Linguagens formais e Autômatos Finitos Determinísticos

CCM-104: Teoria da Computação

Prof. Maycon Sambinelli

m.sambinelli@ufabc.edu.br

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

Aula de Hoje

Objetivos de aprendizagem

- Aprendizado de conceitos de linguagens formais: alfabeto, cadeia, linguagem, etc.
- Aprendizado do conceito de Automato Finito Determinístico (AFD)
- Projetar um AFD para reconhecer uma determinada linguagem

Cadeias e Linguagens

Cadeias e Linguagens

- Um **alfabeto** é um conjunto finito de elementos chamados **símbolos**.

- Um **alfabeto** é um conjunto finito de elementos chamados **símbolos**.

Exemplo

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$

Cadeias e Linguagens

- Um **alfabeto** é um conjunto finito de elementos chamados **símbolos**.

Exemplo

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{a, b, \ldots, z\}$

Cadeias e Linguagens

- Um **alfabeto** é um conjunto finito de elementos chamados **símbolos**.

Exemplo

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{a, b, \ldots, z\}$
- $\Gamma_1 = \{0, 1, a, b, \text{😁}, \text{🍒}\}$

Cadeias e Linguagens

- Um **alfabeto** é um conjunto finito de elementos chamados **símbolos**.

Exemplo

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{a, b, \ldots, z\}$
- $\Gamma_1 = \{0, 1, a, b, \text{😀}, \text{🍒}\}$
- $\Gamma_2 = \{\text{if}, \text{while}, \text{for}, \text{=}\}$

Cadeias e Linguagens

- Um **alfabeto** é um conjunto finito de elementos chamados **símbolos**.

Exemplo

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{a, b, \ldots, z\}$
- $\Gamma_1 = \{0, 1, a, b,$ 😀, 🍒$\}$
- $\Gamma_2 = \{\text{if}, \text{while}, \text{for}, \text{=}\}$

Cadeias e Linguagens

- Um **alfabeto** é um conjunto finito de elementos chamados **símbolos**.

Exemplo

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{a, b, \ldots, z\}$
- $\Gamma_1 = \{0, 1, a, b,$ 😁, 🍒$\}$
- $\Gamma_2 = \{\text{if}, \text{while}, \text{for}, \texttt{=}\}$

- Geralmente são representados por letras gregas maiúsculas (Σ, Γ, Ω)

Cadeia

Dado um alfabeto Γ, uma **cadeia** (sobre um alfabeto) é uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in \Gamma$ para $1 \leq i \leq n$.

Cadeia

Dado um alfabeto Γ, uma **cadeia** (sobre um alfabeto) é uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in \Gamma$ para $1 \leq i \leq n$.

- Uma **cadeia** é uma sequência finita de símbolos de um alfabeto.

Cadeia

Dado um alfabeto Γ, uma **cadeia** (sobre um alfabeto) é uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in \Gamma$ para $1 \leq i \leq n$.

- Uma **cadeia** é uma sequência finita de símbolos de um alfabeto.

Cadeia

Dado um alfabeto Γ, uma **cadeia** (sobre um alfabeto) é uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in \Gamma$ para $1 \leq i \leq n$.

- Uma **cadeia** é uma sequência finita de símbolos de um alfabeto.

Exemplos

- 01001 é uma cadeia sobre o alfabeto $\{0, 1\}$

Cadeia

Dado um alfabeto Γ, uma **cadeia** (sobre um alfabeto) é uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in \Gamma$ para $1 \leq i \leq n$.

- Uma **cadeia** é uma sequência finita de símbolos de um alfabeto.

Exemplos

- 01001 é uma cadeia sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
- $abracadabra$ é uma cadeia sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$

Cadeia

Dado um alfabeto Γ, uma **cadeia** (sobre um alfabeto) é uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in \Gamma$ para $1 \leq i \leq n$.

- Uma **cadeia** é uma sequência finita de símbolos de um alfabeto.

Exemplos

- 01001 é uma cadeia sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
- $abracadabra$ é uma cadeia sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$

Cadeia

Dado um alfabeto Γ, uma **cadeia** (sobre um alfabeto) é uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in \Gamma$ para $1 \leq i \leq n$.

- Uma **cadeia** é uma sequência finita de símbolos de um alfabeto.

Exemplos

- 01001 é uma cadeia sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
- $abracadabra$ é uma cadeia sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$

- Cadeias geralmente são denotadas por letras gregas minúsculas ($\omega, \alpha, \beta, \gamma$)

Cadeia

Dado um alfabeto Γ, uma **cadeia** (sobre um alfabeto) é uma sequência $w_1 w_2 \cdots w_n$, onde $w_i \in \Gamma$ para $1 \leq i \leq n$.

- Uma **cadeia** é uma sequência finita de símbolos de um alfabeto.

Exemplos

- 01001 é uma cadeia sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
- $abracadabra$ é uma cadeia sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$

- Cadeias geralmente são denotadas por letras gregas minúsculas $(\omega, \alpha, \beta, \gamma)$
- Cadeias também são chamadas de **strings** ou **palavras**

Concatenação de cadeias

A **concatenação** da cadeia $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ com a cadeia $\beta = b_1 b_2 \cdots b_m$, denotada por $\alpha\beta$, é a cadeia $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$

Concatenação de cadeias

A **concatenação** da cadeia $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ com a cadeia $\beta = b_1 b_2 \cdots b_m$, denotada por $\alpha\beta$, é a cadeia $a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$

Exemplos

Sejam $\alpha = vovo$ e $\beta = juju$. Então

$$\alpha\beta = vovojuju$$

Potência de cadeia

Dado uma cadeia α, definimos

$$\alpha^k = \underbrace{\alpha\alpha\cdots\alpha}_{k}$$

Potência de cadeia

Dado uma cadeia α, definimos

$$\alpha^k = \underbrace{\alpha\alpha\cdots\alpha}_{k}$$

Exemplos

- Se $\alpha = aba$, então $\alpha^3 = \underbrace{aba}_{\alpha}\underbrace{aba}_{\alpha}\underbrace{aba}_{\alpha}$

Potência de cadeia

Dado uma cadeia α, definimos

$$\alpha^k = \underbrace{\alpha\alpha\cdots\alpha}_{k}$$

Exemplos

- Se $\alpha = aba$, então $\alpha^3 = \underbrace{aba}_{\alpha}\underbrace{aba}_{\alpha}\underbrace{aba}_{\alpha}$
- Se $\beta = 01110$, então $\beta^2 = \underbrace{01110}_{\beta}\underbrace{01110}_{\beta}$

Potência de cadeia (Cont.)

Abreviação. Quando $\alpha = a$, onde a é um símbolo do alfabeto, escrevemos a^k por brevidade.

Potência de cadeia (Cont.)

Abreviação. Quando $\alpha = a$, onde a é um símbolo do alfabeto, escrevemos a^k por brevidade.

Exemplos

$$ab^2ac^3b = a\underbrace{bb}_{b^2}a\underbrace{ccc}_{c^3}b$$

Comprimento de uma Cadeia

O **comprimento** de uma cadeia ω, denotado por $|\omega|$, é o número de elementos na sequência.

Comprimento de uma Cadeia

O **comprimento** de uma cadeia ω, denotado por $|\omega|$, é o número de elementos na sequência.

Exemplos

- $\omega = maycon$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$

Comprimento de uma Cadeia

O **comprimento** de uma cadeia ω, denotado por $|\omega|$, é o número de elementos na sequência.

Exemplos

- $\omega = maycon$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$
    - $|\omega| = 6$

Comprimento de uma Cadeia

O **comprimento** de uma cadeia ω, denotado por $|\omega|$, é o número de elementos na sequência.

Exemplos

- $\omega = maycon$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$
  - $|\omega| = 6$
- $\omega = 011011$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$

Comprimento de uma Cadeia

O **comprimento** de uma cadeia ω, denotado por $|\omega|$, é o número de elementos na sequência.

Exemplos

- $\omega = maycon$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$
  - $|\omega| = 6$
- $\omega = 011011$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega| = 6$

Comprimento de uma Cadeia

O **comprimento** de uma cadeia ω, denotado por $|\omega|$, é o número de elementos na sequência.

Exemplos

- $\omega = maycon$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$
  - $|\omega| = 6$
- $\omega = 011011$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega| = 6$
- $\omega = 011011$ sobre o alfabeto $\{1, 01, 11\}$

Comprimento de uma Cadeia

O **comprimento** de uma cadeia ω, denotado por $|\omega|$, é o número de elementos na sequência.

Exemplos

- $\omega = maycon$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$
  - $|\omega| = 6$
- $\omega = 011011$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega| = 6$
- $\omega = 011011$ sobre o alfabeto $\{1, 01, 11\}$
  - $|\omega| = 4$

Comprimento de uma Cadeia

O **comprimento** de uma cadeia ω, denotado por $|\omega|$, é o número de elementos na sequência.

Exemplos

- $\omega = maycon$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$
  - $|\omega| = 6$
- $\omega = 011011$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega| = 6$
- $\omega = 011011$ sobre o alfabeto $\{1, 01, 11\}$
  - $|\omega| = 4$

Número de ocorrências

Para um $\alpha \subseteq \Sigma$ e $\omega \in \Sigma^*$, denotamos por $|\omega|_\alpha$ o número de ocorrências em ω de símbolos de α.

Número de ocorrências

Para um $\alpha \subseteq \Sigma$ e $\omega \in \Sigma^*$, denotamos por $|\omega|_\alpha$ o número de ocorrências em ω de símbolos de α.

⚠ Abuso de notação

Para simplificar a escrita, abusaremos da notação escrevendo o subscrito como uma cadeia, ao invés de usarmos a notação de conjunto. Assim, ao invés de escrevermos $|\omega|_{\{a,o\}}$, escreveremos $|\omega|_{ao}$.

Número de ocorrências

Para um $\alpha \subseteq \Sigma$ e $\omega \in \Sigma^*$, denotamos por $|\omega|_\alpha$ o número de ocorrências em ω de símbolos de α.

⚠ Abuso de notação

Para simplificar a escrita, abusaremos da notação escrevendo o subscrito como uma cadeia, ao invés de usarmos a notação de conjunto. Assim, ao invés de escrevermos $|\omega|_{\{a,o\}}$, escreveremos $|\omega|_{ao}$.

Exemplos

- $\omega = 010010$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$

Número de ocorrências

Para um $\alpha \subseteq \Sigma$ e $\omega \in \Sigma^*$, denotamos por $|\omega|_\alpha$ o número de ocorrências em ω de símbolos de α.

⚠ Abuso de notação

Para simplificar a escrita, abusaremos da notação escrevendo o subscrito como uma cadeia, ao invés de usarmos a notação de conjunto. Assim, ao invés de escrevermos $|\omega|_{\{a,o\}}$, escreveremos $|\omega|_{ao}$.

Exemplos

- $\omega = 010010$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega|_0 = 4$

Número de ocorrências

Para um $\alpha \subseteq \Sigma$ e $\omega \in \Sigma^*$, denotamos por $|\omega|_\alpha$ o número de ocorrências em ω de símbolos de α.

⚠ Abuso de notação

Para simplificar a escrita, abusaremos da notação escrevendo o subscrito como uma cadeia, ao invés de usarmos a notação de conjunto. Assim, ao invés de escrevermos $|\omega|_{\{a,o\}}$, escreveremos $|\omega|_{ao}$.

Exemplos

- $\omega = 010010$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega|_0 = 4$
  - $|\omega|_1 = 2$

Número de ocorrências

Para um $\alpha \subseteq \Sigma$ e $\omega \in \Sigma^*$, denotamos por $|\omega|_\alpha$ o número de ocorrências em ω de símbolos de α.

⚠ Abuso de notação

Para simplificar a escrita, abusaremos da notação escrevendo o subscrito como uma cadeia, ao invés de usarmos a notação de conjunto. Assim, ao invés de escrevermos $|\omega|_{\{a,o\}}$, escreveremos $|\omega|_{ao}$.

Exemplos

- $\omega = 010010$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega|_0 = 4$
  - $|\omega|_1 = 2$
- $\omega = abobora$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$

Número de ocorrências

Para um $\alpha \subseteq \Sigma$ e $\omega \in \Sigma^*$, denotamos por $|\omega|_\alpha$ o número de ocorrências em ω de símbolos de α.

⚠ Abuso de notação

Para simplificar a escrita, abusaremos da notação escrevendo o subscrito como uma cadeia, ao invés de usarmos a notação de conjunto. Assim, ao invés de escrevermos $|\omega|_{\{a,o\}}$, escreveremos $|\omega|_{ao}$.

Exemplos

- $\omega = 010010$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega|_0 = 4$
  - $|\omega|_1 = 2$
- $\omega = abobora$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$
  - $|\omega|_{oa} = 4$

Número de ocorrências

Para um $\alpha \subseteq \Sigma$ e $\omega \in \Sigma^*$, denotamos por $|\omega|_\alpha$ o número de ocorrências em ω de símbolos de α.

⚠ Abuso de notação

Para simplificar a escrita, abusaremos da notação escrevendo o subscrito como uma cadeia, ao invés de usarmos a notação de conjunto. Assim, ao invés de escrevermos $|\omega|_{\{a,o\}}$, escreveremos $|\omega|_{ao}$.

Exemplos

- $\omega = 010010$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$
  - $|\omega|_0 = 4$
  - $|\omega|_1 = 2$
- $\omega = abobora$ sobre o alfabeto $\{a, b, \ldots, z\}$
  - $|\omega|_{oa} = 4$
  - $|\omega|_{br} = 3$

Cadeia vazia

A **cadeia vazia**, denotada por ε, é a cadeia de comprimento 0

Cadeia vazia

A **cadeia vazia**, denotada por ε, é a cadeia de comprimento 0

Note

Dada um cadeia ω sobre um alfabeto Σ

$$\omega\varepsilon = \varepsilon\omega = \omega$$

Cadeia reversa

O **reverso** da cadeia $\omega = w_1 w_2 \cdots w_n$, denotado por ω^R, é a cadeia $w_n w_{n-1} \cdots w_1$.

Cadeia reversa

O **reverso** da cadeia $\omega = w_1 w_2 \cdots w_n$, denotado por ω^R, é a cadeia $w_n w_{n-1} \cdots w_1$.

Exemplos

Se $\alpha = abcde$, então $\alpha^R = edcba$

Potência de alfabetos

Dado um alfabeto Σ, denotamos por Σ^k, o conjunto de todas as cadeias de comprimento k sobre o alfabeto Σ.

Potência de alfabetos

Dado um alfabeto Σ, denotamos por Σ^k, o conjunto de todas as cadeias de comprimento k sobre o alfabeto Σ.

Exemplos

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então

- $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$

Potência de alfabetos

Dado um alfabeto Σ, denotamos por Σ^k, o conjunto de todas as cadeias de comprimento k sobre o alfabeto Σ.

Exemplos

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então

- $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
- $\Sigma^1 = \{0, 1\}$

Potência de alfabetos

Dado um alfabeto Σ, denotamos por Σ^k, o conjunto de todas as cadeias de comprimento k sobre o alfabeto Σ.

Exemplos

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então

- $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
- $\Sigma^1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$

Potência de alfabetos

Dado um alfabeto Σ, denotamos por Σ^k, o conjunto de todas as cadeias de comprimento k sobre o alfabeto Σ.

Exemplos

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então

- $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
- $\Sigma^1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$
- $\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

Fecho de Kleene e Fecho positivo de um alfabeto

Dado um alfabeto Σ,

- o **fecho de Kleene** de Σ, denotado por Σ^*, é

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

Fecho de Kleene e Fecho positivo de um alfabeto

Dado um alfabeto Σ,

- o **fecho de Kleene** de Σ, denotado por Σ^*, é

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

- o **fecho positivo** de Σ, denotado por Σ^+, é

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$$

Fecho de Kleene e Fecho positivo de um alfabeto

Dado um alfabeto Σ,

- o **fecho de Kleene** de Σ, denotado por Σ^*, é

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

- o **fecho positivo** de Σ, denotado por Σ^+, é

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$$

Fecho de Kleene e Fecho positivo de um alfabeto

Dado um alfabeto Σ,

- o **fecho de Kleene** de Σ, denotado por Σ^*, é

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

- o **fecho positivo** de Σ, denotado por Σ^+, é

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$$

Exemplos

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então

- $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 100, \ldots\}$

Fecho de Kleene e Fecho positivo de um alfabeto

Dado um alfabeto Σ,

- o **fecho de Kleene** de Σ, denotado por Σ^*, é

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

- o **fecho positivo** de Σ, denotado por Σ^+, é

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma^i = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$$

Exemplos

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então

- $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 100, \ldots\}$
- $\Sigma^1 = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 100, \ldots\}$

Subcadeia

Uma cadeia β é **subcadeia** de uma cadeia ω, denotado por $\beta \trianglelefteq \omega$, se existem cadeias α e γ tais que $\omega = \alpha\beta\gamma$.

Subcadeia

Uma cadeia β é **subcadeia** de uma cadeia ω, denotado por $\beta \trianglelefteq \omega$, se existem cadeias α e γ tais que $\omega = \alpha\beta\gamma$.

Exemplos

- $\beta = ab$ é subcadeia de $\omega = aaaabbb$, pois $\omega = \underbrace{aaa}_{\alpha}\underbrace{ab}_{\beta}\underbrace{bb}_{\gamma}$

Subcadeia

Uma cadeia β é **subcadeia** de uma cadeia ω, denotado por $\beta \trianglelefteq \omega$, se existem cadeias α e γ tais que $\omega = \alpha\beta\gamma$.

Exemplos

- $\beta = ab$ é subcadeia de $\omega = aaaabbb$, pois $\omega = \underbrace{aaa}_{\alpha}\underbrace{ab}_{\beta}\underbrace{bb}_{\gamma}$
- $\beta = 01$ é subcadeia de $\omega = 01101$, pois $\omega = \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{01}_{\beta}\underbrace{101}_{\gamma}$

Subcadeia

Uma cadeia β é **subcadeia** de uma cadeia ω, denotado por $\beta \trianglelefteq \omega$, se existem cadeias α e γ tais que $\omega = \alpha\beta\gamma$.

Exemplos

- $\beta = ab$ é subcadeia de $\omega = aaaabbb$, pois $\omega = \underbrace{aaa}_{\alpha}\underbrace{ab}_{\beta}\underbrace{bb}_{\gamma}$
- $\beta = 01$ é subcadeia de $\omega = 01101$, pois $\omega = \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{01}_{\beta}\underbrace{101}_{\gamma}$
- $\beta = ba$ é subcadeia de $\omega = aaabba$, pois $\omega = \underbrace{aaab}_{\alpha}\underbrace{ba}_{\beta}\underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$

Subcadeia

Uma cadeia β é **subcadeia** de uma cadeia ω, denotado por $\beta \trianglelefteq \omega$, se existem cadeias α e γ tais que $\omega = \alpha\beta\gamma$.

Exemplos

- $\beta = ab$ é subcadeia de $\omega = aaaabbb$, pois $\omega = \underbrace{aaa}_{\alpha}\underbrace{ab}_{\beta}\underbrace{bb}_{\gamma}$
- $\beta = 01$ é subcadeia de $\omega = 01101$, pois $\omega = \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{01}_{\beta}\underbrace{101}_{\gamma}$
- $\beta = ba$ é subcadeia de $\omega = aaabba$, pois $\omega = \underbrace{aaab}_{\alpha}\underbrace{ba}_{\beta}\underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$
- $cac \trianglelefteq batcactc$

Subcadeia

Uma cadeia β é **subcadeia** de uma cadeia ω, denotado por $\beta \trianglelefteq \omega$, se existem cadeias α e γ tais que $\omega = \alpha\beta\gamma$.

Exemplos

- $\beta = ab$ é subcadeia de $\omega = aaaabbb$, pois $\omega = \underbrace{aaa}_{\alpha}\underbrace{ab}_{\beta}\underbrace{bb}_{\gamma}$
- $\beta = 01$ é subcadeia de $\omega = 01101$, pois $\omega = \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{01}_{\beta}\underbrace{101}_{\gamma}$
- $\beta = ba$ é subcadeia de $\omega = aaabba$, pois $\omega = \underbrace{aaab}_{\alpha}\underbrace{ba}_{\beta}\underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$
- $cac \trianglelefteq batcactc$

Subcadeia

Uma cadeia β é **subcadeia** de uma cadeia ω, denotado por $\beta \trianglelefteq \omega$, se existem cadeias α e γ tais que $\omega = \alpha\beta\gamma$.

Exemplos

- $\beta = ab$ é subcadeia de $\omega = aaaabbb$, pois $\omega = \underbrace{aaa}_{\alpha}\underbrace{ab}_{\beta}\underbrace{bb}_{\gamma}$
- $\beta = 01$ é subcadeia de $\omega = 01101$, pois $\omega = \underbrace{\varepsilon}_{\alpha}\underbrace{01}_{\beta}\underbrace{101}_{\gamma}$
- $\beta = ba$ é subcadeia de $\omega = aaabba$, pois $\omega = \underbrace{aaab}_{\alpha}\underbrace{ba}_{\beta}\underbrace{\varepsilon}_{\gamma}$
- $cac \trianglelefteq batcactc$

Obs: note que ε é subcadeia de qualquer cadeia.

Subcadeia

Seja $\alpha \trianglelefteq \omega$. Dizemos que

- α é uma **subcadeia própria**, denotado por $\alpha \triangleleft \omega$, se $\alpha \neq \omega$.
- α é uma **subcadeia não degenerada** se $\alpha \neq \varepsilon$.

Prefixo e Sufixo

Sejam α e ω duas cadeias de Σ^*.

- Dizemos que α é **prefixo** de ω, denotado por $\alpha \sqsubseteq \omega$, se $\omega = \alpha\beta$, para alguma cadeia $\beta \in \Sigma^*$.
- Dizemos que α é **sufixo** de ω, denotado por $\alpha \sqsupseteq \omega$, se $\omega = \beta\alpha$, para alguma cadeia $\beta \in \Sigma^*$.
- Um prefixo (resp. sufixo) α é **próprio**, denotado por $\sqsubset$ (resp. $\sqsupset$), se $\alpha \neq \varepsilon$.

Prefixo e Sufixo

Sejam α e ω duas cadeias de Σ^*.

- Dizemos que α é **prefixo** de ω, denotado por $\alpha \sqsubseteq \omega$, se $\omega = \alpha\beta$, para alguma cadeia $\beta \in \Sigma^*$.
- Dizemos que α é **sufixo** de ω, denotado por $\alpha \sqsupseteq \omega$, se $\omega = \beta\alpha$, para alguma cadeia $\beta \in \Sigma^*$.
- Um prefixo (resp. sufixo) α é **próprio**, denotado por $\sqsubset$ (resp. $\sqsupset$), se $\alpha \neq \varepsilon$.

Exemplos

- $telo \sqsupseteq martelo$
- $\varepsilon \sqsubseteq tubaina$
- $1011 \sqsubset 1011101110$
- $ina \sqsupset tubaina$

Linguagem

Definição

Uma **linguagem** L sobre um alfabeto Σ é um subconjunto de Σ^*, i.e.,

$$L \subseteq \Sigma^*.$$

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = |w|_1\}$

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \colon |w|_0 = |w|_1\}$
- $L_3 = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* \colon n \geq 1\}$

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \colon |w|_0 = |w|_1\}$
- $L_3 = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* \colon n \geq 1\}$
- $L_5 = \{\varepsilon\}$

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \colon |w|_0 = |w|_1\}$
- $L_3 = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* \colon n \geq 1\}$
- $L_5 = \{\varepsilon\}$
- $L_6 = \{\}$

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = |w|_1\}$
- $L_3 = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* : n \geq 1\}$
- $L_5 = \{\varepsilon\}$
- $L_6 = \{\}$
- $Evens = \{\omega 0 : w \in \{0,1\}^*\}$ linguagem dos inteiros não negativos pares (em binário)

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \colon |w|_0 = |w|_1\}$
- $L_3 = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* \colon n \geq 1\}$
- $L_5 = \{\varepsilon\}$
- $L_6 = \{\}$
- $Evens = \{\omega 0 \colon w \in \{0,1\}^*\}$ linguagem dos inteiros não negativos pares (em binário)
- $Palin = \{\omega \in \Sigma^* : \omega = \omega^R\}$ linguagem dos palíndromos

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \colon |w|_0 = |w|_1\}$
- $L_3 = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* \colon n \geq 1\}$
- $L_5 = \{\varepsilon\}$
- $L_6 = \{\}$
- $Evens = \{\omega 0 \colon w \in \{0,1\}^*\}$ linguagem dos inteiros não negativos pares (em binário)
- $Palin = \{\omega \in \Sigma^* \colon \omega = \omega^R\}$ linguagem dos palíndromos
- $Pythag = \{a^{i^2} b a^{j^2} b a^{k^2} \in \{a,b\}^* \colon$ existem $i, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $i^2 + j^2 = k^2\}$ a linguagem dos triângulos retângulos

Exemplos de Linguagem

Exemplos

- $L_1 = \{1, 10, 11, 100\}$.
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \colon |w|_0 = |w|_1\}$
- $L_3 = \{0^n 1^n \in \{0,1\}^* \colon n \geq 1\}$
- $L_5 = \{\varepsilon\}$
- $L_6 = \{\}$
- $Evens = \{\omega 0 \colon w \in \{0,1\}^*\}$ linguagem dos inteiros não negativos pares (em binário)
- $Palin = \{\omega \in \Sigma^* : \omega = \omega^R\}$ linguagem dos palíndromos
- $Pythag = \{a^{i^2} b a^{j^2} b a^{k^2} \in \{a, b\}^* \colon$ existem $i, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $i^2 + j^2 = k^2\}$ a linguagem dos triângulos retângulos
- $Primes = \{\omega \in \{1\}^* : \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ se $\exists k | |\omega| \Rightarrow k = 1$ ou $k = |\omega|\}$

Problema de interesse

Seja L uma linguagem sobre um alfabeto Σ e seja $\omega \in \Sigma^*$. A cadeia ω pertence ou não a linguagem L?

Autômatos Finitos Determinísticos

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD):

- É um modelo computacional com uma quantidade limitada (finita) de memória.

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD):

- É um modelo computacional com uma quantidade limitada (finita) de memória.
  - Modelo computacional mais simples que estudaremos no curso.

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD):

- É um modelo computacional com uma quantidade limitada (finita) de memória.
    - Modelo computacional mais simples que estudaremos no curso.
- Aplicações

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD):

- É um modelo computacional com uma quantidade limitada (finita) de memória.
    - Modelo computacional mais simples que estudaremos no curso.
- Aplicações
    - Modelagem de controladores simples: estabelecem uma terminologia e técnica padrão.

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD)

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD):

- É um modelo computacional com uma quantidade limitada (finita) de memória.
  - Modelo computacional mais simples que estudaremos no curso.
- Aplicações
  - Modelagem de controladores simples: estabelecem uma terminologia e técnica padrão.
  - Usado na fase de analise léxica dos compiladores.

Autômatos Finitos Determinísticos (AFD):

- É um modelo computacional com uma quantidade limitada (finita) de memória.
    - Modelo computacional mais simples que estudaremos no curso.
- Aplicações
    - Modelagem de controladores simples: estabelecem uma terminologia e técnica padrão.
    - Usado na fase de analise léxica dos compiladores.
- É um dispositivo reconhecedor de linguagem.

Diagrama de Estados do AFD M^*

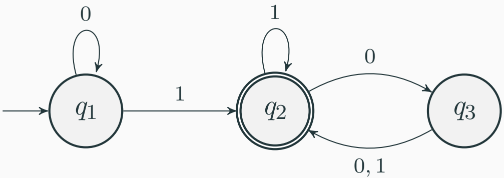
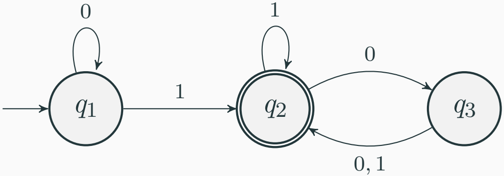
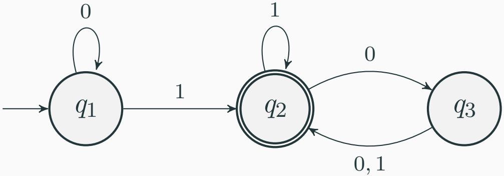


Diagrama de Estados do AFD M^*



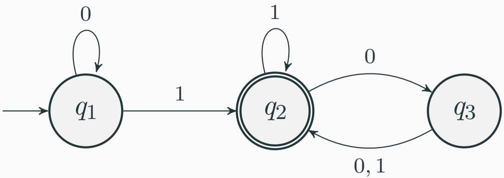
- três **estados**: q_1, q_2, q_3.

Diagrama de Estados do AFD M^*



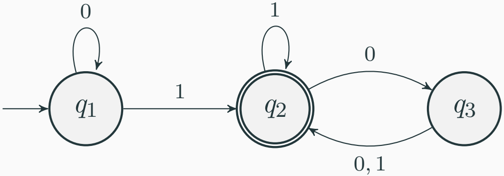
- três **estados**: q_1, q_2, q_3.
- O **estado inicial** (q_1) é indicado por uma flecha vinda de lugar algum.

Diagrama de Estados do AFD M^*



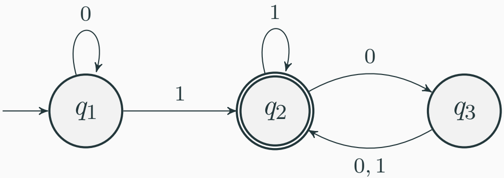
- três **estados**: q_1, q_2, q_3.
- O **estado inicial** (q_1) é indicado por uma flecha vinda de lugar algum.
- Um **estado final** (q_2) é indicado por um círculo com aro duplo.

Diagrama de Estados do AFD M^*



- três **estados**: q_1, q_2, q_3.
- O **estado inicial** (q_1) é indicado por uma flecha vinda de lugar algum.
- Um **estado final** (q_2) é indicado por um círculo com aro duplo.
- As flechas ligando estados são chamadas de **transições**.

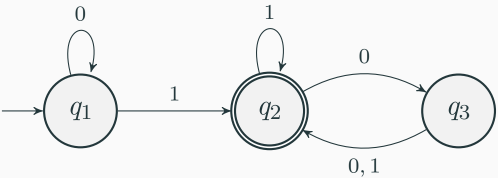
Diagrama de Estados do AFD M^*



- três **estados**: q_1, q_2, q_3.
- O **estado inicial** (q_1) é indicado por uma flecha vinda de lugar algum.
- Um **estado final** (q_2) é indicado por um círculo com aro duplo.
- As flechas ligando estados são chamadas de **transições**.
- Quando o autômato recebe uma cadeia de entrada, ele processa a cadeia e **aceita** ou **rejeita** ela.

Funcionamento de um autômato

Diagrama de Estados do AFD M^*

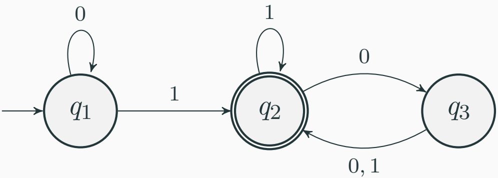


✎ Exemplo

Vamos processar as seguintes cadeias com o autômato M^*

- 010101

Diagrama de Estados do AFD M^*



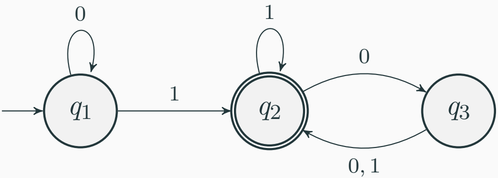
✎ Exemplo

Vamos processar as seguintes cadeias com o autômato M^*

- 010101
- 011000

Funcionamento de um autômato

Diagrama de Estados do AFD M^*

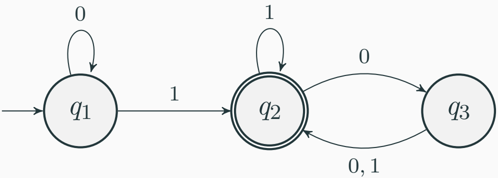


✎ Exemplo

Vamos processar as seguintes cadeias com o autômato M^*

- 010101
- 011000
- 100

Diagrama de Estados do AFD M^*

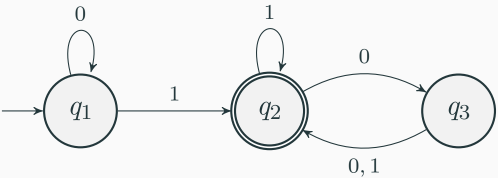


✎ Exemplo

Vamos processar as seguintes cadeias com o autômato M^*

- 010101
- 011000
- 100

Diagrama de Estados do AFD M^*



✎ Exemplo

Vamos processar as seguintes cadeias com o autômato M^*

- 010101
- 011000
- 100

Qual a linguagem aceita pelo autômato M^*?

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa
  - resolve incertezas sobre o que pode e não pode

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa
    - resolve incertezas sobre o que pode e não pode

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa
  - resolve incertezas sobre o que pode e não pode

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa
  - resolve incertezas sobre o que pode e não pode

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?
- Um autômato precisa ter um estado final?

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa
  - resolve incertezas sobre o que pode e não pode

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?
- Um autômato precisa ter um estado final?
- Um autômato pode ter mais do que um estado final?

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa
  - resolve incertezas sobre o que pode e não pode

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?
- Um autômato precisa ter um estado final?
- Um autômato pode ter mais do que um estado final?
- Cada estado precisa ter uma flecha saindo com cada símbolo do alfabeto?

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa
  - resolve incertezas sobre o que pode e não pode

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?
- Um autômato precisa ter um estado final?
- Um autômato pode ter mais do que um estado final?
- Cada estado precisa ter uma flecha saindo com cada símbolo do alfabeto?

Definição formal (matematiquês)

- Uma definição formal é precisa
  - resolve incertezas sobre o que pode e não pode

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?
- Um autômato precisa ter um estado final?
- Um autômato pode ter mais do que um estado final?
- Cada estado precisa ter uma flecha saindo com cada símbolo do alfabeto?

- Ademais, definição formal provê notação adequada

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial

Autômatos Finitos Determinísticos

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Autômatos Finitos Determinísticos

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Perguntas

Autômatos Finitos Determinísticos

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?

Autômatos Finitos Determinísticos

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?

Autômatos Finitos Determinísticos

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?
- Um autômato precisa ter um estado final?

Autômatos Finitos Determinísticos

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?
- Um autômato precisa ter um estado final?
- Um autômato pode ter mais do que um estado final?

Autômatos Finitos Determinísticos

Definição

Uma **autômato finito determinístico (AFD)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Perguntas

- Um autômato pode ter mais do que um estado inicial?
- Um autômato pode ter mais de uma flecha saindo do mesmo estado com o mesmo símbolo do alfabeto?
- Um autômato precisa ter um estado final?
- Um autômato pode ter mais do que um estado final?
- Cada estado precisa ter uma flecha saindo com cada símbolo do alfabeto?

Diagrama de Estados do AFD M^*

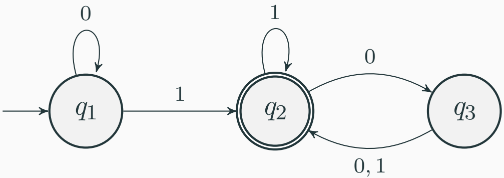
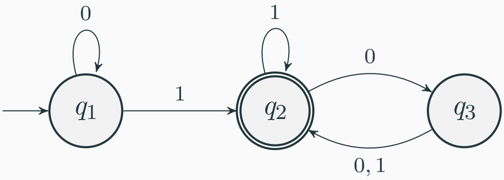


Diagrama de Estados do AFD M^*



$M^* = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, onde $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_2\}$ e δ é definido como

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

Dissecando um AFD

- A memória do AFD = seus estados = Finita

Dissecando um AFD

- A memória do AFD = seus estados = Finita
- **Determinismo:** para cada símbolo da entrada existe exatamente um estado para o qual o autômato pode transitar do estado atual

Aceite em um AFD

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ um AFD e seja $\omega = w_1 w_2 \cdots w_n$ uma cadeia sobre Σ. Dizemos que M **aceita** ω se existe uma sequência de estados $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ tal que

- $r_1 = q_1$
- $\delta(r_i, w_i) = r_{i+1}, \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$
- $r_n \in F$

Linguagem reconhecida por um autômato

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFD M aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de M

Linguagem reconhecida por um autômato

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFD M aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de M
- $L(M) = X$

Linguagem reconhecida por um autômato

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFD M aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de M
- $L(M) = X$
- M **reconhece** X

Linguagem reconhecida por um autômato

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFD M aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de M
- $L(M) = X$
- M **reconhece** X

Linguagem reconhecida por um autômato

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFD M aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de M
- $L(M) = X$
- M **reconhece** X

Exemplos

$L(M^*) = \{w \in \{0,1\}^* \colon w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1\}$.

Linguagem reconhecida por um autômato

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFD M aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de M
- $L(M) = X$
- M **reconhece** X

Exemplos

$L(M^*) = \{w \in \{0,1\}^* \colon w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1\}$.

⚠ Warning

Um AFD aceita várias cadeias mas reconhece apenas uma linguagem!

Configuração Instantânea de um AFD

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD e seja $\omega \in \Sigma^*$.

Note que ao processar um AFD, podemos determinar a **configuração (instantânea)** do processamento da entrada por um par (q, β), onde $q \in Q$ e β é o sufixo da cadeia ω que ainda falta ser processada pelo AFD.

Configuração Instantânea de um AFD

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD e seja $\omega \in \Sigma^*$.

Note que ao processar um AFD, podemos determinar a **configuração (instantânea)** do processamento da entrada por um par (q, β), onde $q \in Q$ e β é o sufixo da cadeia ω que ainda falta ser processada pelo AFD.

Usamos os símbolos $\vdash$ e $\overset{*}{\vdash}$ para denotar transições para uma nova configuração.

- Se $(q, a\gamma)$ é uma configuração e $\delta(q, a) = p$, então escrevemos $(q, a\gamma) \vdash (p, \gamma)$.

Configuração Instantânea de um AFD

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD e seja $\omega \in \Sigma^*$.

Note que ao processar um AFD, podemos determinar a **configuração (instantânea)** do processamento da entrada por um par (q, β), onde $q \in Q$ e β é o sufixo da cadeia ω que ainda falta ser processada pelo AFD.

Usamos os símbolos $\vdash$ e $\overset{*}{\vdash}$ para denotar transições para uma nova configuração.

- Se $(q, a\gamma)$ é uma configuração e $\delta(q, a) = p$, então escrevemos $(q, a\gamma) \vdash (p, \gamma)$.
- Se (p, γ) e (q, β) são configurações, então escrevemos $(p, \gamma) \overset{*}{\vdash} (q, \beta)$ para denotar que existe uma sequência de configurações tal que

$$(p, \gamma) = (r_1, \lambda_1) \vdash (r_2, \lambda_2) \vdash \cdots \vdash (r_\ell, \lambda_\ell) = (q, \beta)$$

Função de Transição Estendida (informal)

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um Autômato Finito Determinístico.

A **função de transição estendida** de M: $\hat{\delta}(q, \omega)$

Função de Transição Estendida (informal)

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um Autômato Finito Determinístico.

A **função de transição estendida** de M: $\hat{\delta}(q, \omega)$

- Entrada: um estado q e uma cadeia ω

Função de Transição Estendida (informal)

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um Autômato Finito Determinístico.

A **função de transição estendida** de M: $\hat{\delta}(q, \omega)$

- Entrada: um estado q e uma cadeia ω
- Saída: o estado ativo de M após o processamento de toda a cadeia ω, começando a execução pelo estado q

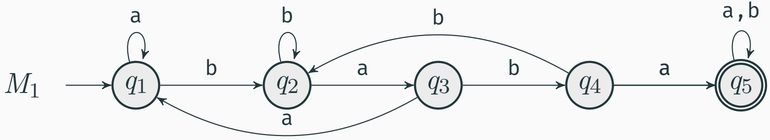
Função de Transição Estendida (formal)

Definição

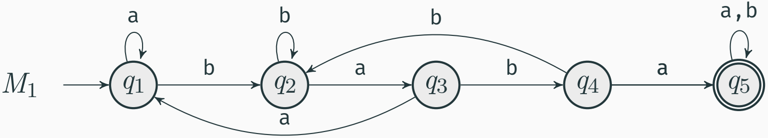
Dado um Autômato Finito Determinístico $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
A **função de transição estendida** de M é a função $\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ definida como:

$$\hat{\delta}(q, \omega) = \begin{cases} q & \text{se } \omega = \varepsilon \\ \delta(\hat{\delta}(q, \alpha), a) & \text{se } \omega = \alpha a \text{ e } a \in \Sigma \end{cases}$$

Autômatos finitos determinísticos - Transição Estendida



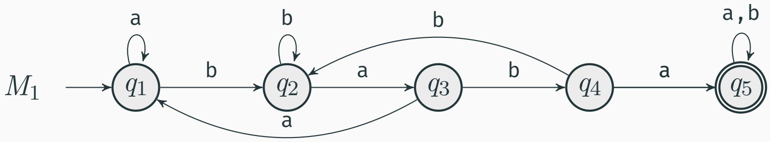
Autômatos finitos determinísticos - Transição Estendida



✎ Exemplo

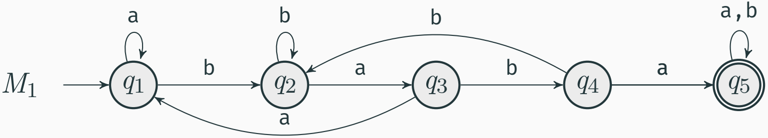
- $\hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aabba}) = q_3$

Autômatos finitos determinísticos - Transição Estendida



✎ Exemplo

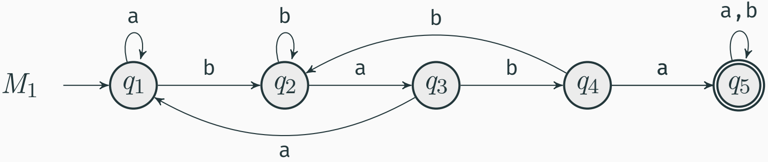
- $\hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aabba}) = q_3$
- $\hat{\delta}_1(q_2, \varepsilon) = q_2$



✎ Exemplo

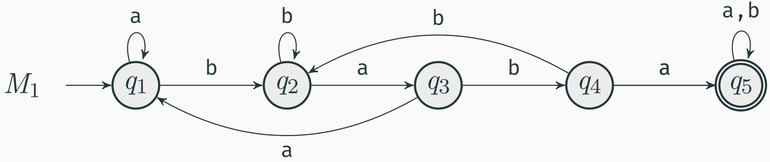
- $\hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aabba}) = q_3$
- $\hat{\delta}_1(q_2, \varepsilon) = q_2$
- $\hat{\delta}_1(q_4, \texttt{abbba}) = q_5$

Computando $\omega =$ aabbabaa em M_1



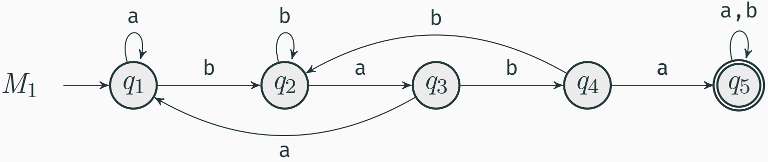
estados ativos	cadeia
q_1	

Computando $\omega =$ aabbabaa em M_1



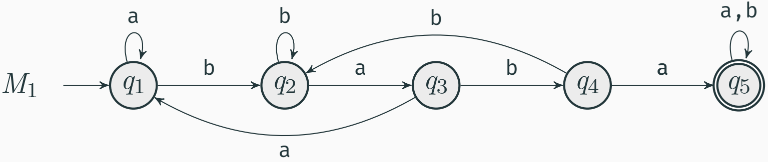
estados ativos	cadeia
q_1	$\underline{\text{a}}$abbabaa
q_1	

Computando $\omega =$ aabbabaa em M_1



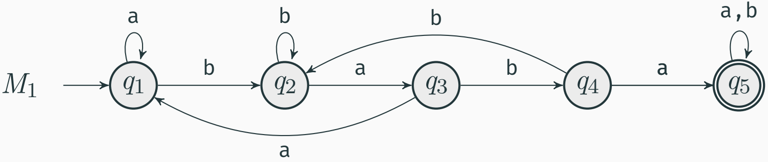
estados ativos	cadeia
q_1	$\underline{\mathtt{a}}\mathtt{abbabaa}$
q_1	$\mathtt{a}\underline{\mathtt{a}}\mathtt{bbabaa}$
q_1	

Computando $\omega =$ aabbabaa em M_1



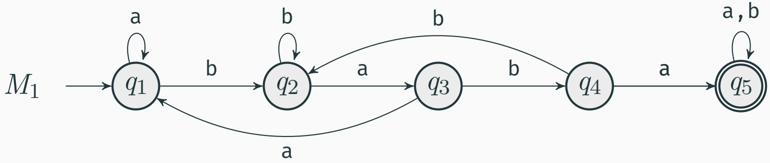
estados ativos	cadeia
q_1	aabbabaa
q_1	aabbabaa
q_1	aabbabaa
q_2	

Computando $\omega =$ aabbabaa em M_1



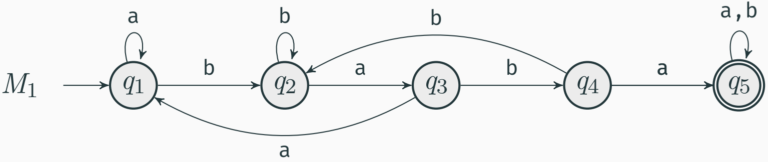
estados ativos	cadeia
q_1	aabbabaa
q_1	aabbabaa
q_1	aabbabaa
q_2	aabbabaa
q_2	

Computando $\omega =$ aabbabaa em M_1



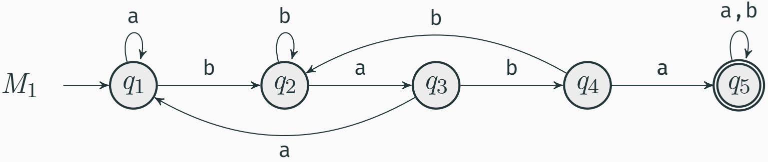
estados ativos	cadeia
q_1	aabbabaa
q_1	aabbabaa
q_1	aabbabaa
q_2	aabbabaa
q_2	aabbabaa
q_3	

Computando $\omega =$ aabbabaa em M_1



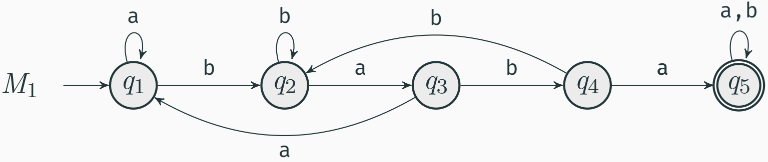
estados ativos	cadeia
q_1	aabbabaa
q_1	aabbabaa
q_1	aabbabaa
q_2	aabbabaa
q_2	aabbabaa
q_3	aabbabaa
q_4	aabbabaa
q_5	aabbabaa
q_5	aabbabaa_

Computando $\omega = \mathtt{aabbabaa}$ em M_1



estados ativos	cadeia
q_1	$\mathtt{\underline{a}abbabaa}$
q_1	$\mathtt{a\underline{a}bbabaa}$
q_1	$\mathtt{aa\underline{b}babaa}$
$q_2 = \hat{\delta}_1(q_1, \mathtt{aab})$	$\mathtt{aab\underline{b}abaa}$
q_2	$\mathtt{aabb\underline{a}baa}$
q_3	$\mathtt{aabba\underline{b}aa}$
q_4	$\mathtt{aabbab\underline{a}a}$
q_5	$\mathtt{aabbaba\underline{a}}$
q_5	aabbabaa_

Computando $\omega =$ aabbabaa em M_1



estados ativos	cadeia
$q_1 = \hat{\delta}_1(q_1, \varepsilon)$	aabbabaa
$q_1 = \hat{\delta}_1(q_1, \texttt{a})$	aabbabaa
$q_1 = \hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aa})$	aabbabaa
$q_2 = \hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aab})$	aabbabaa
$q_2 = \hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aabb})$	aabbabaa
$q_3 = \hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aabba})$	aabbabaa
$q_4 = \hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aabbab})$	aabbabaa
$q_5 = \hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aabbaba})$	aabbabaa
$q_5 = \hat{\delta}_1(q_1, \texttt{aabbabaa})$	aabbabaa_

Aceite em um AFD – Definições Alternativas

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ um AFD e seja $\omega = w_1 w_2 \cdots w_n$ uma cadeia sobre Σ.

- **Versão 1.** Dizemos que M **aceita** ω se existe uma sequência de estados $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ tal que
  - $r_1 = q_1$
  - $\delta(r_i, w_i) = r_{i+1}, \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$
  - $r_n \in F$
- **Versão 2.** Dizemos que M **aceita** ω se $\hat{\delta}(q_1, \omega) \in F$.
- **Versão 3.** Dizemos que M **aceita** ω se existe uma sequência de configurações $(q_1, \omega) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon)$, onde $q_f \in F$.

Diagrama de Estados do AFD M'

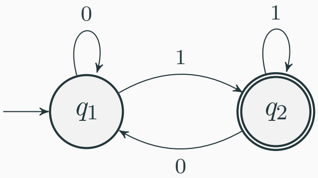
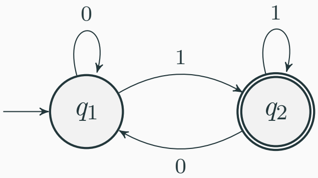


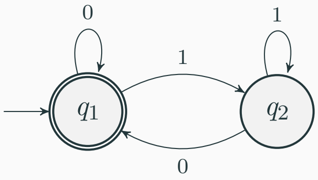
Diagrama de Estados do AFD M'



$$L(M') = \{w\colon\ w \text{ termina em } 1\}$$

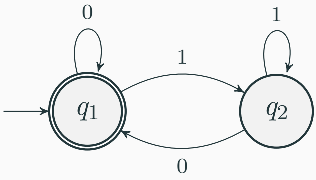
Mais Exemplos de AFD (Cont)

Diagrama de Estados do AFD M''



Mais Exemplos de AFD (Cont)

Diagrama de Estados do AFD M''



$$L(M'') = \{w\colon\ w = \varepsilon \text{ ou termina em } 0\}$$

Definição

Uma linguagem é **regular** se algum AFD a reconhece

Problema de interesse

Problemas de interesse:

- Dado AFD M, determine $L(M)$

Problema de interesse

Problemas de interesse:

- Dado AFD M, determine $L(M)$
- Dada $L \subseteq \Sigma^*$, faça um AFD que reconhece L

Problema de interesse

Problemas de interesse:

- Dado AFD M, determine $L(M)$
- Dada $L \subseteq \Sigma^*$, faça um AFD que reconhece L
- Dada $L \subseteq \Sigma^*$, determine se L é regular.

Problema de interesse

Problemas de interesse:

- Dado AFD M, determine $L(M)$
- Dada $L \subseteq \Sigma^*$, faça um AFD que reconhece L
- Dada $L \subseteq \Sigma^*$, determine se L é regular.
  - Como fazemos isso?

Projetando Autômatos Finitos Determinísticos

- $L_1 = \{\}$ (linguagem vazia)

Projetando Autômatos Finitos Determinísticos

- $L_1 = \{\}$ (linguagem vazia)
- $L_2 = \{\varepsilon\}$ (linguagem contém cadeia vazia)

Projetando Autômatos Finitos Determinísticos

- $L_1 = \{\}$ (linguagem vazia)
- $L_2 = \{\varepsilon\}$ (linguagem contém cadeia vazia)
- $L_3 = \left\{w \in \{0,1\}^* : 01 \lhd w\right\}$
- $L_4 = \left\{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem um número par de zeros}\right\}$

Projetando Autômatos Finitos Determinísticos

- $L_1 = \{\}$ (linguagem vazia)
- $L_2 = \{\varepsilon\}$ (linguagem contém cadeia vazia)
- $L_3 = \left\{w \in \{0,1\}^* : 01 \lhd w\right\}$
- $L_4 = \left\{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem um número par de zeros}\right\}$
- $L_5 = \left\{w \in \{0,1\}^* : 00 \sqsupset w \text{ e } |w|_1 \geq 1\right\}$

Projetando Autômatos Finitos Determinísticos

- $L_1 = \{\}$ (linguagem vazia)
- $L_2 = \{\varepsilon\}$ (linguagem contém cadeia vazia)
- $L_3 = \left\{w \in \{0,1\}^* : 01 \lhd w\right\}$
- $L_4 = \left\{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem um número par de zeros}\right\}$
- $L_5 = \left\{w \in \{0,1\}^* : 00 \sqsupset w \text{ e } |w|_1 \geq 1\right\}$
- $L_6 = \{w \in \{0,1\}^* : \text{ terceiro símbolo a partir do fim é } 1\}$

Exercícios

Projete AFDs para reconhecer as seguintes linguagens:

- $L_1 = \left\{ w \in \{0, 1\}^* : 01 \sqsupset w \right\}$

Exercícios

Projete AFDs para reconhecer as seguintes linguagens:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* : 01 \sqsupset w\}$
- $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\}$

Exercícios

Projete AFDs para reconhecer as seguintes linguagens:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* : 01 \sqsupset w\}$
- $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\}$
- $L_3 = \{w \in \{0,1,2\}^* : \text{ a soma dos símbolos de } w \text{ é} \equiv 0 \pmod 3\}$

Exercícios

Projete AFDs para reconhecer as seguintes linguagens:

- $L_1 = \big\{w \in \{0,1\}^* : 01 \sqsupset w\big\}$
- $L_2 = \big\{w \in \{a,b\}^* : w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\big\}$
- $L_3 = \big\{w \in \{0,1,2\}^* : \text{ a soma dos símbolos de } w \text{ é} \equiv 0 \pmod 3\big\}$
- $L_4 = \big\{w \in \{0,1\}^* : \text{ toda posição ímpar de } w \text{ é } 1\big\}$

Exercícios

Projete AFDs para reconhecer as seguintes linguagens:

- $L_1 = \big\{w \in \{0,1\}^* : 01 \sqsupset w\big\}$
- $L_2 = \big\{w \in \{a,b\}^* :$ w começa e termina com o mesmo símbolo$\big\}$
- $L_3 = \big\{w \in \{0,1,2\}^* :$ a soma dos símbolos de w é $\equiv 0 \pmod 3\big\}$
- $L_4 = \big\{w \in \{0,1\}^* :$ toda posição ímpar de w é $1\big\}$
- $L_5 = \big\{w \in \{0,1\}^* : 110 \ntrianglelefteq w\big\}$

Exercícios

Projete AFDs para reconhecer as seguintes linguagens:

- $L_1 = \big\{w \in \{0,1\}^* : 01 \sqsupset w\big\}$
- $L_2 = \big\{w \in \{a,b\}^* : w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\big\}$
- $L_3 = \big\{w \in \{0,1,2\}^* : \text{ a soma dos símbolos de } w \text{ é } \equiv 0 \pmod 3\big\}$
- $L_4 = \big\{w \in \{0,1\}^* : \text{ toda posição ímpar de } w \text{ é } 1\big\}$
- $L_5 = \big\{w \in \{0,1\}^* : 110 \ntrianglelefteq w\big\}$
- $L_6 = \big\{w \in \{0,1\}^* : \text{ todo } 0 \text{ em } w \text{ é seguido de pelo menos um } 1\big\}$

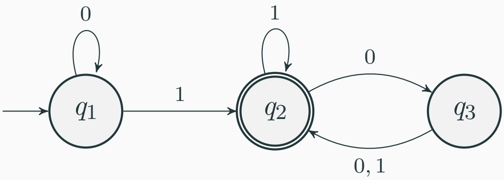
Exercícios

Projete AFDs para reconhecer as seguintes linguagens:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* : 01 \sqsupset w\}$
- $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\}$
- $L_3 = \{w \in \{0,1,2\}^* : \text{ a soma dos símbolos de } w \text{ é } \equiv 0 \pmod 3\}$
- $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* : \text{ toda posição ímpar de } w \text{ é } 1\}$
- $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* : 110 \not\trianglelefteq w\}$
- $L_6 = \{w \in \{0,1\}^* : \text{ todo } 0 \text{ em } w \text{ é seguido de pelo menos um } 1\}$
- $L_7 = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_0 \geq 2 \text{ e } |w|_1 \leq 1\}$

Demonstrando a Linguagem de um AFD

Diagrama de Estados do AFD M^*



$L(M^*) = \{w \in \{0,1\}^* \colon\, w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último 1$\}$.

Teorema

Seja

$$X = \Big\{ w \in \{0,1\}^* \colon w \text{ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último } 1 \Big\}.$$

Então $L(M^*) = X$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Demonstração.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Demonstração.

- Por indução em $|\omega|$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

BASE $|\omega| = 0$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

BASE $|\omega| = 0$.

- Neste caso $\omega = \varepsilon$ e, portanto, contém zero símbolos 0's e 1's.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

BASE $|\omega| = 0$.

- Neste caso $\omega = \varepsilon$ e, portanto, contém zero símbolos 0's e 1's.
- Ademais, $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

BASE $|\omega| = 0$.

- Neste caso $\omega = \varepsilon$ e, portanto, contém zero símbolos 0's e 1's.
- Ademais, $\hat{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1$.
- Portanto, as condições de (1)-(3) são satisfeitas, e o resultado segue.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Passo $|\omega| > 0.$

- Seja $\omega = \alpha x$, onde $x \in \Sigma$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Passo $|\omega| > 0$.

- Seja $\omega = \alpha x$, onde $x \in \Sigma$
- Por hipótese de indução, sabemos que (1), (2), e (3) valem pra α

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Passo $|\omega| > 0$.

- Seja $\omega = \alpha x$, onde $x \in \Sigma$
- Por hipótese de indução, sabemos que (1), (2), e (3) valem pra α
- Vamos provar que (1), (2), e (3) são verdadeiros para ω

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$, então $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 0$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$, então $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 0$.
- Pela H.I., α não contém 1's, e portanto o resultado segue, já que $x = 0$.

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$, então $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 0$.
- Pela H.I., α não contém 1's, e portanto o resultado segue, já que $x = 0$.
- ($\Leftarrow$) Se ω não contém 1's, então α também não e $x = 0$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (1):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1$, então $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 0$.
- Pela H.I., α não contém 1's, e portanto o resultado segue, já que $x = 0$.
- ($\Leftarrow$) Se ω não contém 1's, então α também não e $x = 0$.
- Pela H.I., $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e, assim, $\delta(q_1, x) = q_1$, e o resultado segue.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$,

  então:

  (a) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 1$;
  (b) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $x = 1$;
  ou
  (c) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ e
  $x \in \{0, 1\}$.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- **($\Rightarrow$)** Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$, então:
  - (a) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 1$;
  - (b) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $x = 1$;
    ou
  - (c) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ e $x \in \{0, 1\}$.

- Se (a) ou (b) valem, então ω contém 1's ($x = 1$).
  Se (c) vale, então, por H.I., α contém 1's.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$, então:
  (a) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 1$;
  (b) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $x = 1$;
  ou
  (c) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ e $x \in \{0, 1\}$.

- Se (a) ou (b) valem, então ω contém 1's ($x = 1$). Se (c) vale, então, por H.I., α contém 1's.
- Se $x = 1$, então existem zero 0's após o último 1, e o resultado segue.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Rightarrow$) Se $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$, então:

  (a) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$ e $x = 1$;
  (b) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $x = 1$;
  ou
  (c) $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ e $x \in \{0, 1\}$.

- Se (a) ou (b) valem, então ω contém 1's ($x = 1$). Se (c) vale, então, por H.I., α contém 1's.
- Se $x = 1$, então existem zero 0's após o último 1, e o resultado segue.
- Se $x = 0$, então a única possibilidade é que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$. Pela H.I., α contém um número ímpar de zeros após o último 1, e portanto ω contém um número par, e o resultado segue.

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Leftarrow$). Temos dois casos a se considerar: $x = 0$ ou $x = 1$.
- Se $x = 0$, então α contém um número ímpar de zeros após o ultimo 1.
- Pela H.I., $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$, e assim $\delta(q_3, x) = q_2$, e o resultado segue.
- Se $x = 1$, então temos três possibilidades para α:
  - (i) α não contém 1's;
  - (ii) α contém 1's e possuí um número par de zeros após o último 1;
  - (iii) α contém 1's e possuí um número ímpar de zeros após o último 1.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Leftarrow$). Temos dois casos a se considerar: $x = 0$ ou $x = 1$.
- Se $x = 0$, então α contém um número ímpar de zeros após o ultimo 1.
- Pela H.I., $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$, e assim $\delta(q_3, x) = q_2$, e o resultado segue.
- Se $x = 1$, então temos três possibilidades para α:
  (i) α não contém 1's;
  (ii) α contém 1's e possuí um número par de zeros após o último 1;
  (iii) α contém 1's e possuí um número ímpar de zeros após o último 1.
- Como a H.I. vale para α, temos que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$, $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ se vale (i), (ii), e (iii), respectivamente.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (2):

- ($\Leftarrow$). Temos dois casos a se considerar: $x = 0$ ou $x = 1$.
- Se $x = 0$, então α contém um número ímpar de zeros após o ultimo 1.
- Pela H.I., $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$, e assim $\delta(q_3, x) = q_2$, e o resultado segue.
- Se $x = 1$, então temos três possibilidades para α:
  (i) α não contém 1's;
  (ii) α contém 1's e possuí um número par de zeros após o último 1;
  (iii) α contém 1's e possuí um número ímpar de zeros após o último 1.
- Como a H.I. vale para α, temos que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_1$, $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_2$ e $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = q_3$ se vale (i), (ii), e (iii), respectivamente.
- Como pra cada uma dessas possibilidades temos uma transição de tal estado para q_2 temos que o resultado vale.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (3):

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (3):

Exercício

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Vale (3):

Exercício

C.Q.D.

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Teorema

Seja $X = \{w \in \{0,1\}^* : w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1\}$. Então $L(M^*) = X$

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Prova.

- Precisamos mostrar que $X \subseteq L(M^*)$ e $L(M^*) \subseteq X$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Teorema

Seja $X = \{w \in \{0,1\}^* : w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1\}$. Então $L(M^*) = X$

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Prova.

- Precisamos mostrar que $X \subseteq L(M^*)$ e $L(M^*) \subseteq X$
- Se $\omega \in X$, então, pelo Lema, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ e, consequentemente, $\omega \in L(M^*)$

Demonstrando a Linguagem de Um AFD

Teorema

Seja $X = \{w \in \{0,1\}^* : w$ contém ao menos um símbolo 1 e contém um número par de zeros após o último $1\}$. Então $L(M^*) = X$

Lema

Seja $w \in \Sigma^*$

(1) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_1 \Leftrightarrow \omega$ não contém 1's

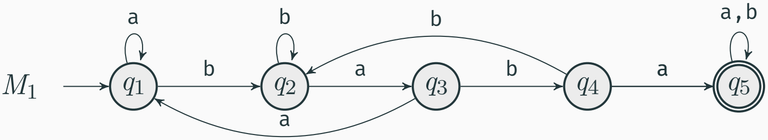
(2) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número par de 0's após o último 1

(3) $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_3 \Leftrightarrow \omega$ contém ao menos um 1 e contém um número ímpar de 0's após o último 1

Prova.

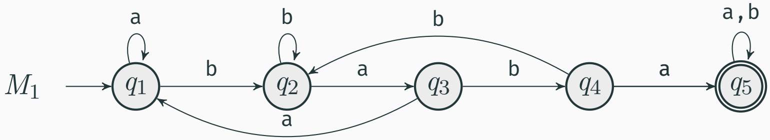
- Precisamos mostrar que $X \subseteq L(M^*)$ e $L(M^*) \subseteq X$
- Se $\omega \in X$, então, pelo Lema, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ e, consequentemente, $\omega \in L(M^*)$
- Se $\omega \in L(M^*)$, então $\hat{\delta}(q_1, \omega) = q_2$ e, pelo Lema, $\omega \in X$ C.Q.D.

Justificando a linguagem de um Autômato Finito Determinístico



$$L(M_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega \text{ contém } \mathtt{baba} \text{ como subcadeia } \}$$

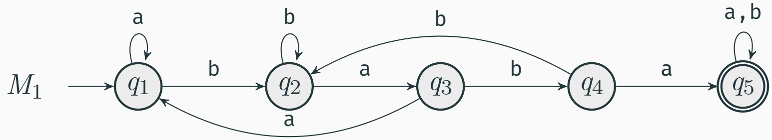
Justificando a linguagem de um Autômato Finito Determinístico



$$L(M_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega \text{ contém } \mathtt{baba} \text{ como subcadeia } \}$$

Justificativa:

Justificando a linguagem de um Autômato Finito Determinístico

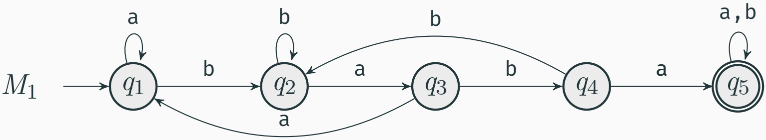


$$L(M_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega \text{ contém } \mathtt{baba} \text{ como subcadeia } \}$$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_1 \iff \alpha \in \Sigma^*$ não contém o padrão desejado

Justificando a linguagem de um Autômato Finito Determinístico



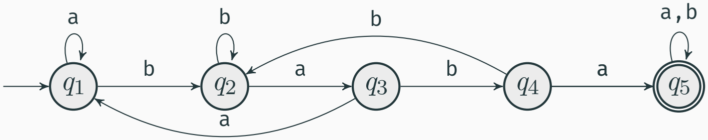
$$L(M_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega \text{ contém } \mathtt{baba} \text{ como subcadeia }\}$$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_1 \iff \alpha \in \Sigma^*$ não contém o padrão desejado
- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_2 \iff \alpha = \beta\mathtt{b}$ para $\beta \in \Sigma^*$

Justificando a linguagem de um Autômato Finito Determinístico

M_1

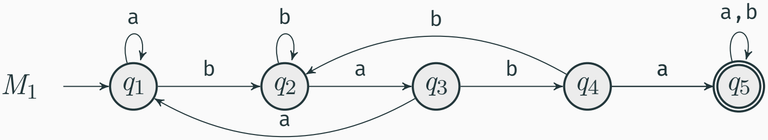


$$L(M_1) = \{\omega \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^* \mid \omega \text{ contém } \textbf{baba} \text{ como subcadeia } \}$$

Justificativa:

- $\hat{\delta_1}(q_1, \alpha) = q_1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \Sigma^*$ não contém o padrão desejado
- $\hat{\delta_1}(q_1, \alpha) = q_2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\textbf{b}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta_1}(q_1, \alpha) = q_3 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\textbf{ba}$ para $\beta \in \Sigma^*$

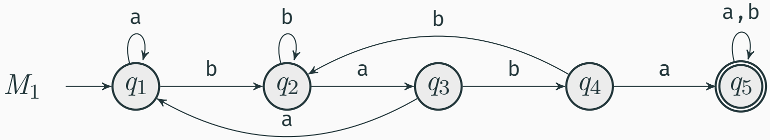
Justificando a linguagem de um Autômato Finito Determinístico



$$L(M_1) = \{\omega \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \mid \omega \text{ contém } \textbf{baba} \text{ como subcadeia } \}$$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_1 \iff \alpha \in \Sigma^*$ não contém o padrão desejado
- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_2 \iff \alpha = \beta$**b** para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_3 \iff \alpha = \beta$**ba** para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_4 \iff \alpha = \beta$**bab** para $\beta \in \Sigma^*$



$$L(M_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega \text{ contém } \mathbf{baba} \text{ como subcadeia } \}$$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \Sigma^*$ não contém o padrão desejado
- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathbf{b}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_3 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathbf{ba}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_4 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathbf{bab}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = q_5 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathbf{baba}\gamma$ para $\beta, \gamma \in \Sigma^*$

Proposição

Proposição

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFD e seja $q \in Q$. Se $\alpha \in \Sigma^*$ e $\beta \in \Sigma^*$, então

$$\hat{\delta}(q, \alpha\beta) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \alpha), \beta)$$

Programando um AFD

Simulando um Autômato em Python

```python
def afd(delta, q, F, w):

    for s in w:
        q = delta[(q, s)]
    return q in F

# Definição da função de transição do AFD M^*
delta = {('q1', '0'): 'q1',
         ('q1', '1'): 'q2',
         ('q2', '1'): 'q2',
         ('q2', '0'): 'q3',
         ('q3', '0'): 'q2',
         ('q3', '1'): 'q2'}

afd(delta, 'q1', ['q2'], "000111101010000") # -> True
```