



**Lista 03**

**Prazo para entrega: 11-08-2023**

## 1 Instruções

- A entrega deve ser realizada presencialmente no início da aula.
- Você deve entregar duas vias da lista de exercícios.
- A lista deve ser feita à mão (caso você tenha um tablet com caneta stylus, você pode fazer usando o tablet e então entregar uma versão impressa da lista).
- A lista deve ser feita à caneta e sem resura.
- A lista é um trabalho individual.

## 2 Exercícios

1. Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias definidas sobre o mesmo espaço de probabilidade e sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Prove que

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

2. Seja  $(\Omega, \mathbb{P})$  um espaço probabilístico e seja  $X$  uma variável aleatória. Seja  $k \in \mathbb{R}$  uma constante. Prove que

- (a) Se  $\mathbb{E}[X] \geq k$ , então existe um elemento  $\omega \in \Omega$  tal que  $X(\omega) \geq k$ .
- (b) Se  $\mathbb{E}[X] \leq k$ , então existe um elemento  $\omega \in \Omega$  tal que  $X(\omega) \leq k$ .

3. Dados  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $0 < p < 1$ , prove que se  $pk \geq 2 \log n$ , então

$$\frac{en}{k} e^{-p(k-1)/2} \leq \frac{5}{k}.$$

4. Use o Teorema 5.3.11 para provar o Teorema de Turán: se um grafo  $G$  com  $n$  vértices é livre de  $K_r$ , então

$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$