Página professor.ufabc.edu.br/~m.sambinelli

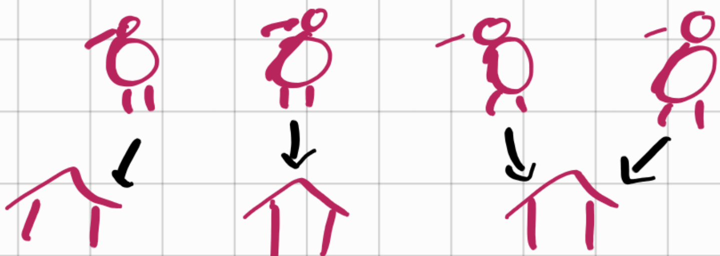
O que é combinatória Extremal?

É o campo da combinatória que lida com problemas do seguinte tipo: se uma coleção finita de objetos (números, grafos, vetores, conj.) satisfazem certas restrições, quão grande ou quão pequeno esses objetos podem ser?

Princípios e técnicas básicas em combinatória

Princípio da casa dos Pombos

Se há $n+1$ pombos a serem distribuidos em n casas, então há pelo menos uma casa com 2 pombos.



Princípio da casa dos Pombos Generalizado

Se há n pombos a serem distribuidos em k casas, onde $k < n$, então há pelo meno um casa com $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ pombos.

- Suponha p/ contradição que nenhuma casa contém $< \lceil n/k \rceil$ pombos
- caso: $n \not\equiv 0 \pmod{k}$

$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor < \lceil \frac{n}{k} \rceil$

c_i : # pombos na casa i

$$c_i < \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \Rightarrow c_i \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor < \frac{n}{k}$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} c_i < \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{k} = n$$

O princípio da casa dos pombos diz respeito a partição de conjuntos. Uma partição de um conj. V é uma família $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de subconjuntos de V tal que

1) $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V$ (cobertura)

2) $V_i \cap V_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ (empacotamento)

$$S = \{ \overset{1}{a}, \overset{1}{b}, \overset{2}{c}, \overset{3}{d}, \overset{3}{e} \}$$

$$T = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d, e,\} \}$$

Def: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$n \in \mathbb{N}$, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Uma outra forma de interpretarmos partições é como uma <u>coloração</u>. Dado um $r \in \mathbb{N}$, uma <u>r-coloração</u> é uma função $c: V \to [r]$ que atribui uma cor de $[r]$ para cada elemento de V.

Seja $A \subseteq [n]$. Dizemos que A é <u>livre de soma</u> se, para quaisquer $x, y \in A$, temos $x+y \notin A$

EX:

$\cancel{3}$ $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{8}$ $\cancel{9}$, $\cancel{11}$

$$A = \{1, 2, 4, 7\}$$

$$B = \{4, 7, 8\}$$

$$I = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$I_n = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, n\}$$ ímpar

$\hookrightarrow$ $|I_n| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$a = 2l + 1$
$b = 2t + 1$

$$a + b = 2l + 1 + 2t + 1$$
$$= 2(l+t) + 2$$
$$= 2(l+t+1)$$

1 2 3 4 5

Teo. Seja $n \in \mathbb{N}$. Seja $A \subseteq [n]$ é livre de soma, então $|A| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Demonstração

- Suponha p/ uma contradição que $\exists A \subseteq [n]$ livre de soma e que $|A| > \lceil n/2 \rceil$

$A = \{1, 2, 4, 7, 10\}$
$m = 10$

- Seja $m = \max A$
- Seja $B = \{m - a : a \in A\} \setminus \{0\}$
- $|A| = |B| + 1$
- Por Hip. $|A| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \Rightarrow |B| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$B = \{9, 8, 6, 3, \cancel{0}\}$

$$|A|+|B| \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$n = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad = \quad n+1$$

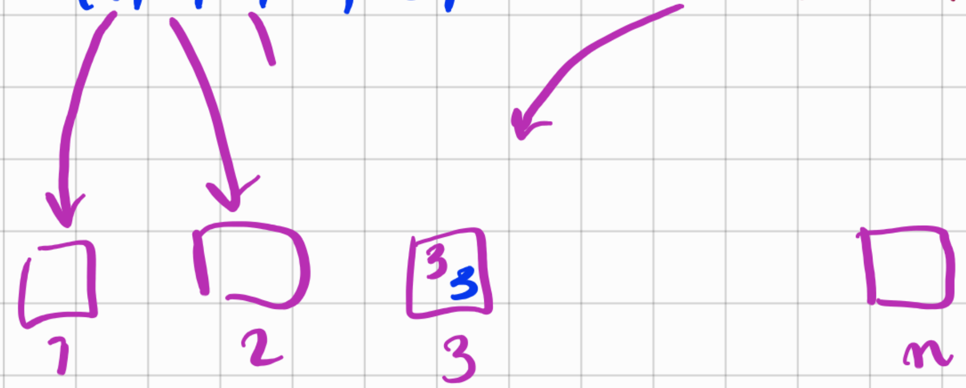
$$> \quad n$$

- Pelo princípio da casa dos pombos, existe $b \in A \cap B$

$$|A|+|B| > n$$

$2]$

$A = \{1, 2, 4, 7, 10\}$ $\quad$ $B = \{9, 8, 6, 3, \cancel{0}\}$



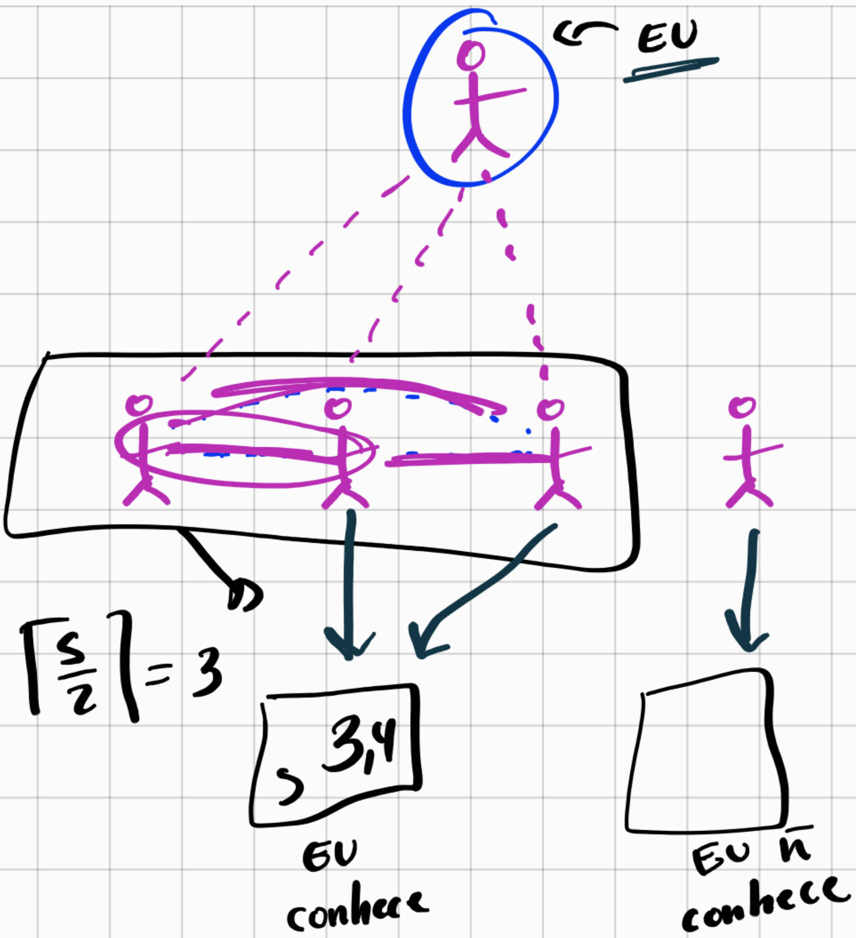
Então $b \in A \cap B \Rightarrow \quad b = m - a$

$$b + a = m$$

$$a, b, m \in A$$

$\square$

TEO. Em uma festa com 6 indivíduos, há 3 convidados que mutuamente se conhecem ou 3 que não se conhecem.



$$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$$

Contagem Dupla

- A contagem dupla se baseia no seguinte fato óbvio: Se os elementos de um conj. são contados de duas formas distintas, o resultado é o mesmo.

Def: Seja $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq 0$, escrevemos $\binom{n}{k}$ para denotar a quantidade de subconjuntos de $[n]$ de tamanho k

Também escrevemos $\binom{X}{k}$, onde X é um conj, para denotar todos os subconjuntos de X de tamanho k

Note que $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$

$[4] = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\binom{[4]}{2} = \left\{ \overset{1}{\{1,2\}}, \overset{2}{\{1,3\}}, \overset{3}{\{1,4\}}, \overset{4}{\{2,3\}}, \overset{5}{\{2,4\}}, \overset{6}{\{3,4\}} \right\}$$

$$\binom{4}{2} = 6$$

Prop. $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Teo Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então

$$\underline{\binom{n+1}{k+1}} = \underline{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}$$

↳ # sub conj. de tam. $k+1$ de um conj de tam $n+1$

$$\binom{n+1}{k+1} = \left| \left\{ \underbrace{\{\underbrace{1,\ldots,\ldots}_{k+1}\}, \{1, \ldots\}}_{1} \;\Big|\; \underbrace{\{\ \}, \{\ \}, \{\ \}}_{\binom{n}{k+1}} \right\} \right|$$

$n = 3$
$k = 1$

$\{1, 2, 3, 4\} \leftarrow$ conj de tamanho 2

$$\binom{3+1}{1+1} = \binom{4}{2} = \left| \left\{ \underbrace{\overset{1}{\{\underline{1},2\}}, \overset{2}{\{\underline{1},3\}}, \overset{3}{\{\underline{1},4\}}}_{\binom{n}{k}} \;\Big|\; \overset{4}{\{2,3\}}, \overset{5}{\{2,4\}}, \overset{6}{\{3,4\}} \right\} \right|$$

$(k+1)$

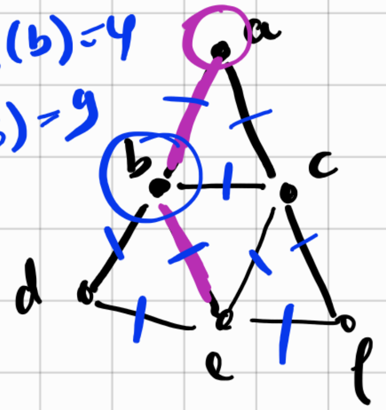
$\square$

Um grafo G é um par (V, E), onde V é um conj. de elementos chamado vértices e E é um conj. de pares não ordenados de vértices chamados de arestas.

$\{a, b\} = ab$

$d_G(b) = 4$

$e(G) = 9$



$G = (V, E)$, onde

$V = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E = \{ab, ac, bc, bd, be, ce, cf, de, ef\}$

Lema Aperto de mãos

Dado um grafo G, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2e(G).$$

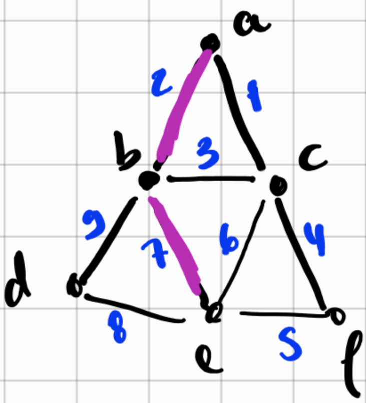
grau de um vértice v é o # de arestas que contém v

$d_G(v) = 4$

$e(G) = |E|$, onde $G = (V, E)$

- **Demo**
  - Seja $G = (V, E)$
  - Cria Matriz M $(|V| \times |E|)$

$$M[v][e] = \begin{cases} 1 & \text{se } e = uv \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$