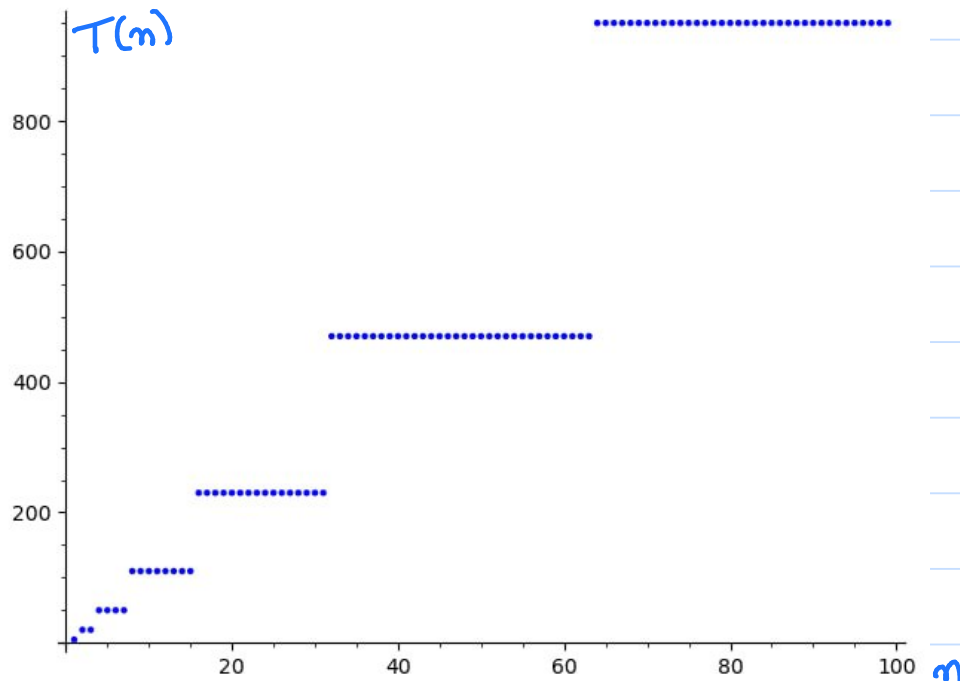
n	$T(n)$
1	5
2	$2T(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor) + 10 = 2T(1) + 10 = 2 \cdot 5 + 10 = 20$
3	$2T(\lfloor \frac{3}{2} \rfloor) + 10 = 2 \cdot T(1) + 10 = 20$
4	$2T(\lfloor \frac{4}{2} \rfloor) + 10 = 2 \cdot T(2) + 10 = 50$
5	50
6	50

Recorrência

- Recorrência é uma equação na qual o n -ésimo termo da sequência é igual a uma combinação dos termos anteriores

Ex

$$T(n) = \begin{cases} 5 & \text{se } n=1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 10 & \end{cases}$$



Recorrência

- Recorrência é uma equação na qual o n -ésimo termo da sequência é igual a uma combinação dos termos anteriores

Ex

$$\text{Fib}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ \text{Fib}(n-1) + \text{Fib}(n-2) & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 3T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Resolução de Recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências

- 1) Substituição
- 2) Iteração
- 3) Árvore de recorrência
- 4) Método Mestre

Método da Substituição

Ideia: demonstrar por indução matemática que a recorrência $T(n)$ é $O(f(n))$ e/ou $\Omega(f(n))$.

- é necessário que se saiba qual é a função f
- geralmente, f é obtida por um chute
 - precisa de experiência para dar um bom chute.

Assuma que $n = 2^k$ para algum $k \geq 1$

Apresente um limitante superior para a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Palpite: $T(n)$ é $O(n^2)$ ← há uma constante escondida.

Vamos provar por indução em n que

$$T(n) \leq 10n^2 \quad \forall n \geq 1$$

Como $10n^2 = O(n^2)$, obteremos o resultado desejado.

Bese (n=1)

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10 \cdot 1^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

Hipótese de Indução

$T(k) \leq 10 k^2$ para todo $1 \leq k < n$

Passo

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que } T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n \\ &= 5n^2 + n \end{aligned}$$

↳ H.I.

Bese (n=1)

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

Hipótese de Indução

$T(k) \leq 10k^2$ para todo $1 \leq k < n$

Passo

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que } T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n \\ &= 5n^2 + n \\ &= O(n^2) \end{aligned}$$

↳ H.I.

Bese (n=1)

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

Hipótese de Indução

$T(k) \leq 10k^2$ para todo $1 \leq k < n$

Passo

Sabemos que $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$$\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n$$

$$= 5n^2 + n$$

$$= O(n^2) \quad \times$$

↳ H.I.



Bese (n=1)

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

Hipótese de Indução

$T(k) \leq 10k^2$ para todo $1 \leq k < n$

Passo

Sabemos que $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$$\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n$$

↳ H.I.

Você está provando $= 5n^2 + n$

que $T(n) \leq 10n^2!! = O(n^2)$ ~~X~~

Bese (n=1)

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

Hipótese de Indução

$T(k) \leq 10k^2$ para todo $1 \leq k < n$

Passo

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que } T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n \\ &= 5n^2 + n \\ &\leq 5n^2 + 5n^2 \\ &\leq 10n^2 \end{aligned}$$

↳ H.I.

Isto finaliza a prova. Portanto, $T(n) \leq 10n^2$
para todo $n \geq 1$ e, como consequência, $T(n) = O(n^2)$ \square

- Essa recorrência era Mamão com açúcar
 - tivemos sorte ao escolher a constante 10, nem sempre é tão fácil fazer esse chute
 - Na prática, deixamos a demonstração nos mostrar quem é a constante c e no
 - Precisamos chutar apenas a função

Assuma que $n = 2^k$ para algum $k \geq 1$

Apresente um limitante superior para a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Palpite: $T(n)$ é $O(n^2)$

Vamos provar por indução em n que

$$T(n) \leq C n^2$$

A Prova
vai dizer quem
é C

Passo

$$\frac{n}{2} \geq 1 \iff n \geq 2$$

Sabemos que $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$$\leq 2 \cdot c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n$$

▷ por H.I.

$$= \frac{c}{2}n^2 + n$$

$$\leq cn^2$$

*

Temos que * vale se $\frac{cn^2}{2} + n \leq cn^2 \iff$

$$\frac{cn}{2} + 1 \leq cn \iff 1 \leq \frac{cn}{2} \iff \frac{2}{n} \leq c$$

$\frac{2}{n} \leq 2 \quad \forall n \geq 1$

↑ Funciona para $c \geq 2$

Base (n=1)

- Sabemos que $T(1) = 1$.
- Queremos que $c \cdot n^2 \geq T(1) = 1$

$$c \cdot n^2 = c \text{ neste caso}$$

- Logo a base vale para qualquer $c \geq 1$

- O passo funciona para $c \geq 2$ e $n \geq 2$
- A base funciona para $c \geq 1$ e $n = 1$

Portanto a prova funciona para $c \geq 2$ e $n \geq 1$.



Assuma que $n = 3^k$ para algum $k \geq 1$

Mostre um limitante superior para

$$T(n) \leq \begin{cases} 8 & \text{Se } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 & \text{Se } n > 1 \end{cases}$$

Atenção



Assuma que $n = 3^k$ para algum $k \geq 1$

Mostre um limitante superior para

$$T(n) \leq \begin{cases} 8 & \text{Se } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 & \text{Se } n > 1 \end{cases}$$

Atenção



Assuma que $n = 3^k$ para algum $k \geq 1$

Mostre um limitante superior para

$$T(n) \leq \begin{cases} 8 & \text{Se } n=1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 & \text{Se } n > 1 \end{cases}$$

Atenção

Chute: $T(n) = O(n)$

Então, vamos provar por indução que

$$T(n) \leq c n$$

novamente, vamos deixar a prova escolher a constante

Passo

$$\frac{n}{3} \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 3$$

Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1 \quad \text{Por H.I.}$$

$$\leq cn + 1$$

$$\leq cn \quad *$$

Quando $cn + 1 \leq cn$?

Passo

$$\frac{n}{3} \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 3$$

Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1$$

↳ Por H.I.

$$\leq cn + 1$$

$$\leq cn$$

*

Quando $cn + 1 \leq cn$?

NUNCA!

- Isto não implica que $T(n) \neq O(n)$

- De fato, $T(n) = O(n)$

- Só mostra que essa prova não funciona

- Vamos tentar resolver o problema com uma H.I. mais forte!

- Vamos analisar o problema

$$\text{Sabemos que } T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

$$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1 \quad \text{D Por H.I.}$$

$$\leq cn + 1$$

$$\leq cn$$

← é um termo de menor ordem

Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1 \quad \text{Por H.I.}$$

$$\leq cn + 1$$

$$\leq cn$$

① é um termo de menor ordem

② Vamos tentar subtraí-lo

NOVA Prop. $T(n) \leq cn - 1$

$$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

$$\leq 3 \left[c \frac{n}{3} - 1 \right] + 1$$

$$= cn - 3 + 1$$

$$= cn - 2 \leq cn$$

Vamos usá-lo para matar esse



Sabemos que $T(n) \leq 3T(\frac{n}{3}) + 1$

$$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1 \quad \text{Por H.I.}$$



$$\leq cn + 1$$
$$\leq cn$$

① é um termo de menor ordem

② Vamos tentar subtraí-lo

NOVA Prop. $T(n) \leq cn - 1$

$$T(n) \leq 3T(\frac{n}{3}) + 1$$

$$\leq 3 \left[c \frac{n}{3} - 1 \right] + 1$$

$$= cn - 3 + 1$$

$$= cn - 2 \leq cn$$

Vamos usá-lo para matar esse

precisamos provar $\leq cn - 1$



Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1 \quad \text{Por H.I.}$$

$$\leq cn + 1$$

$$\leq cn$$

① é um termo de menor ordem

② Vamos tentar subtraí-lo

NOVA Prop. $T(n) \leq cn - 1$

$$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

$$\leq 3 \left[c \frac{n}{3} - 1 \right] + 1$$

$$= cn - 3 + 1$$

$$= cn - 2 \leq cn - 1$$

Vamos usá-lo para matar esse



Podemos deixar a demonstração escolher essa constante também.

NOVA Prop. 2 $T(n) \leq cn - d$

PASSO

$$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

$$\leq 3\left[c\frac{n}{3} - d\right] + 1$$

$$= cn - 3d + 1$$

$$\leq cn - d$$

* Vale se

$$-3d + 1 \leq -d$$

$$1 \leq 2d$$

$$\frac{1}{2} \leq d$$

funciona para $c \geq 1$, $d \geq \frac{1}{2}$ e $n \geq 3$

Base

($n=1$)

($n=2??$)

- Sabemos que $T(1)=8$.
- Queremos que $c n - d \geq T(1)=8$. Portanto

$$c n - d \geq 8$$

$$c \cdot 1 - d \geq 8$$

$$c \geq 8 + d$$

- O que sabemos?

- Passo funciona para: $c \geq 1$, $d \geq \frac{1}{2}$ e $n \geq 3$

- Base funciona para: $c \geq 8 + d$

Portanto a prova funciona para: $d=1$, $c=9$

$$T(n) = O(n)$$

Outro Exemplo do uso do truque

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$\leq 4 \left[c \left(\frac{n}{2}\right)^2 \right] + n$$

$$= cn^2 + \underbrace{n}_{\text{NUNCA}}$$

$$\leq cn^2$$

Sobra e' linear

chute $T(n) = O(n^2)$

$$T(n) \leq cn^2$$

$$\leq 4 \left[c \left(\frac{n}{2}\right)^2 - d \left(\frac{n}{2}\right) \right] + n$$

$$= cn^2 - 2dn + n$$

$$\leq cn^2 - dn$$

$\forall d \geq 1$

$$T(n) \leq cn^2 - dn$$

Mostre um limite inferior para a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{Se } n=1 \\ T(n-1) + 3n & \text{Se } n > 1 \end{cases}$$

Chute: $T(n) = \Omega(n^2)$

Para demonstrar esse fato, vamos provar por indução em n que

$$T(n) \geq c n^2$$

Passo

$$T(n) = T(n-1) + 3n$$

$$\geq c(n-1)^2 + 3n \quad \triangleright \text{Por H.I.}$$

$$= c(n^2 - 2n + 1) + 3n$$

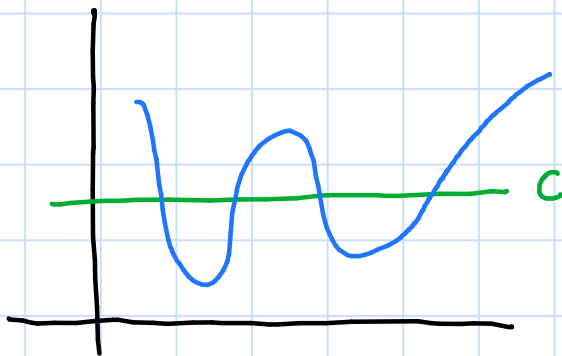
$$= cn^2 - 2cn + c + 3n$$

$$\geq cn^2 \quad \left. \vphantom{cn^2} \right\} *$$

Para * valer, precisamos que

$$-2cn + c + 3n \geq 0 \Leftrightarrow 3n \geq 2cn - c \Leftrightarrow 3n \geq c(2n-1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3n}{2n-1}} \geq c$$



Passo

$$T(n) = T(n-1) + 3n$$

$$\geq c(n-1)^2 + 3n$$

▷ Por H.I.

$$= c(n^2 - 2n + 1) + 3n$$

$$= cn^2 - 2cn + c + 3n$$

$$\geq cn^2$$

*)

Para * valer, precisamos que

$$-2cn + c + 3n \geq 0 \Leftrightarrow 3n \geq 2cn - c \Leftrightarrow 3n \geq c(2n-1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{3n}{2n-1}} \geq c$$

$$\frac{3n}{2n-1} \geq \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Logo } c \leq \frac{3}{2}$$



$$T(n) \geq c n^2$$

Base ($n=1$)

- Suponha que $n=1$

- Queremos que $c \cdot n^2 = c \cdot 1^2 \geq T(n) = T(1) = 1$

- Portanto

$$c \cdot 1^2 \geq 1$$

$$c \geq 1$$

i) Base funciona para: $n=1$ e $c \geq 1$

ii) Passo funciona para: $n \geq 2$ e $0 < c \leq \frac{3}{2}$

Portanto a prova funciona para $n \geq 1$ e $c = 1$

* Note que seria muito difícil acertar essa constante por causa de (ii)

Mostre que a recorrência $T(n)$ é Θ de alguma função f

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

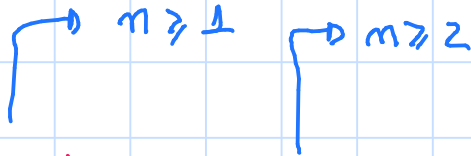
Chute: $T(n) = \Theta(n \lg n)$

Primeiro, vamos demonstrar que $T(n) = O(n \lg n)$
provando que

$$T(n) \leq c n \lg n$$

$n \geq 2$

Passo



$$T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

$$\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n$$

$$\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n$$

$$\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \frac{n}{2} + n$$

$$\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg 2 + n$$

$$\leq c \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n$$

$$\leq c n \lg n - \frac{c(n-1)}{2} + n$$

$$a \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2} \leq n$$

$$\frac{n+1}{2} \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq n$$

(b)

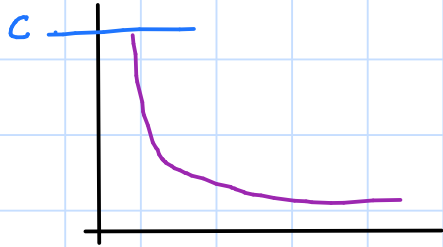
$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq \frac{n-1}{2}$$

$$-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq -\frac{(n-1)}{2}$$

$$-c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq -\frac{c(n-1)}{2}$$

b

Passo



$$T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

$\leq \dots$

$$\leq c n \lg n - \frac{c(n-1)}{2} + n \quad \text{ⓐ}$$
$$\leq c n \lg n$$

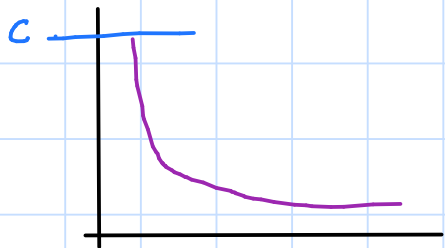
$$\text{ⓐ} - \frac{c(n-1)}{2} + n \leq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{c(n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{2n}{n-1} \leq c$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{2n}{n-1} \right) = \frac{(n-1) \cdot 2 - 2n}{(n-1)^2} = \frac{-2}{(n-1)^2}$$

$h = \frac{2n}{n-1}$ e' decrescente $\Rightarrow h(2)$ e' m'aximo

$$h(2) = \frac{2 \cdot 2}{2-1} = 4 \Rightarrow \text{Passo funciona } n \geq 2 \text{ e } c \geq 4$$

Passo (Final v2)



$n \geq 1$ $m \geq 2$

$$T(n) = T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n$$

$$\leq \dots$$

$$\leq c n \lg n - \frac{c(n-1)}{2} + n \quad \text{ⓐ}$$

$$\leq c n \lg n$$

$$\text{ⓐ} - \frac{c(n-1)}{2} + n \leq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{c(n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{2n}{n-1} \leq c$$

$$\frac{2n}{n-1} \leq \frac{2n+2}{n-1} = \frac{2(n+1)}{n-1} \leq 2.3 \leq c$$

$n \geq 2$

$$\frac{n+1}{n-1} \stackrel{?}{\leq} 3 \Leftrightarrow n+1 \leq 3n-3 \Leftrightarrow 4 \leq 2n$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq n$$

Logo o passo funciona p/ $c \geq 6$ e $n \geq 2$

Base

- O passo funciona para $n \geq 2$, então vamos escolher a nossa base como sendo $n=1$.
- Queremos mostrar que $T(n) \leq c n \lg n$ qndo $n=1$. Então

$$T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$$

• A base não vale!

- Tudo bem, queremos mostrar que

$$T(n) \leq c n \lg n \quad \forall n \geq n_0$$

- Vamos mostrar que podemos escolher

$$n_0 = 2$$

Base

$$T(2) = T(\lceil \frac{2}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \leq c \cdot 2 \log 2 \iff \frac{4}{2} \leq c \iff 2 \leq c$$

Base

$$T(2) = T(\lceil \frac{2}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \leq c \cdot 2 \lg 2 \iff \frac{4}{2} \leq c \iff 2 \leq c$$

O que acontece no passo quando $n=3$?

$$T(3) = T(\lceil \frac{3}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{3}{2} \rfloor) + 3$$

$$\leq c \lceil \frac{3}{2} \rceil \lg \lceil \frac{3}{2} \rceil + c \lfloor \frac{3}{2} \rfloor \lg \lfloor \frac{3}{2} \rfloor + 3$$

$$\leq \dots$$

$$\leq c \cdot 3 \lg 3$$

Base

$$T(2) = T(\lceil \frac{2}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \leq c \cdot 2 \lg 2 \iff \frac{4}{2} \leq c \iff 2 \leq c$$

O que acontece no passo quando $n=3$?

$$T(3) = T(\lceil \frac{3}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{3}{2} \rfloor) + 3 \rightarrow T(1)$$

$$\leq c \lceil \frac{3}{2} \rceil \lg \lceil \frac{3}{2} \rceil + c \lfloor \frac{3}{2} \rfloor \lg \lfloor \frac{3}{2} \rfloor + 3$$

$$\leq \dots$$

$T(1)$ não vale: $T(1) \neq c \cdot 1 \cdot \lg 1$

$$\leq c \cdot 3 \lg 3$$

Base

$$T(2) = T(\lceil \frac{2}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \leq c \cdot 2 \log 2 \Leftrightarrow \frac{4}{2} \leq c \Leftrightarrow 2 \leq c$$

$$T(3) = T(\lceil \frac{3}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{3}{2} \rfloor) + 3$$

$$= T(2) + T(1) + 3 = 4 + 1 + 3 = 8$$

$$8 \leq c \cdot 3 \log 3 \Leftrightarrow \frac{8}{3 \log 3} \leq c$$

≈ 1.68

Base funziona
 $c \geq 2$

Base com $n=2$ e $n=3$ são suficientes

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq 2$$

n par

$$\frac{n}{2} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 4$$

n ímpar

$$\frac{n-1}{2} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 5$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq 2$$

n par

$$\frac{n}{2} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 4$$

n ímpar

$$\frac{n+1}{2} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 3$$

Base funciona com $n \in \{2, 3\}$ e $c \geq 2$

Passo funciona com $n \geq 4$ e $c \geq 4$

Portanto para $c=4$ e $n_0=2$, temos que

$$T(n) \leq c n \lg n \quad \forall n \geq n_0$$

Isto prova que $T(n) = O(n \lg n)$

Agora vamos provar que $T(n) = \Omega(n \log n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Para isso, vamos mostrar que

$$T(n) \geq c n \log n$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

$$\geq c \lceil \frac{n}{2} \rceil \lg \lceil \frac{n}{2} \rceil + c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lg \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n$$

$$\geq c \lceil \frac{n}{2} \rceil \lg \frac{n}{2} + c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lg \frac{n}{4} + n$$

$$= c \lceil \frac{n}{2} \rceil \lg n - c \lceil \frac{n}{2} \rceil \lg 2 + c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lg n$$

$$- c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lg 4 + n$$

$$= c \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) \lg n - c \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n$$

$$= cn \lg n - c \lceil n/2 \rceil - 2c \lfloor n/2 \rfloor + n$$

$$\geq cn \lg n - c \lceil n/2 \rceil - 2c \lceil n/2 \rceil + n$$

$$= cn \lg n - 3c \lceil n/2 \rceil + n$$

$$\geq cn \lg n - 3c \left(\frac{n+1}{2} \right) + n \geq cn \lg n$$

Passo

$$* \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \frac{n}{4}$$

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{4}$$

$$\frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{4}$$

\updownarrow

$$\frac{n}{2} - \frac{n}{4} \geq 1$$

\updownarrow

$$n \geq 4$$

* $n \geq 4$

⊙

ⓑ

$$\textcircled{B} \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow -\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq -\frac{n+1}{2} \Leftrightarrow -3c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq -3c \frac{n+1}{2}$$

\textcircled{C} O Passo \textcircled{B} é verdade sempre que

$$-3c \left(\frac{n+1}{2} \right) + n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 3c \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{3n+1} \geq c. \quad \text{Seja } h(n) = \frac{2n}{3n+1}$$

$$\frac{d}{dn}(h) = \frac{(3n+1)^2 - 2n \cdot 3}{(3n+1)^2} = \frac{6n+1-6n}{(3n+1)^2} = \frac{1}{(3n+1)^2}$$

$h(n)$ é crescente. $\Rightarrow h(1)$ é mínimo

$$h(1) = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{2}$$



Versão de Final 2

$$(B) \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow -\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq -\frac{n+1}{2} \Leftrightarrow -3c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq -3c \frac{n+1}{2}$$

(C) O Passo (B) é verdade sempre que

$$-3c \left(\frac{n+1}{2} \right) + n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 3c \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n}{3n+1} \geq c.$$

$$\frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n+1/3} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq c$$

$$\frac{n}{n+1/3} \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \frac{n+1/3}{2} \Leftrightarrow 2n \geq n+1/3 \Leftrightarrow n \geq 1/3$$

\nearrow $n \geq 1/3$

Logo, o passo funciona para $0 < c \leq \frac{1}{3}$ e $m \geq 4$

↑ escolhi um intervalo que funciona por os 2 finais.

↑ Pelo exercício do 0, sabemos que a base não funciona para $m=1$, pois

$$b_1 = 0$$

- Portanto, aqui também, precisamos de dois casos base.

Base $n=2$ e $n=3$

$$T(2) = T(\lceil \frac{2}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{2}{2} \rfloor) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \geq c \cdot 2 \log 2 \iff \frac{4}{2} \geq c \iff 2 \geq c$$

$$T(3) = T(\lceil \frac{3}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{3}{2} \rfloor) + 3$$

$$= T(2) + T(1) + 3 = 4 + 1 + 3 = 8$$

$$8 \geq c \cdot 3 \log 3 \iff \frac{8}{3 \log 3} \geq c$$

≈ 1.68

Base funciona
para $c \leq 1.5$

Portanto, temos

Base funciona para: $m \in \{2, 3\}$ e $c \leq 1.5$

Passo funciona para: $m \geq 4$ e $0 < c \leq \frac{1}{3}$

Logo, a prova funciona quando $m \geq 2$ e $c = \frac{1}{3}$

Assim, $T(n) \geq \frac{1}{2} n \lg n \quad \forall n \geq 2.$

Isso prova que $T(n) = \Omega(n \lg n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{Se } n=1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & \text{Se } n \geq 2 \end{cases}$$

Como provamos que

$$T(n) = O(n \lg n) \quad e$$

$$T(n) = \Omega(n \lg n),$$

Temos que $T(n) = \Theta(n \lg n)$.

Quando temos uma recorrência do tipo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + k & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

geralmente assumimos que $n = b^k$ para algum $k \geq 1$

- Se $n \neq b^k$, então $T(n)$ não está bem definido

EX

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ T(n/2) + 1 & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad \text{e } n=3$$

- Indução só funciona em variável inteira (NATURAIS)
- Assintoticamente dá no mesmo p/ muitos casos

É possível provar que os tetos e pisos podem ser desconsiderados em recorrências do tipo

$$T(n) = a \left[T\left(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor\right) + T\left(\lceil \frac{n}{c} \rceil\right) \right] + f(n)$$

quando $a > 0$ e $b, c > 1$

→ Tipo mais frequente que surge em algoritmos

Assuma que $n = 2^k$ para algum $k \geq 1$

Apresente um limitante superior para a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n=1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

É comum tratarmos essas recorrências como

$$T(n) \leq \begin{cases} 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \end{cases} \quad \text{e} \quad T(n) \geq \begin{cases} 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \end{cases}$$

A notação Θ , O , Ω escondem uma constante que não faz diferença para a notação assintótica

Nossa Convenção

1. Quando $T(1)$ não for definido, assuma $T(1) = 1$
2. Se $T(\lfloor \frac{a}{b} \rfloor)$ ou $T(\lceil \frac{a}{b} \rceil)$ não aparecerem explicitamente, i. e., se escrevermos $T(\frac{a}{b})$, assumamos que $a = b^k$ para algum k .

Fazendo o chute

- Não há receita genérica para o chute
- A experiência é um fator importante
- Normalmente recorrências similares possuem o mesmo fator de crescimento

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Muito parecida com $T(n) = \begin{cases} 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n \end{cases}$

que sabemos ser $\Theta(n \lg n)$. Então chutamos $\Theta(n \lg n)$

(Exercício)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

- Intuitivamente $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) \approx T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

- chutamos $T(n) = \Theta(n \log n)$

Exercício

Método

da

Iteração

Método da Iteração

Ideia

1. Expandir a recorrência iterativamente até chegar no caso base
2. Reescrevê-la como uma somatória em termos de n

Não é necessário adivinhar a resposta

- É útil conhecer fórmulas de somatório

Resolva a recorrência $T(x) \leq T\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.

$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$\leq T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 + 1$$

$$\leq \left[T\left(\frac{n}{8}\right) + 1 \right] + 1 + 1$$

$$= T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3$$

$$\leq \left[T\left(\frac{n}{16}\right) + 1 \right] + 3$$

$$= T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4 \leq \dots \leq T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq T\left(\frac{n}{4}\right) + 1$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) \leq T\left(\frac{n}{8}\right) + 1$$

$$T\left(\frac{n}{8}\right) \leq T\left(\frac{n}{16}\right) + 1$$

Vamos expandir isso até $\frac{n}{2^i} = 1$, pois sabemos $T(1) = 1$

Isso vai acontecer qndo

$$\frac{n}{2^i} = 1 \iff n = 2^i \iff \lg n = \lg 2^i \iff \lg n = i$$

Assim, qndo $i = \lg n$, teremos

$$T(n) \leq \dots \leq T(1) + \lg n = 1 + \lg n.$$

Portanto, $T(n) = O(\lg n)$.

Resolva a recorrência $T(n) = 2T(n-1) + n$

$$T(n) = 2T(n-1) + n$$

$$= 2[2T(n-2) + n-1] + n$$

$$= 2^2 T(n-2) + 2n - 2 + n$$

$$= 2^2 [2T(n-3) + n-2] + 2n - 2 + n$$

$$= 2^3 T(n-3) + 2^2 n - 2^2 \cdot 2 + 2n - 2 + n$$

$$= 2^3 [2T(n-4) + n-3] + 2^2 n - 2^2 \cdot 2 + 2n - 2 + n$$

$$= 2^4 T(n-4) + 2^3 \cdot n - 2^3 \cdot 3 + 2^2 n - 2^2 \cdot 2 + 2n - 2 + n$$

$$= 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j n - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j \cdot j$$

$$T(0) = 2T(0-1) + 0$$

$$T(n-1) = 2T(n-2) + n-1$$

$$T(n-2) = 2T(n-3) + n-2$$

$$T(n-3) = 2T(n-4) + n-3$$

$$= 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j n - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j \cdot j$$

$$= 2^i T(n-i) + n \sum_{j=0}^{i-1} 2^j - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j \cdot j$$

$$= 2^i T(n-i) + n(2^i - 1) - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j \cdot j$$

Temos que a iteração termina quando $n-i=1$
 $\Leftrightarrow n-1=i$

Assim, temos que

$$T(n) = 2^{n-1} \cdot T(1) + n(2^{n-1} - 1) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$$

$$= 2^{n-1} + n(2^{n-1} - 1) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$$

Ateí agora temos

$$T(n) = \underbrace{2^{n-1} + n(2^{n-1} - 1) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j}_{*}$$

$$* = O(g) \Rightarrow T(n) = O(g)$$

$$* = \Omega(g) \Rightarrow T(n) = \Omega(g)$$

Vamos provar um limitante superior para $T(n)$

$$T(n) = 2^{n-1} + n(2^{n-1} - 1) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$$

$$\leq 2^{n-1} + n2^{n-1} - n$$

$$\leq 2^{n-1} + n2^{n-1} = O(n2^n)$$

Sera que se não descartarmos $-\sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$ conseguimos um limitante melhor?

→ Vamos tentar

Vamos provar um limitante superior para $T(n)$

$$T(n) = 2^{n-1} + n(2^{n-1} - 1) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$$

$$= 2^{n-1} + n(2^{n-1} - 1) - \left[\frac{(n-2)2^n - (n-1)2^{n-1} + 2}{(2-1)^2} \right]$$

$$= 2^{n-1} + n(2^{n-1} - 1) - (n-2)2^n + (n-1)2^{n-1} - 2$$

$$= \underline{2^{n-1}} + \underline{n 2^{n-1}} - n - \underline{(n-2)2^n} + \underline{(n-1)2^{n-1}} - 2$$

$$= 2^{n-1}(1 + n - (n-2)2 + n-1) - n - 2$$

$$= 2^{n-1} \cdot 4 - n - 2$$

$$= 2 \cdot 2^n - n - 2$$

Sabemos que

$$T(n) = 2 \cdot 2^n - n - 2$$

É fácil mostrar que $2 \cdot 2^n - n - 2$ é $O(2^n)$
e $\Omega(2^n)$.

Assim, vale que $T(n) = \Theta(2^n)$.

Método

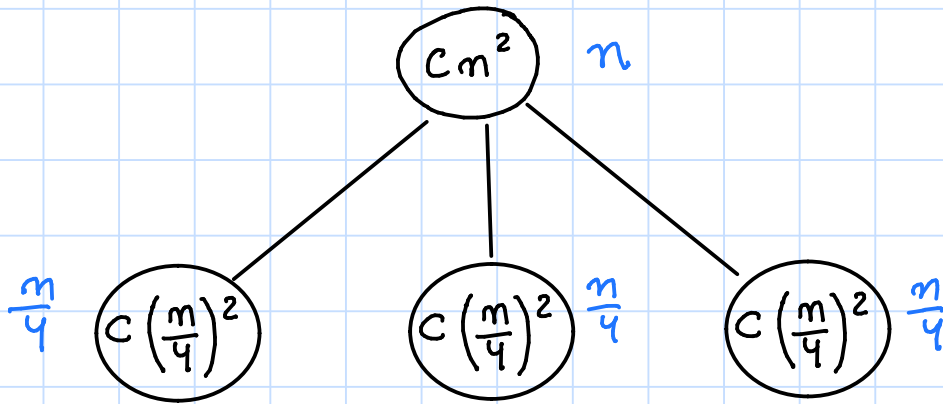
da árvore

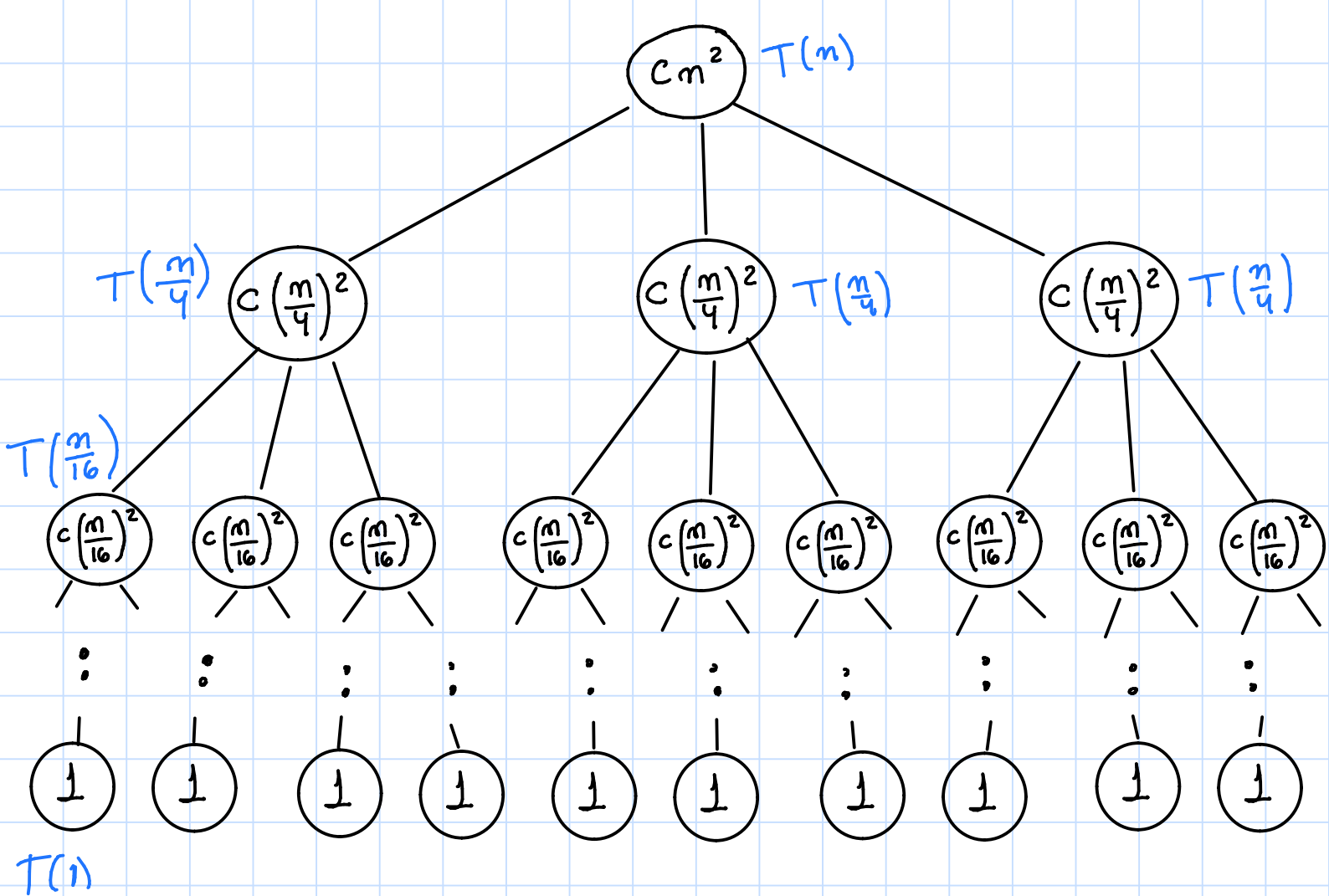
de Recorrência

Árvore de Recorrência

- Consiste em analisar a árvore de recorrência
- Cada nó representa um subproblema / chamada recursiva
- Um nó é rotulado internamente com o tempo gasto naquela chamada (desconsiderando os tempos das chamadas recursivas).
- Um nó é rotulado externamente com o tamanho do subproblema dele
- Os filhos de um nó são as chamadas recursivas

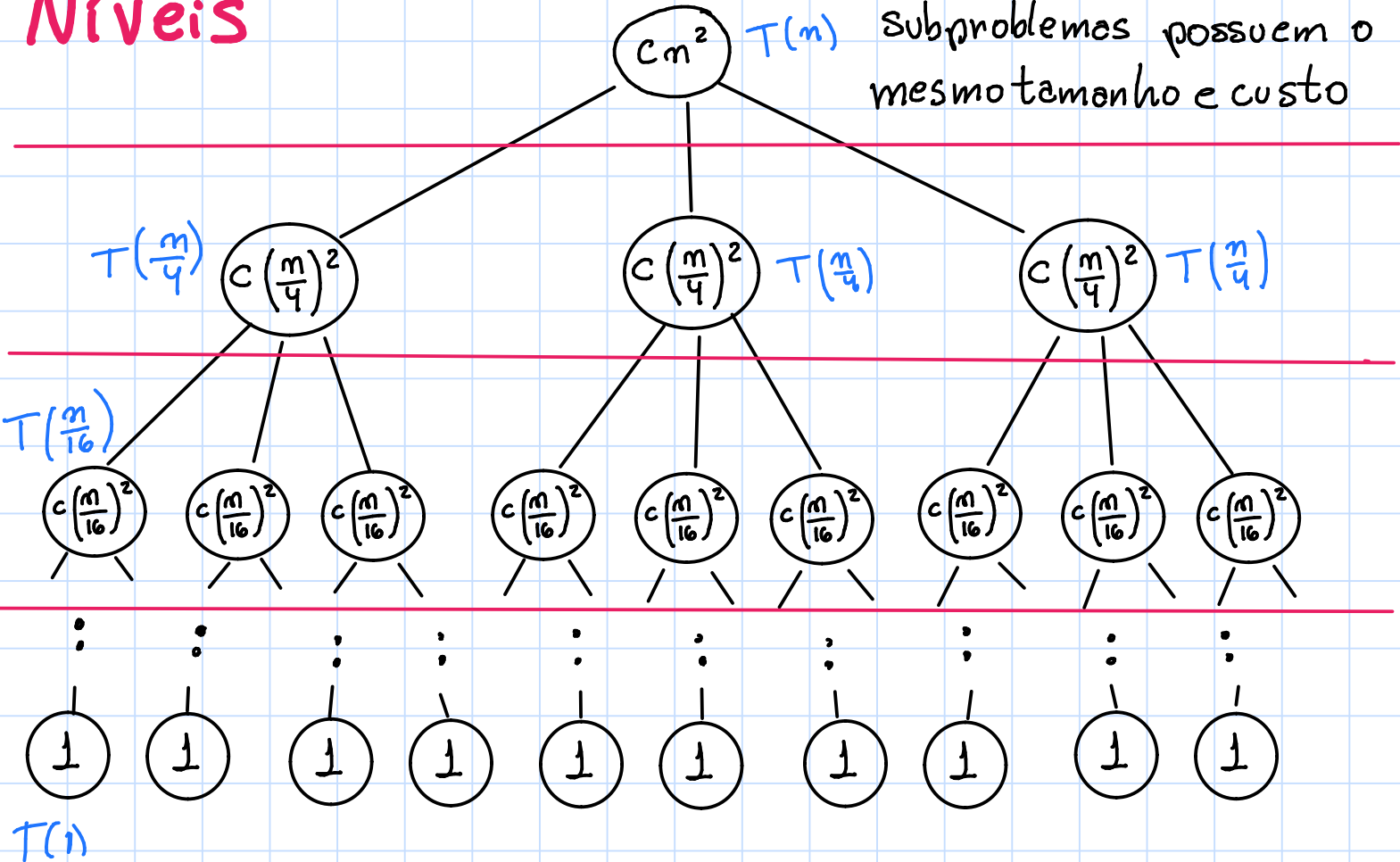
Encontre uma fórmula fechada para
 $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + cn^2$, onde c é uma constante



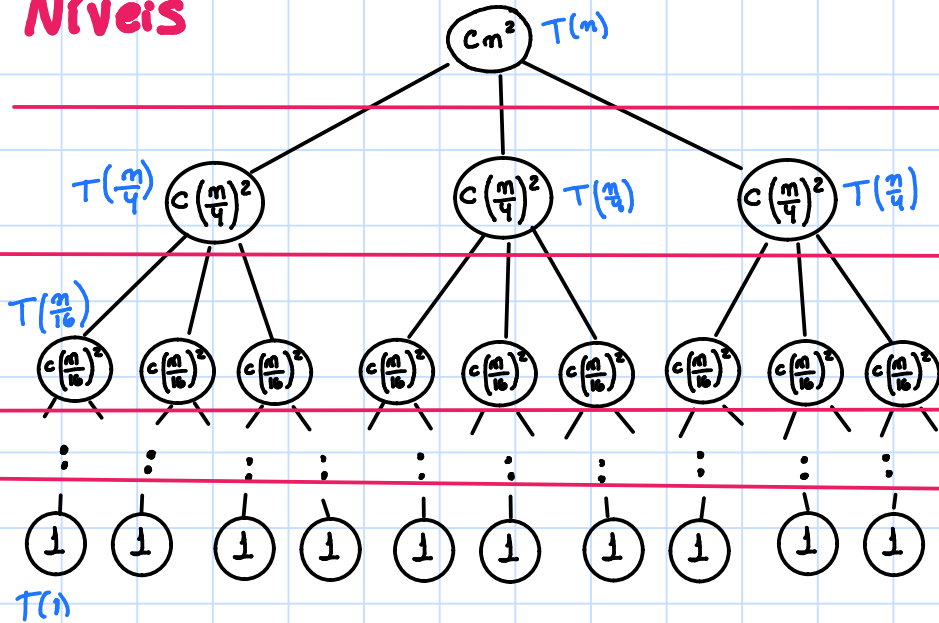


Níveis

Dentro de cada nível os subproblemas possuem o mesmo tamanho e custo



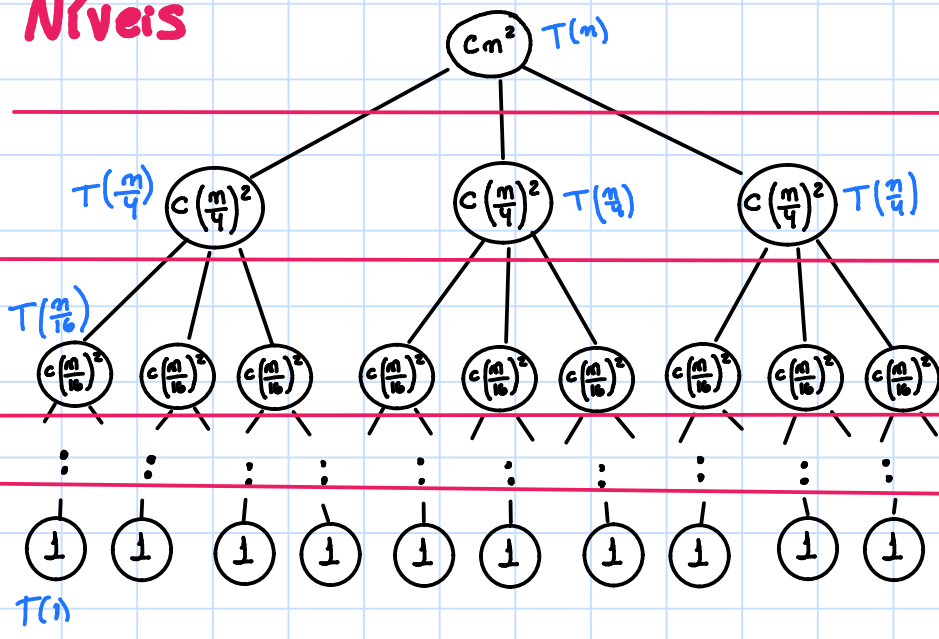
Níveis



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó

+ 3 coluna: →
"custo total do nível"

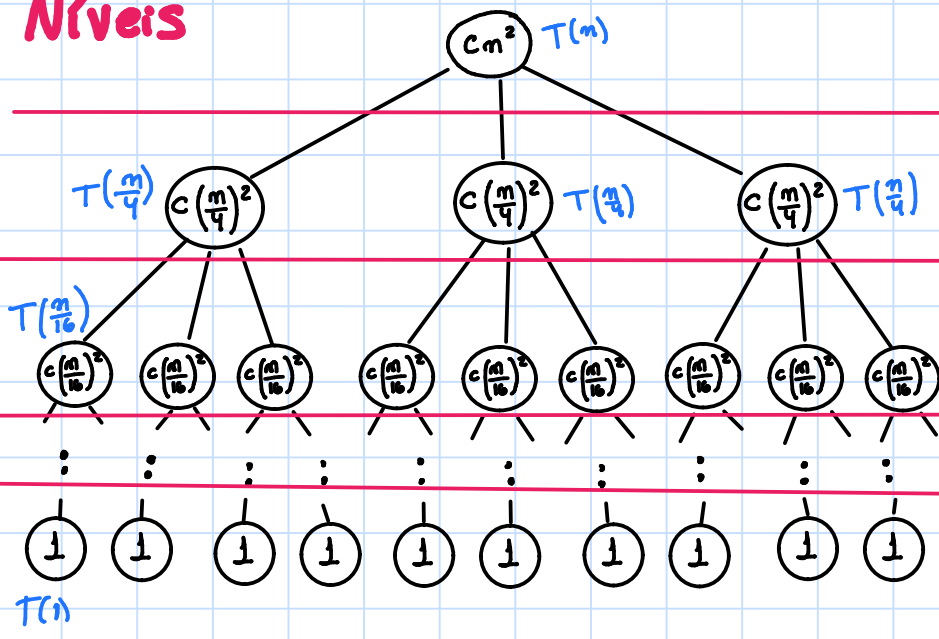
Níveis



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0			
1			
2			
i			

+ 3 coluna: →
"custo total do nível"

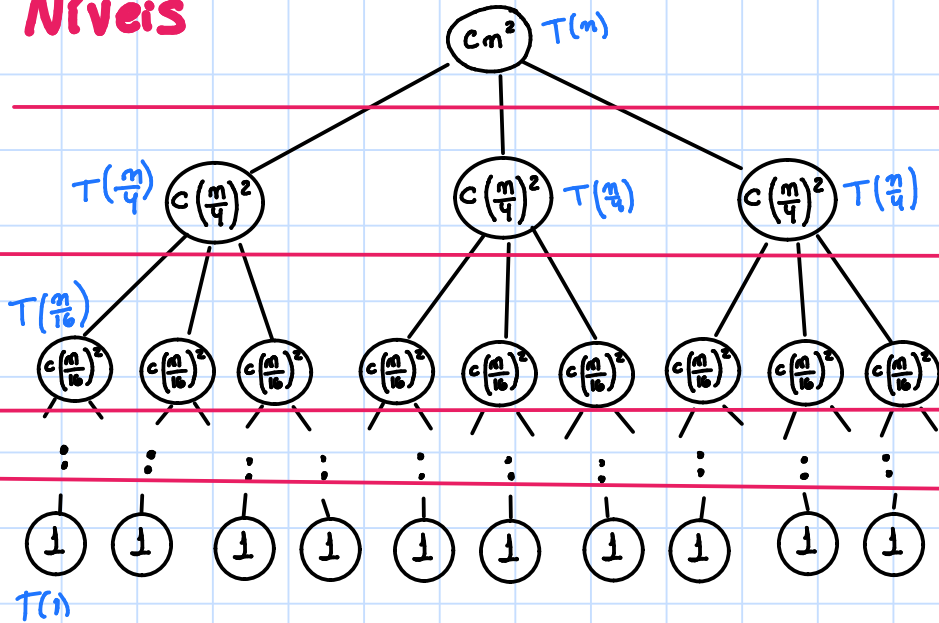
Níveis



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1		
1	3		
2	9		
\vdots			

+ 3 coluna: →
"custo total do nível"

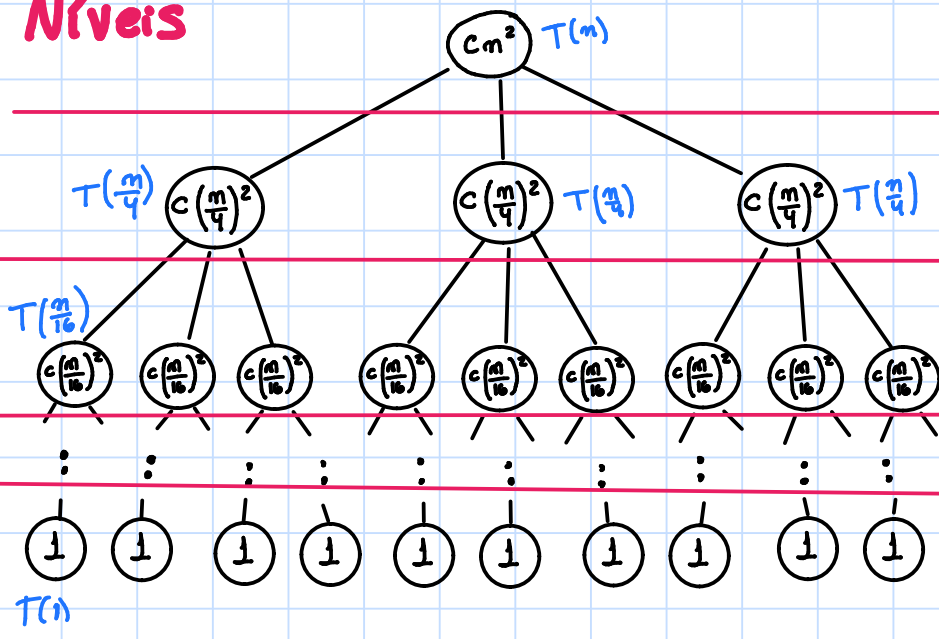
Níveis



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1	3^0	
1	3	3^1	
2	9	3^2	
\vdots			
i			

+ 3 coluna: →
"custo total do nível"

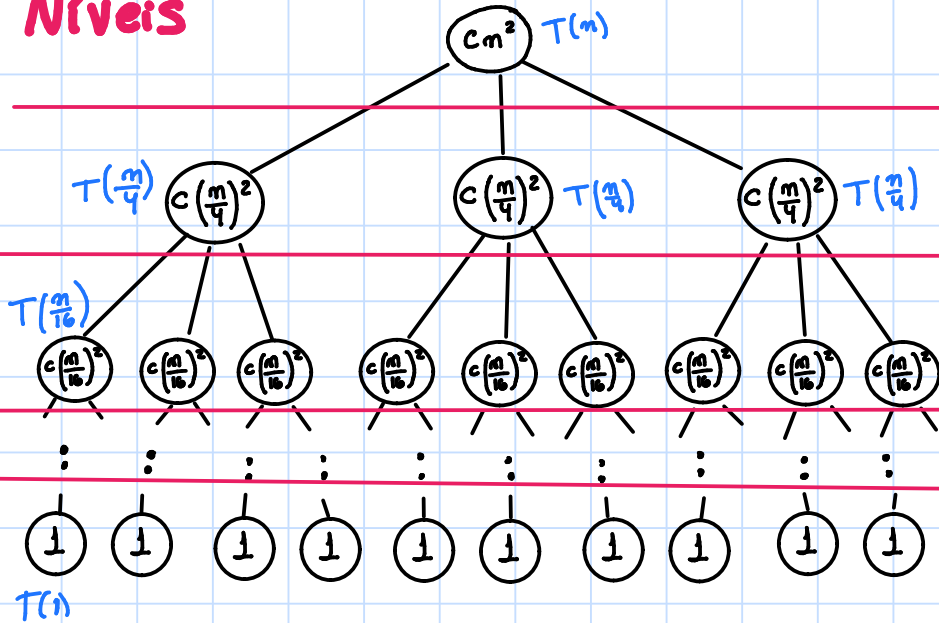
Níveis



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1 3^0		
1	3 3^1		
2	9 3^2		
i	3^i		

+ 3 coluna: →
"custo total do nível"

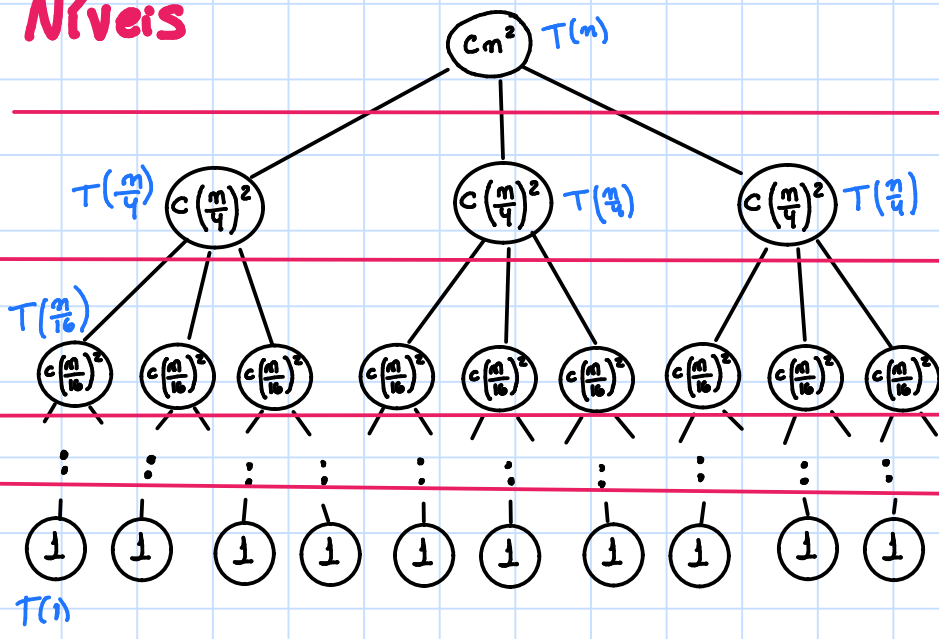
Níveis



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1	m	
1	3	$\frac{m}{4}$	
2	9	$\frac{m}{16}$	
i	3^i		

+ 3 coluna: →
"custo total do nível"

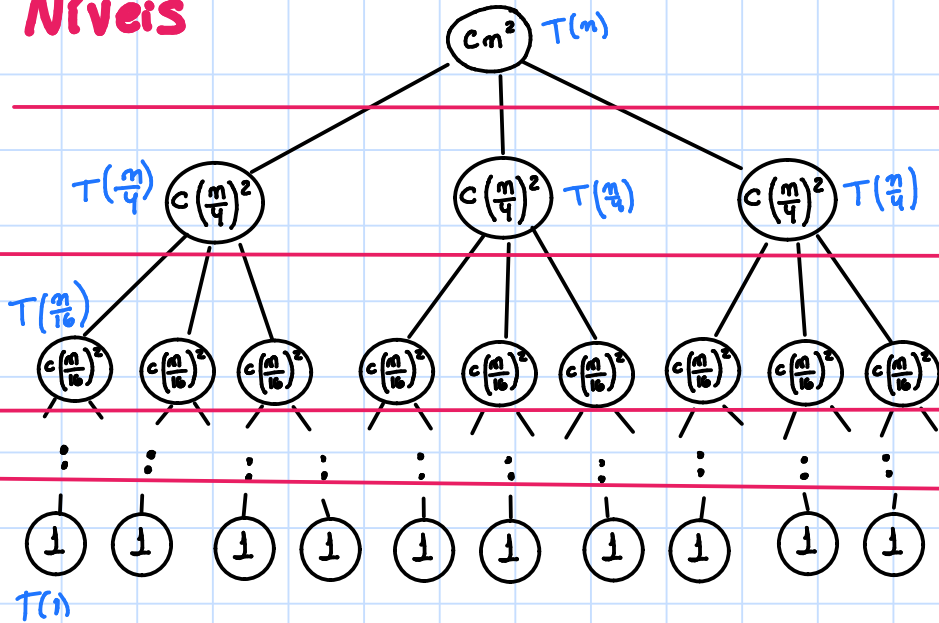
Níveis



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo no'
0	1	m	$\frac{c}{1} m$
1	3	$\frac{m}{4}$	$\frac{3c}{4} m$
2	9	$\frac{m}{16}$	$\frac{9c}{16} m$
\vdots	3^i		

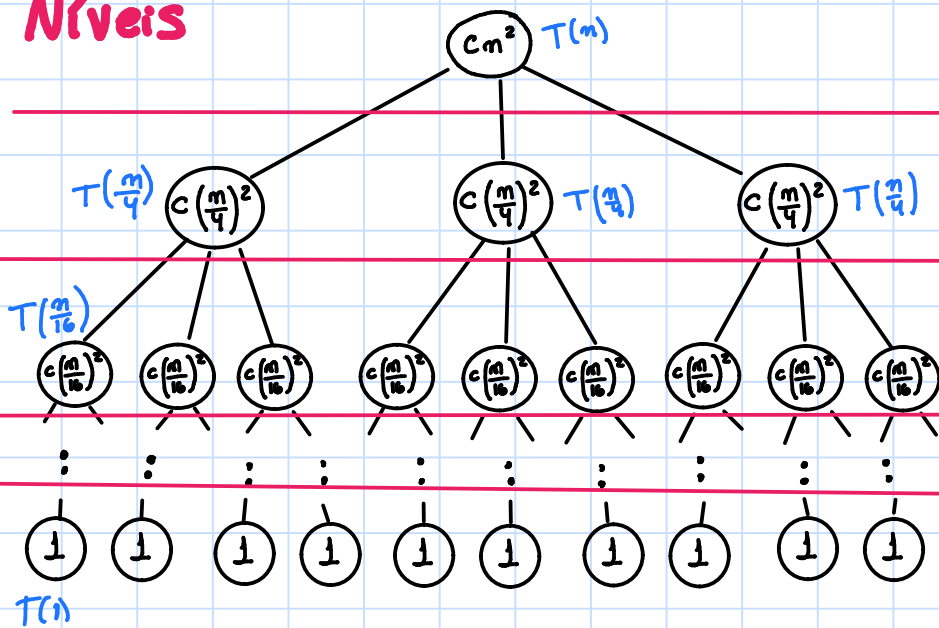
+ 3 coluna: →
"custo total do nível"

Níveis



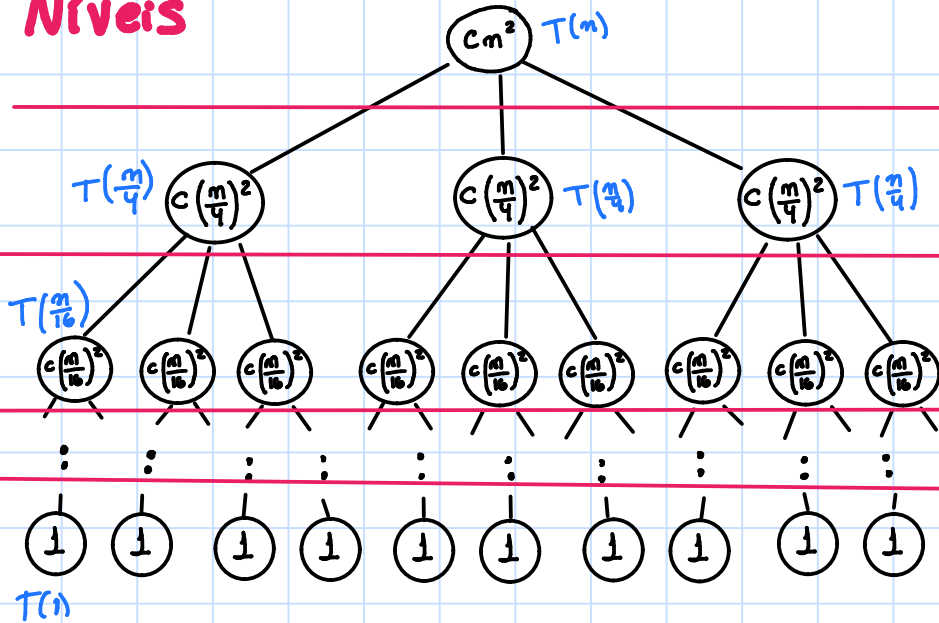
Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1	m	
1	3	$\frac{m}{4}$	
2	9	$\frac{m}{16}$	
i	3^i	$\frac{m}{4^i}$	

Níveis



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1	m	
1	3	$\frac{m}{4}$	
2	9	$\frac{m}{16}$	
\vdots	3^i	$\frac{m}{4^i}$	
		1	

Níveis

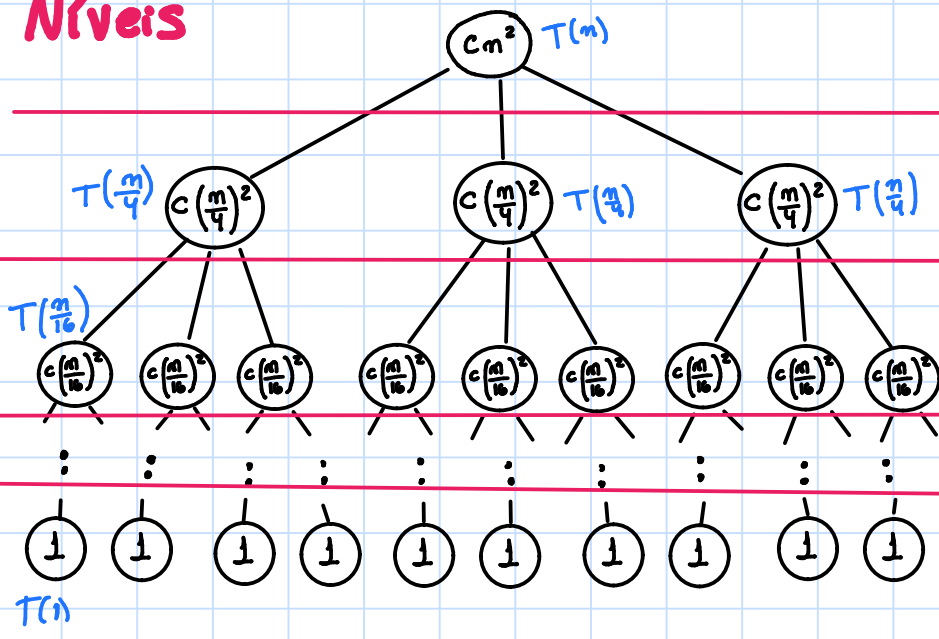


Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1	m	
1	3	$\frac{m}{4}$	
2	9	$\frac{m}{16}$	
\vdots	\vdots	\vdots	
i	3^i	$\frac{m}{4^i}$	
		1	

$$\frac{m}{4^i} = 1 \iff m = 4^i \iff \log_4 m = \log_4 4^i$$

$$\iff \log_4 m = i \cdot \log_4 4 \iff \log_4 m = i$$

Níveis

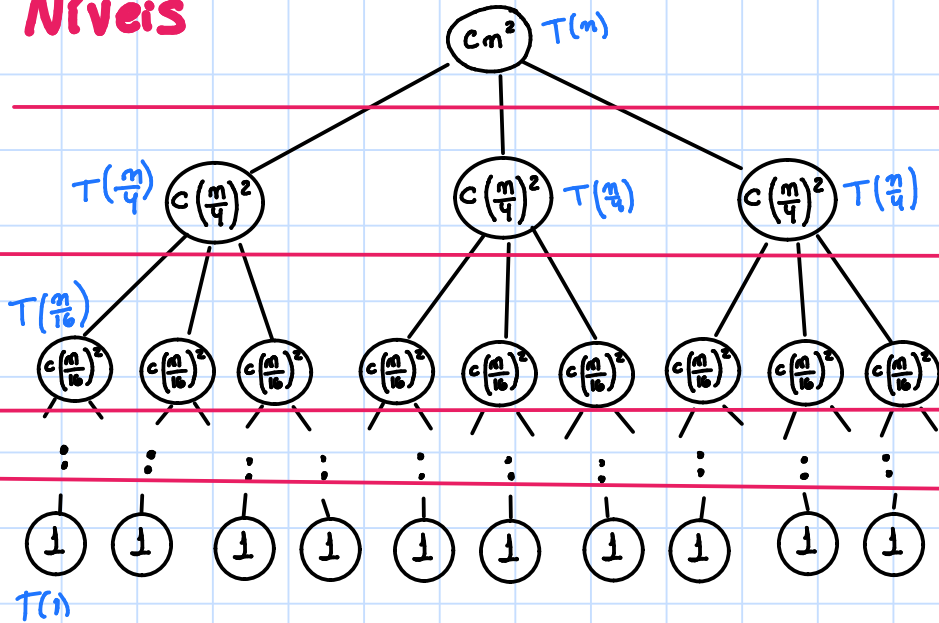


Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1	n	
1	3	$\frac{n}{4}$	
2	9	$\frac{n}{16}$	
i	3^i	$\frac{n}{4^i}$	
$\log_4 n$		1	

$$\frac{n}{4^i} = 1 \iff n = 4^i \iff \log_4 n = \log_4 4^i$$

$$\iff \log_4 n = i \cdot \log_4 4 \iff \log_4 n = i$$

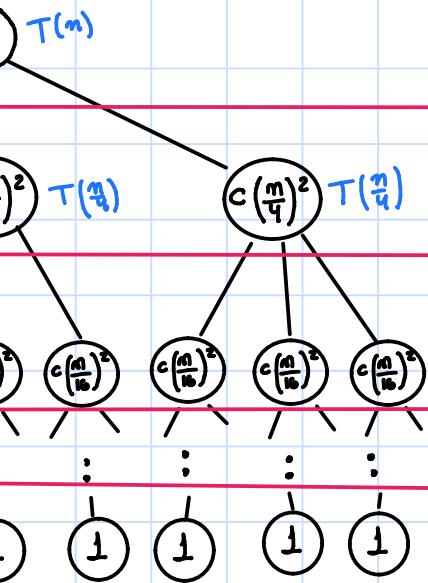
Níveis



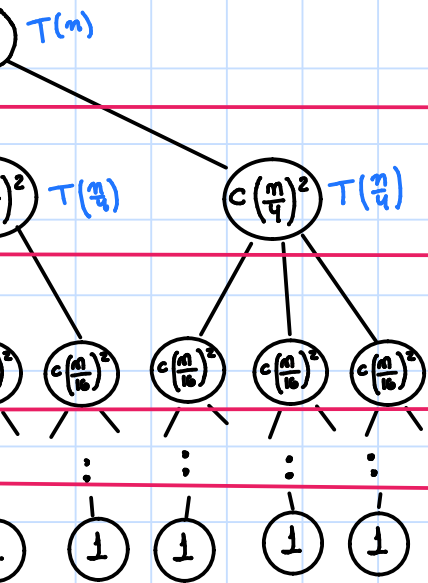
Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó
0	1	n	
1	3	$\frac{n}{4}$	
2	9	$\frac{n}{16}$	
i	3^i	$\frac{n}{4^i}$	$c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$
$\log_4 n$		1	

$$\frac{n}{4^i} = 1 \iff n = 4^i \iff \log_4 n = \log_4 4^i$$

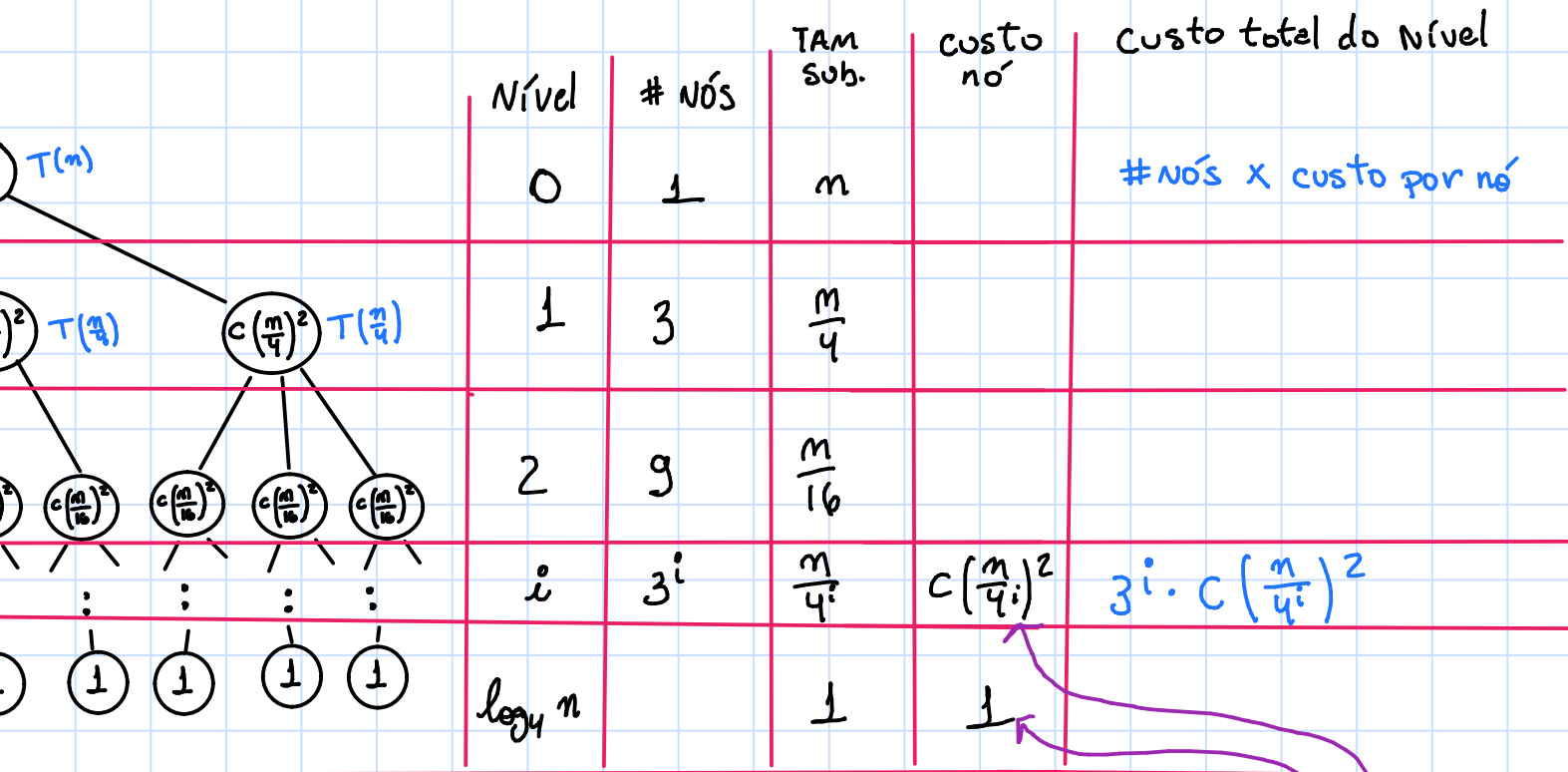
$$\iff \log_4 n = i \cdot \log_4 4 \iff \log_4 n = i$$



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó	custo total do Nível
0	1	n		#NÓS x custo por nó
1	3	$\frac{n}{4}$		
2	9	$\frac{n}{16}$		
i	3^i	$\frac{n}{4^i}$	$c \left(\frac{n}{4^i}\right)^2$	$3^i \cdot c \left(\frac{n}{4^i}\right)^2$
$\log_4 n$		1		

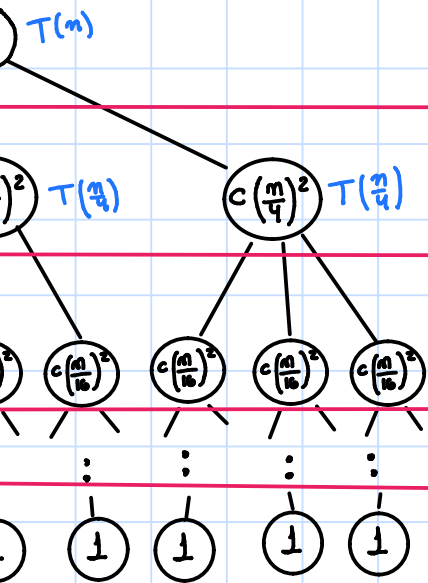


Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó	Custo total do Nível
0	1	n		#NÓS x custo por nó
1	3	$\frac{n}{4}$		
2	9	$\frac{n}{16}$		
i	3^i	$\frac{n}{4^i}$	$c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$	$3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$
$\log_4 n$		1	1	

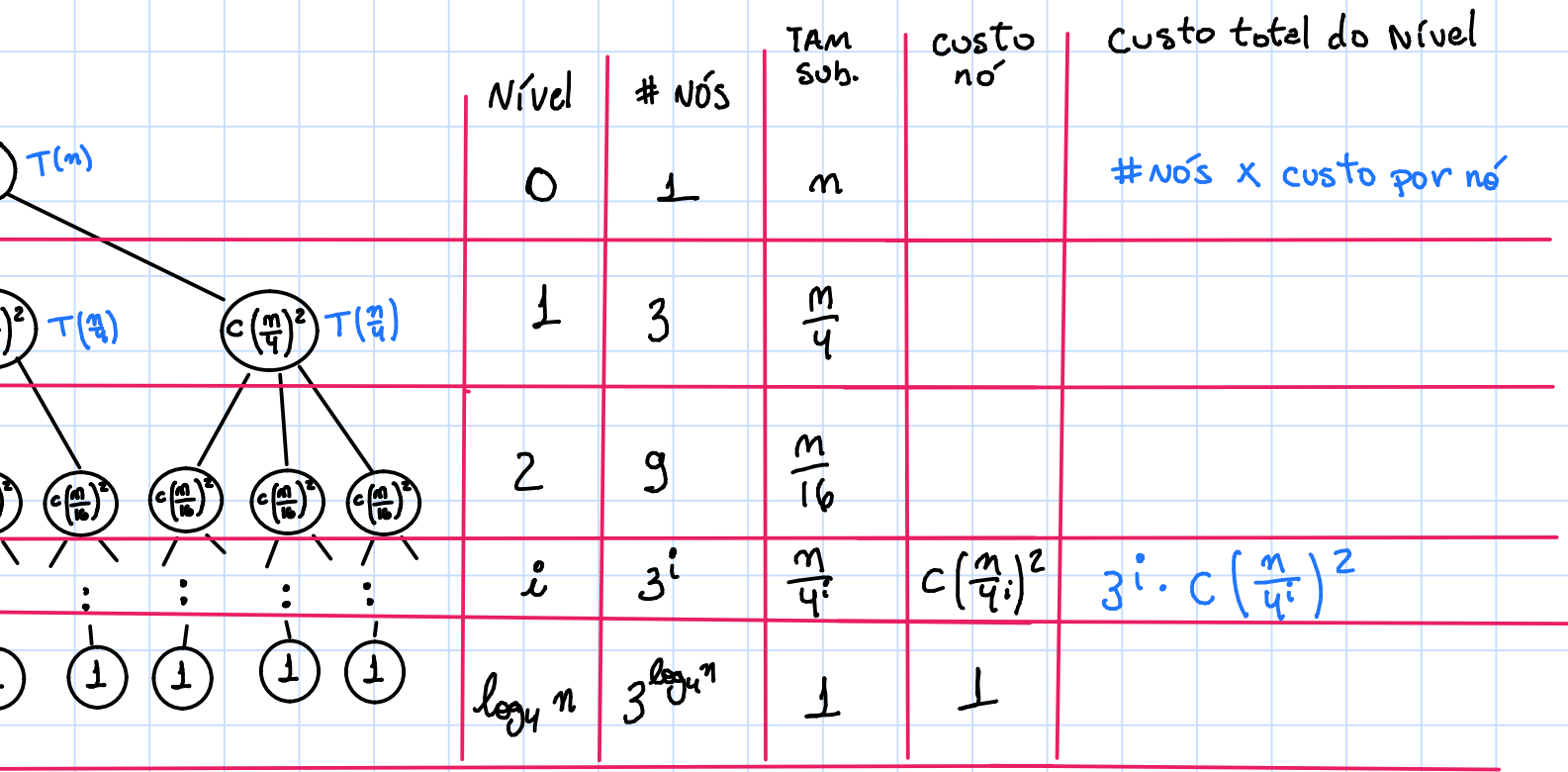


* mas não nesse caso :)

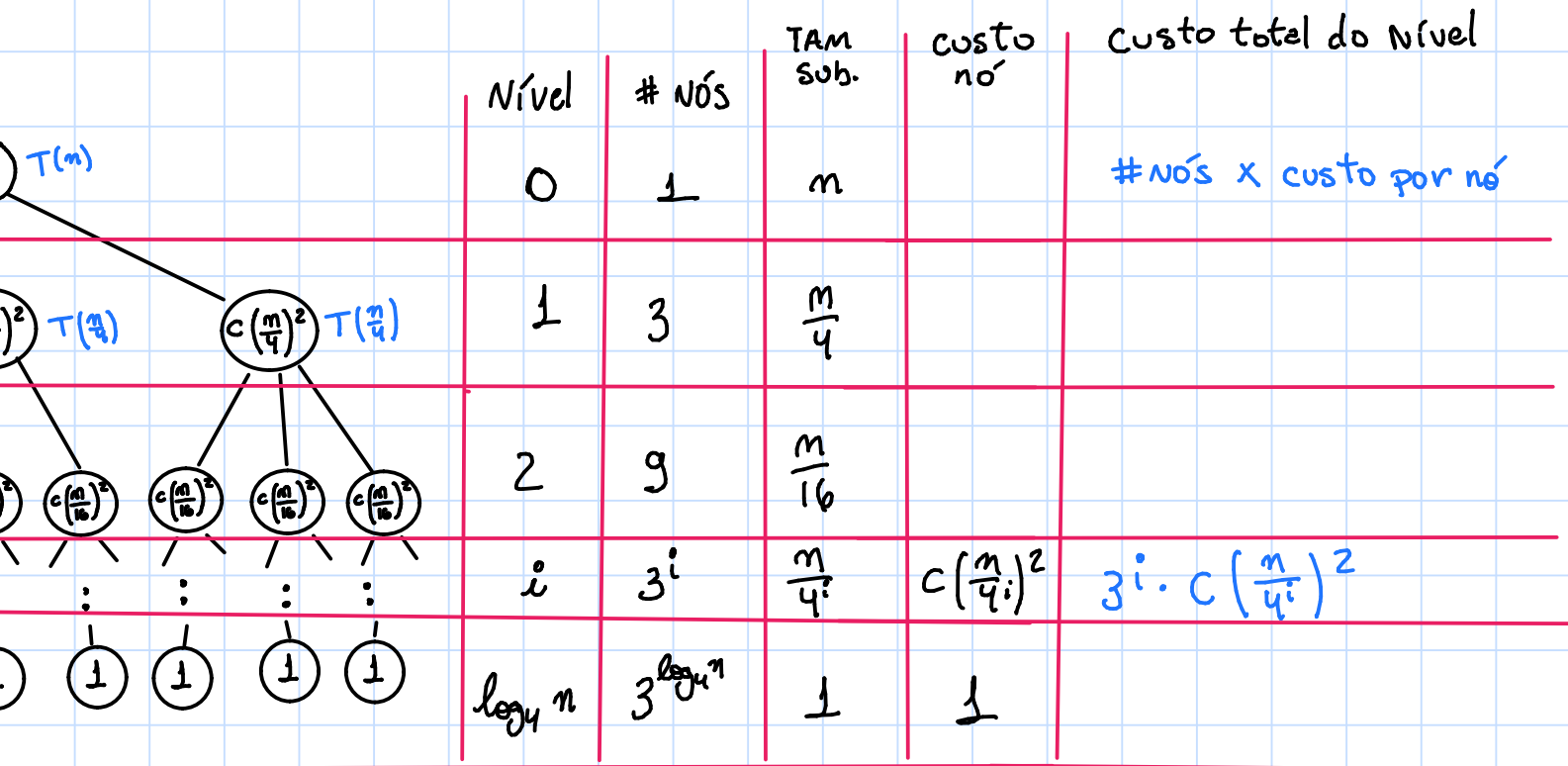
na maioria dos caso são iguais *



Nível	# NÓS	TAM Sub.	custo nó	Custo total do Nível
0	1	n		#NÓS x custo por nó
1	3	$\frac{n}{4}$		
2	9	$\frac{n}{16}$		
i	3^i	$\frac{n}{4^i}$	$c \left(\frac{n}{4^i}\right)^2$	$3^i \cdot c \left(\frac{n}{4^i}\right)^2$
$\log_4 n$	$3^{\log_4 n}$	1	1	



$T(n) = \sum$ do custo de todos os níveis internos + \sum do custo das Folhas



$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} 3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 + 3^{\log_4 n} \cdot 1$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} 3^i \cdot C \left(\frac{n}{4^i} \right)^2 + 3^{\log_4 n} \cdot 1$$

$$= C \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} 3^i \cdot \frac{n^2}{(4^i)^2} + 3^{\log_4 n}$$

$$= C n^2 \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4^2} \right)^i + 3^{\log_4 n}$$

$$= C n^2 \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16} \right)^i + n^{\log_4 3}$$

$$= C n^2 \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i + n^{\log_4 3}$$

$$\sum_{i=0}^n c_i = \frac{C^{n+1} - 1}{C - 1}$$

$$= C n^2 \left[\frac{\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n} - 1}{\frac{3}{16} - 1} \right] + n^{\log_4 3}$$

$$\frac{3}{16} - 1$$

$$\frac{3}{16} - \frac{16}{16}$$

$$= C n^2 \left[\left(n^{\log_4 \left(\frac{3}{16}\right)} - 1 \right) \cdot \frac{-16}{13} \right] + n^{\log_4 3}$$

$$\frac{-13}{16}$$

$$= \frac{-16 \cdot C n^2}{13} \left(n^{\log_4 3} - \log_4 16 - 1 \right) + n^{\log_4 3}$$

$$= \frac{-16 \cdot C n^2}{13} (n^{\log_4 3} - \log_4 16 - 1) + n^{\log_4 3}$$

$$= \frac{-16 \cdot C n^2}{13} (n^{\log_4 3} - 2 - 1) + n^{\log_4 3}$$

$$= \frac{-16}{13} C n^{\log_4 3} + \frac{16}{13} C n^2 + n^{\log_4 3}$$

$$= \frac{16}{13} \cdot C n^2 + \left(-\frac{16}{13} C + 1 \right) n^{\log_4 3} \quad \log_4 3 \approx 0.79$$

$$= \Theta(n^2)$$

Teorema

Mestre

Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ uma função. Para

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

Vale que

- Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
- Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e para n suficientemente grande temos $a f(n/b) \leq c f(n)$ para alguma constante $c < 1$, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$a = 2, b = 2, f(n) = n$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$$

$$\begin{aligned} f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) &= \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n) \\ &= \Theta(n \lg n) \end{aligned}$$

Caso ② do método Mestre

$$T(n) = 4T(n/10) + 5\sqrt{n}$$

$$a = 4$$

$$b = 10$$

$$n^{\log_{10} 4} \approx 0.6$$

$$f(n) = 5\sqrt{n}$$

$$f(n) = 5n^{0.5} = O(n^{0.6-0.1}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{0.6})$$

Caso 1 do Método Mestre

$$T(n) = 4T(n/2) + 10n^3$$

$$a = 4$$

$$b = 2$$

$$f(n) = 10n^3$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$$

$$f(n) = 10n^3 = \Omega(n^{2+\epsilon})$$

$$4 \cdot 10 \left(\frac{n}{2}\right)^3 \stackrel{?}{\leq} c \cdot 10n^3 \quad \text{para } n \geq n_0 \text{ e } c < 1$$

$$4 \cdot 10 \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{40}{8} n^3 = 5n^3 = \frac{1}{2} \cdot 10n^3 = \frac{1}{2} f(n)$$

$$\text{Portanto } T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

$$a = 2, \quad b = 2, \quad f(n) = n \log n$$

$$n^{\log_b a} = n^1$$

$$f(n) \neq O(n^{\log_b a - \epsilon}) = O(n^{1-\epsilon})$$

$$f(n) \neq \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) = \Omega(n^{1+\epsilon})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

$$a = 2, \quad b = 2, \quad f(n) = n \log n$$

$$n^{\log_b a} = n^1$$

$$f(n) \neq O(n^{\log_b a - \epsilon}) = O(n^{1-\epsilon})$$

$$f(n) \neq \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) = O(n^{1+\epsilon})$$

Não dá para usar o mestre

Exemplos para os quais o teorema

Mestre não se aplica

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(n) = T(n-1) + \lg n$$

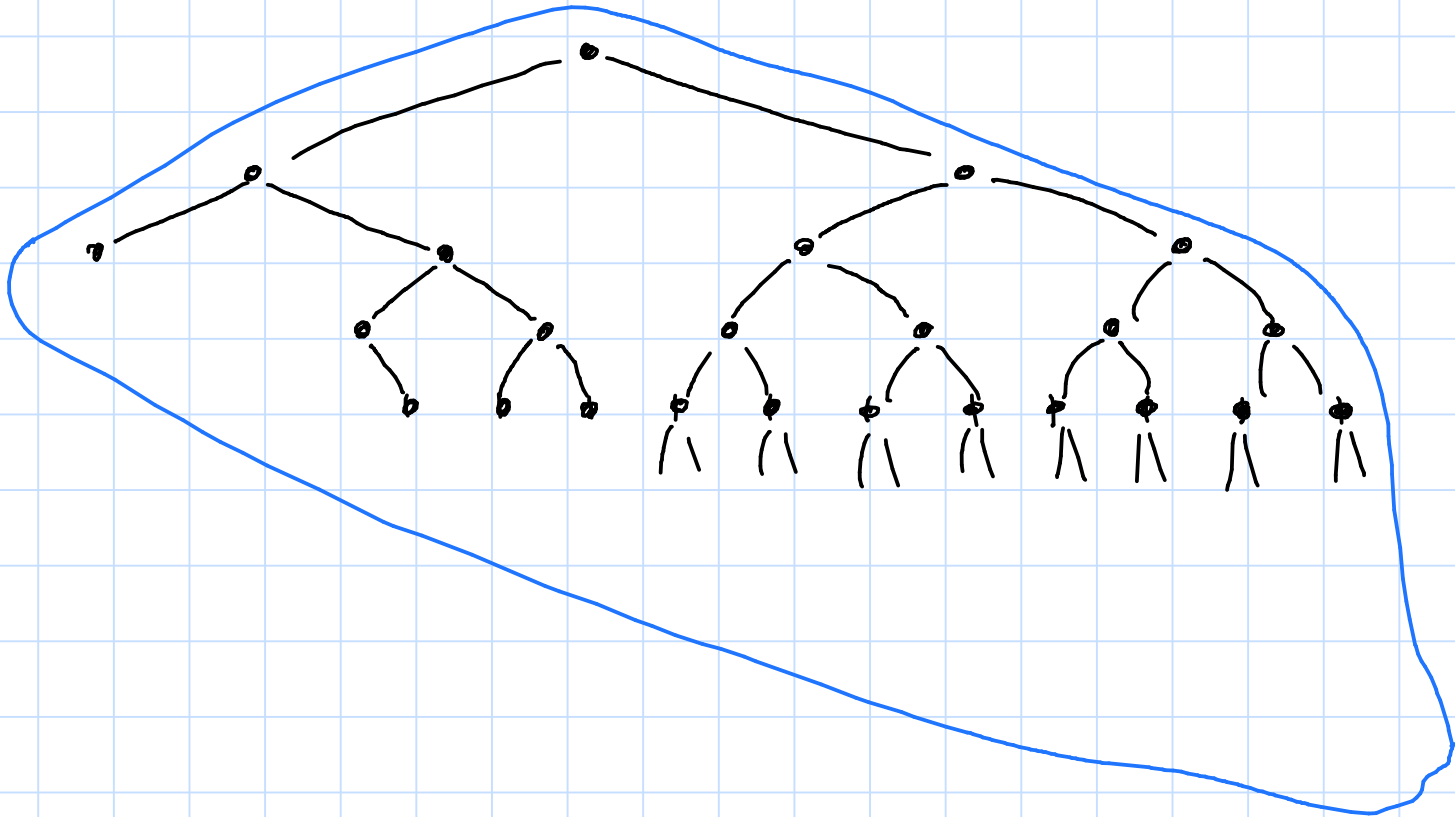
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg n$$

Outro Exemplo

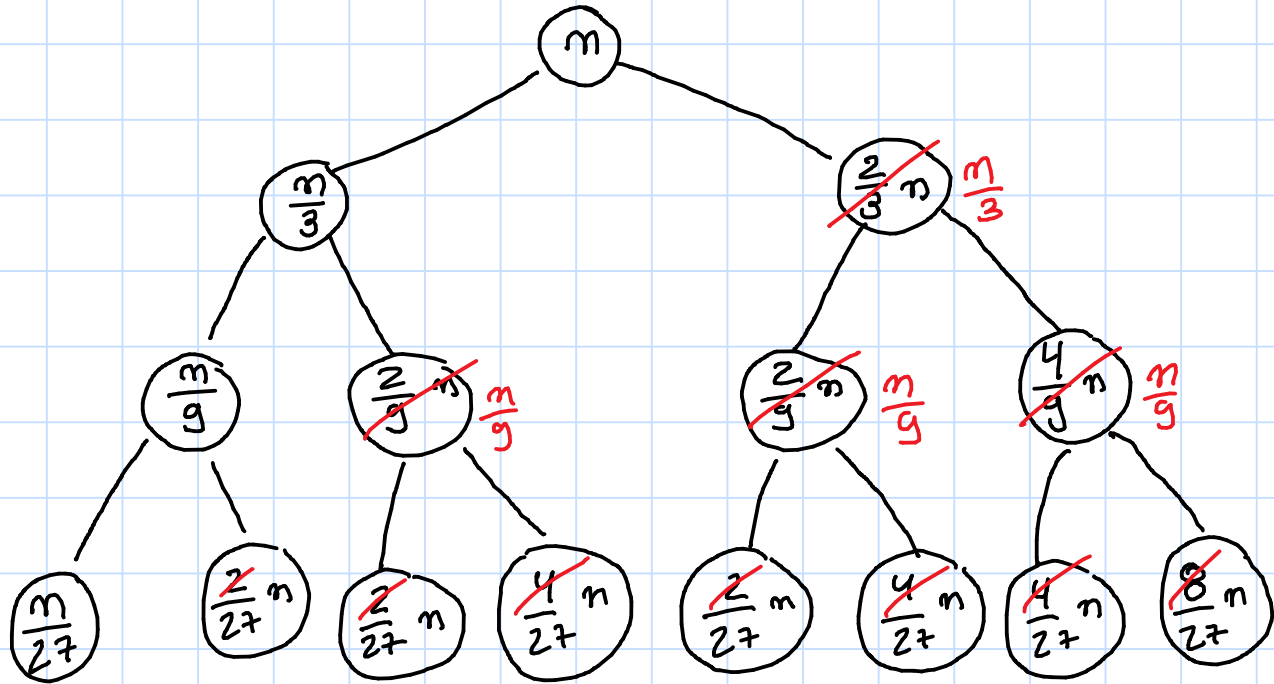
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{Se } n \leq 2 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n & \text{Se } n \geq 3 \end{cases}$$

- Vamos ter que unir forças:
 - Árvore
 - Método Mestre
 - substituição / iteração

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$



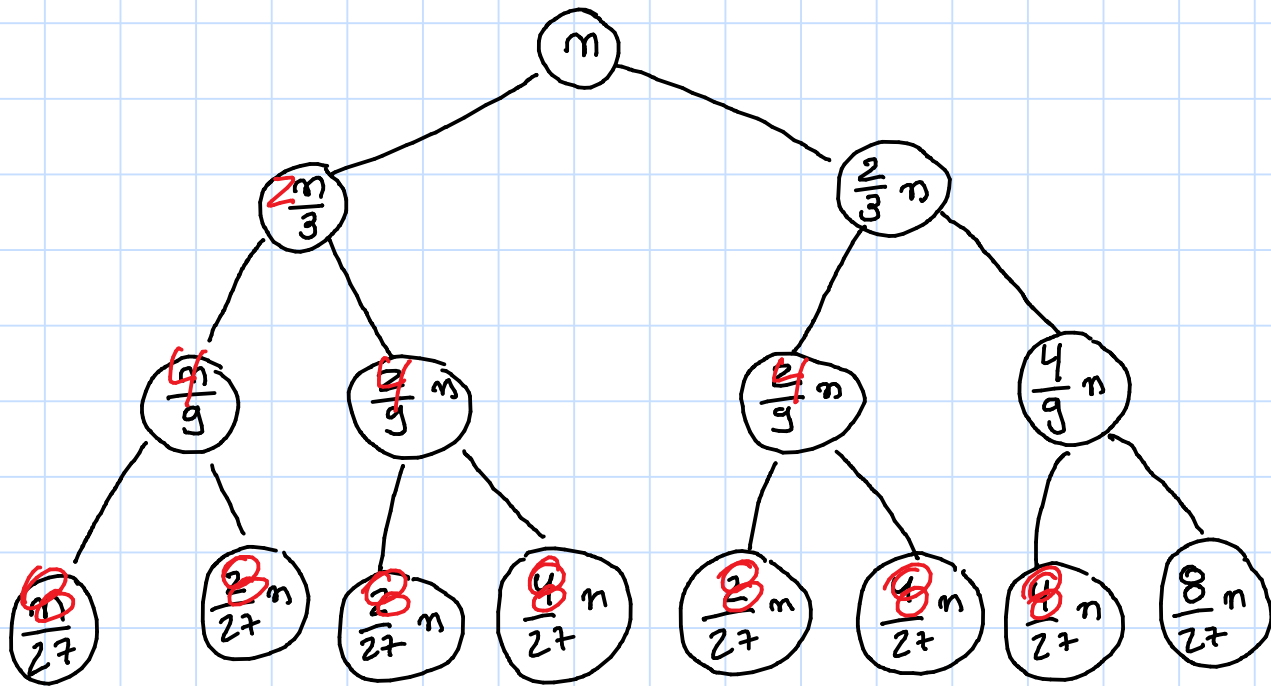
$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$



$$T'(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$T'(n) \leq T(n)$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

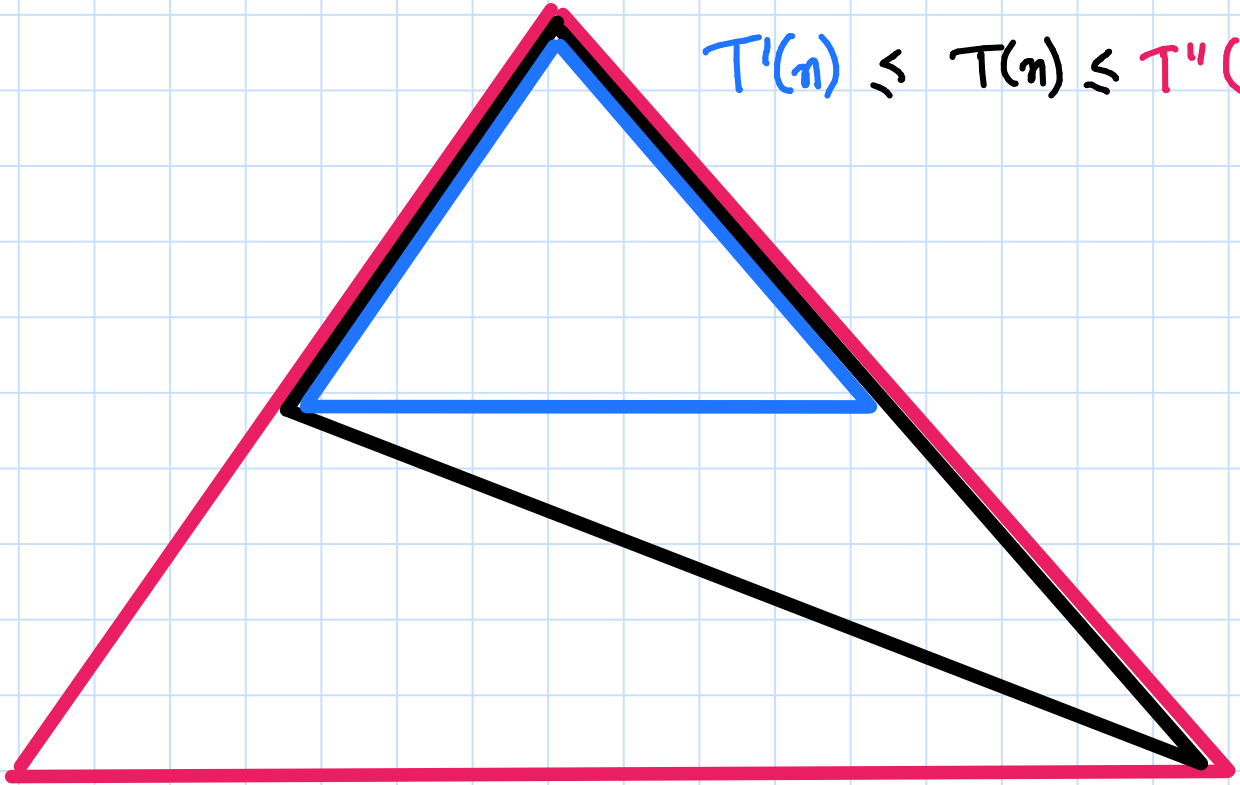


$$T''(n) = 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + n$$

$$T(n) \leq T''(n)$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

$$T'(n) \leq T(n) \leq T''(n)$$



$$T'(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 2, b = 3, f(n) = n \quad m^{\log_b a} = m^{\log_3 2} = m^{0.63}$$

$$f(n) = \Omega(m^{0.63 + \epsilon})$$

$$2\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot n$$

$$\frac{2}{3}n \leq c n \Rightarrow \text{Funciona } c = \frac{2}{3} < 1$$

$$\text{Logo } \Rightarrow T'(n) = \Theta(n)$$

$$T''(n) = 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + n$$

$$a = 2, \quad b = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad f(n) = n$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 2} = n^{1.7}$$

$$f(n) = n = O(n^{1.7 - \epsilon}) \Rightarrow T''(n) = \Theta(n^{1.7})$$

$$T'(n) = \Theta(n)$$

$$T''(n) = \Theta(n^{1.7})$$

$$\Theta(n) = T'(n) \leq T(n) \leq T''(n) = \Theta(n^{1.7})$$

Agora usamos o método de substituição para provar que

$$T(n) = \begin{cases} \perp \\ T(\lfloor n/3 \rfloor) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \end{cases}$$

e $O(\)$?