Autômatos Finitos Não Determinísticos

CCM-104: Teoria da Computação

Prof. Maycon Sambinelli

m.sambinelli@ufabc.edu.br

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

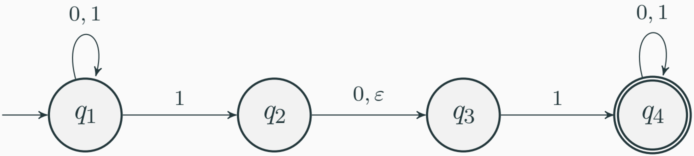
Aula de Hoje

Objetivos de Aprendizagem

- Compreender o conceito de não determinismo
- Compreender o mecanismo de funcionamento de um Autômato Finito Não Determinístico (AFN)
- Aprender a projetar AFN para uma dada linguagem
- Compreender a relação entre um AFN e AFD
- Transformar um AFN em um AFD

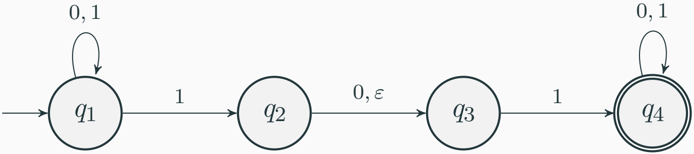
Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Diagrama de Estados do AFN M^*



Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

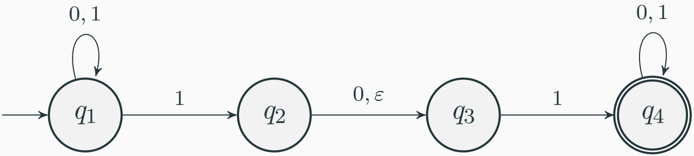
Diagrama de Estados do AFN M^*



Diferenças:

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Diagrama de Estados do AFN M^*

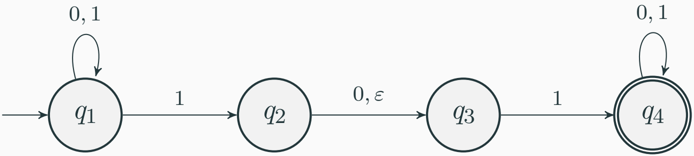


Diferenças:

- q_1 tem duas transições com o símbolo 1

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Diagrama de Estados do AFN M^*

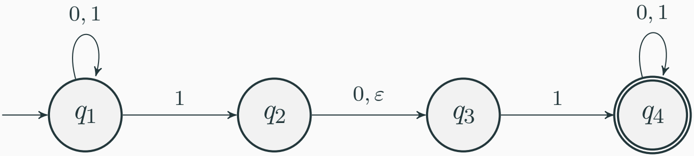


Diferenças:

- q_1 tem duas transições com o símbolo 1
- q_2 tem uma transição com ε

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Diagrama de Estados do AFN M^*

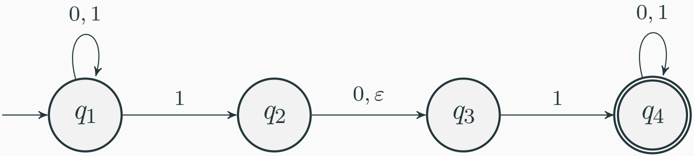


Diferenças:

- q_1 tem duas transições com o símbolo 1
- q_2 tem uma transição com ε
- q_2 não tem uma transição com 1

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Diagrama de Estados do AFN M^*



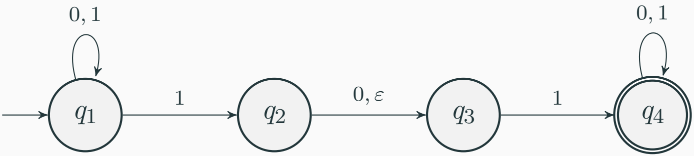
Diferenças:

- q_1 tem duas transições com o símbolo 1
- q_2 tem uma transição com ε
- q_2 não tem uma transição com 1

Não Determinismo: pode estar em mais de um estado ao mesmo tempo

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Diagrama de Estados do AFN M^*

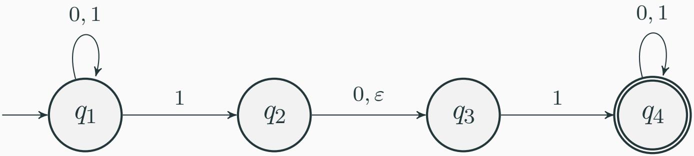


✎ Exemplo

Vamos processar as seguintes cadeias:

- 010110

Diagrama de Estados do AFN M^*



✎ Exemplo

Vamos processar as seguintes cadeias:

- 010110
- 010

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição

Um **Autômato Finito Não Determinístico (AFN)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição

Um **Autômato Finito Não Determinístico (AFN)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição

Um **Autômato Finito Não Determinístico (AFN)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição

Um **Autômato Finito Não Determinístico (AFN)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ é a **função de transição**

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição

Um **Autômato Finito Não Determinístico (AFN)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição

Um **Autômato Finito Não Determinístico (AFN)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição

Um **Autômato Finito Não Determinístico (AFN)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Nota

- A única diferença entre um AFD e um AFN é a sua função de transição

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

Definição

Um **Autômato Finito Não Determinístico (AFN)** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- Q é um conjunto finito de elementos chamados **estados**;
- Σ é um alfabeto
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ é a **função de transição**
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de **estados finais** (ou de **aceitação**)

Nota

- A única diferença entre um AFD e um AFN é a sua função de transição
- Todo AFD é um AFN

Sobre a função $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

- Um estado pode ter 0 ou mais transições para cada símbolo do alfabeto ou ε

Sobre a função $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

- Um estado pode ter 0 ou mais transições para cada símbolo do alfabeto ou ε
- Uma transição rotulada com ε indica que a máquina <u>pode mudar de estado sem ler um símbolo</u> da entrada

Sobre a função $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

- Um estado pode ter 0 ou mais transições para cada símbolo do alfabeto ou ε
- Uma transição rotulada com ε indica que a máquina <u>pode mudar de estado sem ler um símbolo</u> da entrada
- Após ler um símbolo, a máquina "divide-se em várias cópias de si mesma" e segue todas as possibilidades em paralelo

Sobre a função $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

- Um estado pode ter 0 ou mais transições para cada símbolo do alfabeto ou ε
- Uma transição rotulada com ε indica que a máquina pode mudar de estado sem ler um símbolo da entrada
- Após ler um símbolo, a máquina "divide-se em várias cópias de si mesma" e segue todas as possibilidades em paralelo
    - Cada cópia prossegue a execução normalmente

Sobre a função $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

- Um estado pode ter 0 ou mais transições para cada símbolo do alfabeto ou ε
- Uma transição rotulada com ε indica que a máquina <u>pode mudar de estado sem ler um símbolo</u> da entrada
- Após ler um símbolo, a máquina “divide-se em várias cópias de si mesma” e segue todas as possibilidades em paralelo
    - Cada cópia prossegue a execução normalmente
    - Se existirem escolhas subsequentes, a máquina divide-se novamente

Sobre a função $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

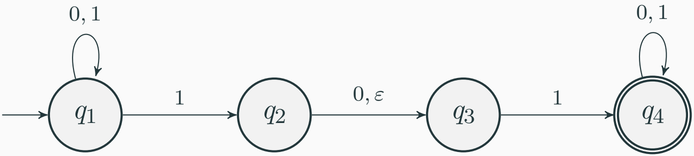
- Um estado pode ter 0 ou mais transições para cada símbolo do alfabeto ou ε
- Uma transição rotulada com ε indica que a máquina pode mudar de estado sem ler um símbolo da entrada
- Após ler um símbolo, a máquina "divide-se em várias cópias de si mesma" e segue todas as possibilidades em paralelo
    - Cada cópia prossegue a execução normalmente
    - Se existirem escolhas subsequentes, a máquina divide-se novamente
    - Se o próximo símbolo da entrada não aparece nas transições, a cópia "morre"

Sobre a função $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$

- Um estado pode ter 0 ou mais transições para cada símbolo do alfabeto ou ε
- Uma transição rotulada com ε indica que a máquina pode mudar de estado sem ler um símbolo da entrada
- Após ler um símbolo, a máquina "divide-se em várias cópias de si mesma" e segue todas as possibilidades em paralelo
    - Cada cópia prossegue a execução normalmente
    - Se existirem escolhas subsequentes, a máquina divide-se novamente
    - Se o próximo símbolo da entrada não aparece nas transições, a cópia "morre"
    - Ao final do processamento da cadeia de entrada, se alguma cópia está em um estado final, então o AFN aceita a cadeia; caso contrário, rejeita

Exemplo: Definição Formal de Um AFN

Diagrama de Estados do AFN M^*



$M^* = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, onde $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_4\}$ e δ é definido como

δ	0	1	ε
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$

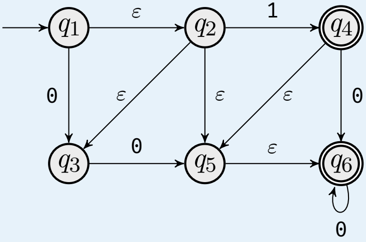
ε-fechamento de um Estado (função E) - Informal

Dado um estado q, o **ε-fechamento de** q, denotado por $E(q)$, é o conjunto de todos os estados alcançáveis a partir de q seguindo 0 ou mais arcos rotulados com ε

ε-fechamento de um Estado (função E) - Informal

Dado um estado q, o ε-**fechamento de** q, denotado por $E(q)$, é o conjunto de todos os estados alcançáveis a partir de q seguindo 0 ou mais arcos rotulados com ε

✎ Exemplo

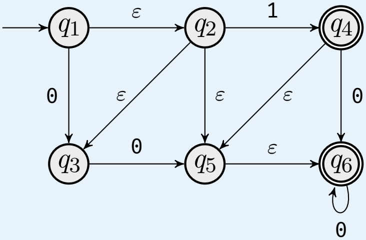


- $E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6\}$

ε-fechamento de um Estado (função E) - Informal

Dado um estado q, o **ε-fechamento de q**, denotado por $E(q)$, é o conjunto de todos os estados alcançáveis a partir de q seguindo 0 ou mais arcos rotulados com ε

✎ Exemplo

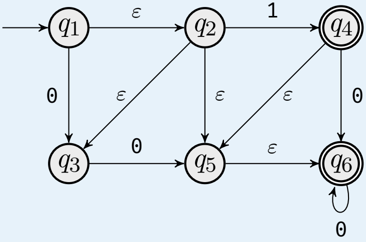


- $E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6\}$
- $E(q_3) = \{q_3\}$

ε-fechamento de um Estado (função E) - Informal

Dado um estado q, o **ε-fechamento de q**, denotado por $E(q)$, é o conjunto de todos os estados alcançáveis a partir de q seguindo 0 ou mais arcos rotulados com ε

✎ Exemplo

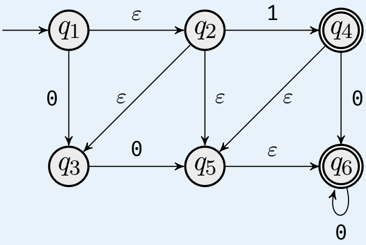


- $E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6\}$
- $E(q_3) = \{q_3\}$
- $E(q_4) = \{q_4, q_5, q_6\}$

ε-fechamento de um Estado (função E) - Informal

Dado um estado q, o **ε-fechamento de q**, denotado por $E(q)$, é o conjunto de todos os estados alcançáveis a partir de q seguindo 0 ou mais arcos rotulados com ε

✎ Exemplo



- $E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6\}$
- $E(q_3) = \{q_3\}$
- $E(q_4) = \{q_4, q_5, q_6\}$

⚠ Warning

$q \in E(q)$, sempre!

ε-fechamento de um Estado (função E) - Formal

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um Autômato Finito Não Determinístico e seja $q \in Q$. O **ε-fechamento** de q, denotado por $E(q)$, é o conjunto definido da seguinte forma:

- $q \in E(q)$
- Se $r \in E(q)$ e $s \in \delta(r, \varepsilon)$, então $s \in E(q)$

Abusos de Notação

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN, $S \subseteq Q$, e $a \in \Sigma$.

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN, $S \subseteq Q$, e $a \in \Sigma$.

Então:

$$\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

Abusos de Notação

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN, $S \subseteq Q$, e $a \in \Sigma$.

Então:

$$\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

$$E(S) = \bigcup_{q \in S} E(q)$$

Função de Transição Estendida (informal)

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um Autômato Finito Não Determinístico.

Função de Transição Estendida (informal)

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um Autômato Finito Não Determinístico.

A **Função de transição estendida** de M: $\hat{\delta}(q, \omega)$

Função de Transição Estendida (informal)

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um Autômato Finito Não Determinístico.

A **Função de transição estendida** de M: $\hat{\delta}(q, \omega)$

- Entrada: um estado q e uma cadeia ω

Função de Transição Estendida (informal)

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um Autômato Finito Não Determinístico.

A **Função de transição estendida** de M: $\hat{\delta}(q, \omega)$

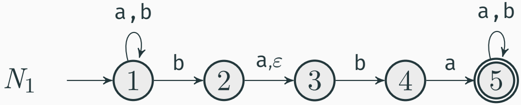
- Entrada: um estado q e uma cadeia ω
- Saída: o **conjunto** de estados ativos de M após o processamento de toda a cadeia ω começando a execução pelo estado q

Definição

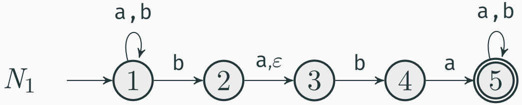
Dado um Autômato Finito Determinístico $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
A **função de transição estendida** de M é a função $\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ definida como:

$$\hat{\delta}(q, \omega) = \begin{cases} E(q) & \text{se } \omega = \varepsilon \\ E\big(\delta(\hat{\delta}(q, \alpha), a)\big) & \text{se } \omega = \alpha a \text{ e } a \in \Sigma \end{cases}$$

Autômatos finitos não determinísticos - Transição estendida

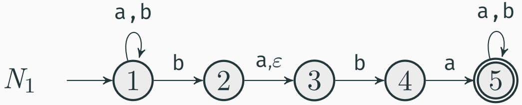


Autômatos finitos não determinísticos - Transição estendida



✎ Exemplo

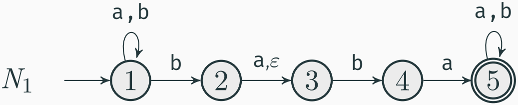
- $\hat{\delta}_1(1, \varepsilon) = E(1) = \{1\}$



✎ Exemplo

- $\hat{\delta}_1(1, \varepsilon) = E(1) = \{1\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathtt{a}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \varepsilon), \mathtt{a})) = E(\delta_1(\{1\}, \mathtt{a})) = E(\{1\}) = \{1\}$

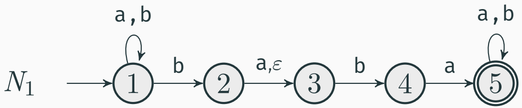
Autômatos finitos não determinísticos - Transição estendida



✎ Exemplo

- $\hat{\delta}_1(1, \varepsilon) = E(1) = \{1\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathtt{a}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \varepsilon), \mathtt{a})) = E(\delta_1(\{1\}, \mathtt{a})) = E(\{1\}) = \{1\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathtt{ab}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \mathtt{a}), \mathtt{b})) = E(\delta_1(\{1\}, \mathtt{b})) = E(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3\}$

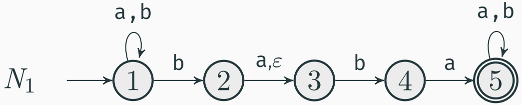
Autômatos finitos não determinísticos - Transição estendida



✎ Exemplo

- $\hat{\delta}_1(1, \varepsilon) = E(1) = \{1\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathsf{a}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \varepsilon), \mathsf{a})) = E(\delta_1(\{1\}, \mathsf{a})) = E(\{1\}) = \{1\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathsf{ab}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \mathsf{a}), \mathsf{b})) = E(\delta_1(\{1\}, \mathsf{b})) = E(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathsf{abb}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \mathsf{ab}), \mathsf{b})) = E(\delta_1(\{1, 2, 3\}, \mathsf{b})) = E(\{1, 2, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$

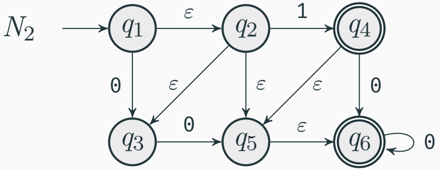
Autômatos finitos não determinísticos - Transição estendida



✎ Exemplo

- $\hat{\delta}_1(1, \varepsilon) = E(1) = \{1\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathsf{a}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \varepsilon), \mathsf{a})) = E(\delta_1(\{1\}, \mathsf{a})) = E(\{1\}) = \{1\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathsf{ab}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \mathsf{a}), \mathsf{b})) = E(\delta_1(\{1\}, \mathsf{b})) = E(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3\}$
- $\hat{\delta}_1(1, \mathsf{abb}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(1, \mathsf{ab}), \mathsf{b})) = E(\delta_1(\{1, 2, 3\}, \mathsf{b})) = E(\{1, 2, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\hat{\delta}_1(2, \mathsf{a}) = E(\delta_1(\hat{\delta}_1(2, \varepsilon), \mathsf{a})) = E(\delta_1(\{2, 3\}, \mathsf{a})) = E(\{3\}) = \{3\}$

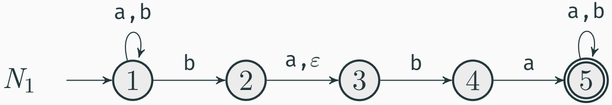
Autômatos finitos não determinísticos - Transição estendida



✎ Exemplo

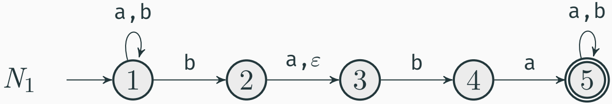
- $\hat{\delta}_2(q_1, \varepsilon) = E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6\}$
- $\hat{\delta}_2(q_1, 0) = E(\delta_2(\hat{\delta}_2(q_1, \varepsilon), 0)) = E(\delta_2(\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6\}, 0)) = E(\{q_3, q_5, q_6\}) = \{q_3, q_5, q_6\}$
- $\hat{\delta}_2(q_1, 01) = E(\delta_2(\hat{\delta}_2(q_1, 0), 1)) = E(\delta_2(\{q_3, q_5, q_6\}, 1)) = E(\emptyset) = \emptyset$

Computando ω = abbaab em N_1



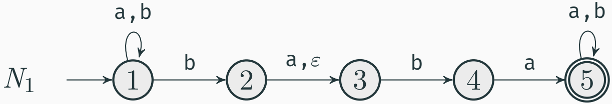
estados ativos	cadeia
1	

Computando $\omega =$ abbaab em N_1



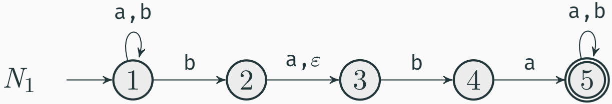
estados ativos	cadeia
1	abbaab
1	

Computando $\omega = $ abbaab em N_1

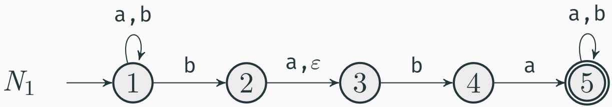


estados ativos	cadeia
1	abbaab
1	abbaab
$1, 2, 3$	

Computando $\omega =$ abbaab em N_1

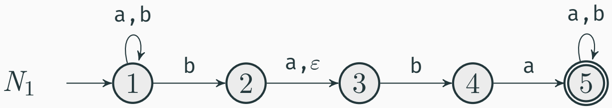


estados ativos	cadeia
1	abbaab
1	abbaab
$1, 2, 3$	abbaab
$1, 2, 3, 4$	



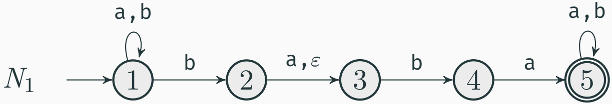
estados ativos	cadeia
1	abbaab
1	abbaab
$1, 2, 3$	abbaab
$1, 2, 3, 4$	abbaab
$1, 3, 5$	

Computando $\omega =$ abbaab em N_1



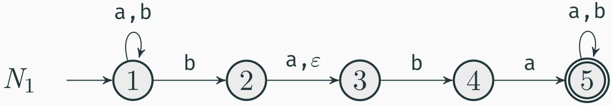
estados ativos	cadeia
1	abbaab
1	abbaab
$1, 2, 3$	abbaab
$1, 2, 3, 4$	abbaab
$1, 3, 5$	abbaab
$1, 5$	

Computando $\omega =$ abbaab em N_1



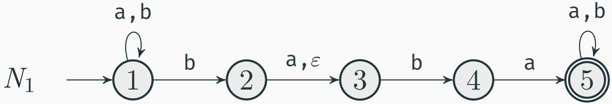
estados ativos	cadeia
1	abbaab
1	abbaab
$1, 2, 3$	abbaab
$1, 2, 3, 4$	abbaab
$1, 3, 5$	abbaab
$1, 5$	abbaab
$1, 2, 3, 5$	

Computando $\omega =$ abbaab em N_1



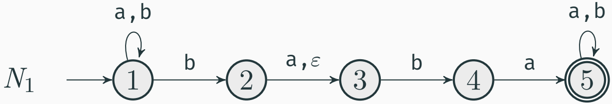
estados ativos	cadeia
1	abbaab
1	abbaab
$1, 2, 3$	abbaab
$1, 2, 3, 4$	abbaab
$1, 3, 5$	abbaab
$1, 5$	abbaab
$1, 2, 3, 5$	abbaab_

Computando $\omega =$ abbaab em N_1



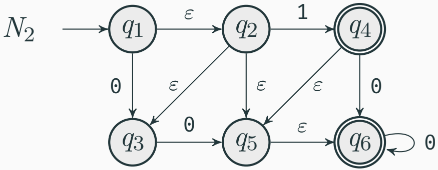
estados ativos	cadeia
1	abbaab
1	abbaab
$1, 2, 3$	abbaab
$\{1, 2, 3, 4\} = \hat{\delta}_1(1, \texttt{abb})$	abbaab
$1, 3, 5$	abbaab
$1, 5$	abbaab
$1, 2, 3, 5$	abbaab_

Computando $\omega = \texttt{abbaab}$ em N_1



estados ativos	cadeia
$\{1\} = \hat{\delta}_1(1, \varepsilon)$	abbaab
$\{1\} = \hat{\delta}_1(1, \texttt{a})$	abbaab
$\{1, 2, 3\} = \hat{\delta}_1(1, \texttt{ab})$	abbaab
$\{1, 2, 3, 4\} = \hat{\delta}_1(1, \texttt{abb})$	abbaab
$\{1, 3, 5\} = \hat{\delta}_1(1, \texttt{abba})$	abbaab
$\{1, 5\} = \hat{\delta}_1(1, \texttt{abbaa})$	abbaab
$\{1, 2, 3, 5\} = \hat{\delta}_1(1, \texttt{abbaab})$	abbaab_

Computando $\omega = \texttt{100}$ em N_2



estados ativos	cadeia
$\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6\} = \hat{\delta}_2(q_1, \varepsilon)$	100
$\{q_4, q_5, q_6\} = \hat{\delta}_2(q_1, 1)$	100
$\{q_6\} = \hat{\delta}_2(q_1, 10)$	100
$\{q_6\} = \hat{\delta}_2(q_1, 100)$	100

Definição formal de Aceita

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN e seja ω uma cadeia sobre Σ. Dizemos que N **aceita** ω se podemos escrever $\omega = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$, onde $\alpha_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ para $1 \leq i \leq m$, e existe uma sequência de estados $(r_0, r_1, \ldots, r_m)$

- $r_0 = q_0$
- $r_{i+1} \in \delta(r_i, \alpha_{i+1}) \quad \forall i = 0, \ldots, m-1$
- $r_m \in F$

Definição Formal de Aceita (Equivalente)

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN e seja ω uma cadeia sobre Σ.
Dizemos que N **aceita** ω se $\hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$

Linguagem reconhecida por um AFN

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFN N aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de N

Linguagem reconhecida por um AFN

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFN N aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de N
- $L(N) = X$

Linguagem reconhecida por um AFN

Se X é o conjunto de todas as cadeias que um AFN N aceita, então dizemos que

- X é a **linguagem** de N
- $L(N) = X$
- N **reconhece** X

Exemplos de AFN

Diagrama de Estados do AFN M_1^*

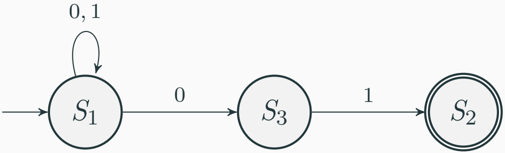
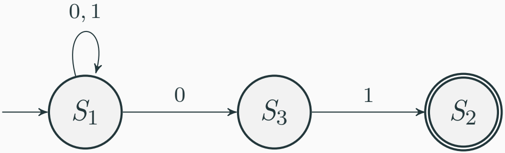


Diagrama de Estados do AFN M_1^*



$L(M_1^*) = \{\omega \in \{0,1\}^* : \text{ termina com } 01\}$

Diagrama de Estados do AFN N

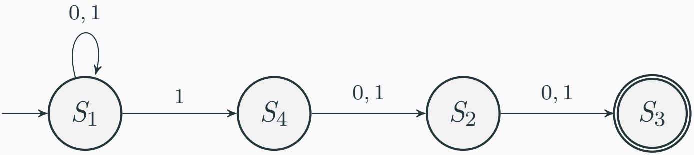
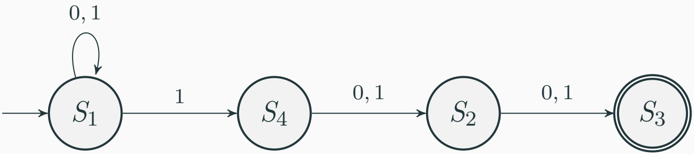
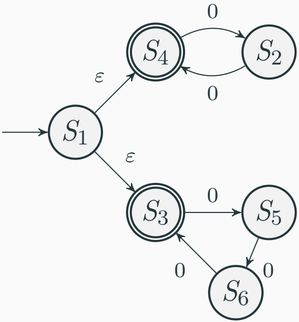


Diagrama de Estados do AFN N



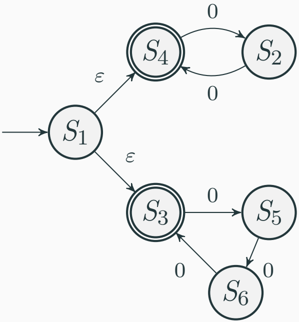
$L(N) = \{\omega \in \{0,1\}^* :$ o antepenúltimo símbolo de ω é $1\}$

Diagrama de Estados do AFN N^*



Exemplos de AFN

Diagrama de Estados do AFN N^*



$L(N^*) = \{\omega \in \{0\}^* : \omega = 0^k$ e k é múltiplo de 2 ou $3\}$

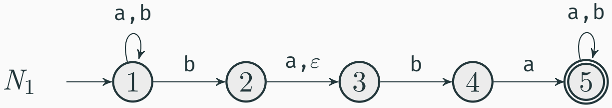
Exercício

Exercício

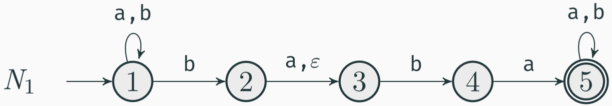
Projete um AFN que reconheça a linguagem:

$$X = \{\omega \in \{a, b, c\}^* : \omega \text{ termina com } abc \text{ ou } bca\}$$

Just. a Ling. de um Autômatos Finitos Não Determinísticos



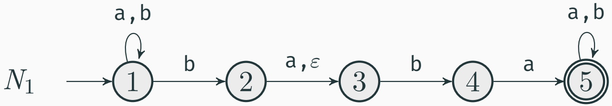
$L(N_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega$ contém baba ou bba como subcadeia $\}$



$L(N_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega$ contém baba ou bba como subcadeia $\}$

Justificativa:

Just. a Ling. de um Autômatos Finitos Não Determinísticos

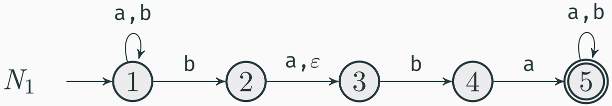


$L(N_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega$ contém baba ou bba como subcadeia $\}$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 1 \iff \alpha \in \Sigma^*$

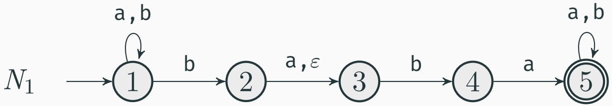
Just. a Ling. de um Autômatos Finitos Não Determinísticos



$L(N_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid \omega$ contém baba ou bba como subcadeia $\}$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathtt{b}$ para $\beta \in \Sigma^*$

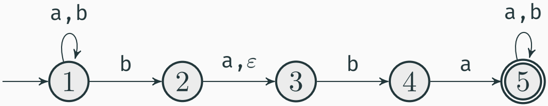


$L(N_1) = \{\omega \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^* \mid \omega$ contém **baba** ou **bba** como subcadeia $\}$

Justificativa:

- $\hat{\delta_1}(1,\alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta_1}(1,\alpha) = 2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta$**b** para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta_1}(1,\alpha) = 3 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta$**b** ou $\alpha = \beta$**ba** para $\beta \in \Sigma^*$

N_1



$L(N_1) = \{\omega \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \,|\, \omega$ contém **baba** ou **bba** como subcadeia $\}$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathtt{b}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 3 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathtt{b}$ ou $\alpha = \beta\mathtt{ba}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 4 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathtt{bb}$ ou $\alpha = \beta\mathtt{bab}$ para $\beta \in \Sigma^*$

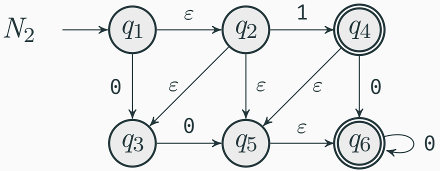
Just. a Ling. de um Autômatos Finitos Não Determinísticos

$$
N_1 \qquad
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & 1 \arrow[loop above, "\mathtt{a,b}"] \arrow[r, "\mathtt{b}"] & 2 \arrow[r, "\mathtt{a},\varepsilon"] & 3 \arrow[r, "\mathtt{b}"] & 4 \arrow[r, "\mathtt{a}"] & \boxed{5} \arrow[loop above, "\mathtt{a,b}"]
\end{tikzcd}
$$

$L(N_1) = \{\omega \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \,|\, \omega$ contém **baba** ou **bba** como subcadeia $\}$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathsf{b}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 3 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathsf{b}$ ou $\alpha = \beta\mathsf{ba}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 4 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathsf{bb}$ ou $\alpha = \beta\mathsf{bab}$ para $\beta \in \Sigma^*$
- $\hat{\delta}_1(1, \alpha) = 5 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta\mathsf{bba}\gamma$ ou $\alpha = \beta\mathsf{baba}\gamma$ para $\beta, \gamma \in \Sigma^*$



$$L(N_2) = \{\varepsilon\} \cup \{10^k \mid k \geq 0\} \cup \{00^k \mid k \geq 0\}$$

Justificativa:

- $\hat{\delta}_2(q_1, \alpha) = q_1 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \varepsilon$
- $\hat{\delta}_2(q_1, \alpha) = q_2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \varepsilon$
- $\hat{\delta}_2(q_1, \alpha) = q_3 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \varepsilon$ ou $\alpha = 0$
- $\hat{\delta}_2(q_1, \alpha) = q_4 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 1$
- $\hat{\delta}_2(q_1, \alpha) = q_5 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \varepsilon$ ou $\alpha = 0$ ou $\alpha = 00$ ou $\alpha = 1$
- $\hat{\delta}_2(q_1, \alpha) = q_6 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0^k$ ou $\alpha = 00^k$ ou $\alpha = 000^k$ ou $\alpha = 10^k$ ou $\alpha = 100^k$, com $k \geq 0$

Proposição

Proposição

Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN e seja $q \in Q$. Se $\alpha \in \Sigma^*$ e $\beta \in \Sigma^*$, então

$$\hat{\delta}(q, \alpha\beta) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \alpha), \beta)$$

AFN vs AFD

Diagrama de Estados do AFN N

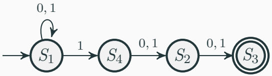
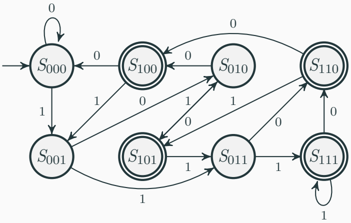


Diagrama de Estados do AFD M



$L(N) = L(M) = \{\omega \in \{0,1\}^* :$ o antepenúltimo símbolo de ω é $1\}$

Considerações

Quem é mais poderoso, AFD ou AFN?

Considerações

Quem é mais poderoso, AFD ou AFN?

- **Empate!** Ambos reconhecem o mesmo conjunto de linguagens

Equivalência entre AFD e AFN

Definição de Equivalência

Dois autômatos M e N são **equivalentes** se $L(M) = L(N)$, i.e., se ambos reconhecem a mesma linhagem

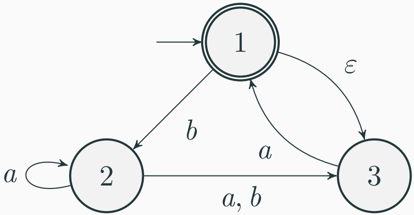
Equivalência entre AFD e AFN

Teorema

Todo AFN tem um AFD equivalente

Autômato finito não determinístico:

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$



Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN
- **função de transição:** deve imitar o funcionamento do AFN

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN
- **função de transição:** deve imitar o funcionamento do AFN
  - Sejam $R \in B$ e $a \in \Sigma$, definimos

$$\varphi(R, a) = \{p \in E(\delta(r, a)) \colon r \in R\}$$

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN
- **função de transição:** deve imitar o funcionamento do AFN
  - Sejam $R \in B$ e $a \in \Sigma$, definimos

$$\varphi(R, a) = \{p \in E(\delta(r, a)) \colon r \in R\}$$

$E(X) = \{q \in Q \colon q$ pode ser atingido a partir de um $p \in X$ seguindo 0 ou mais transições com o rótulo $\varepsilon\}$

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN
- **função de transição:** deve imitar o funcionamento do AFN
  - Sejam $R \in B$ e $a \in \Sigma$, definimos

$$\varphi(R, a) = \{p \in E(\delta(r, a)) \colon r \in R\}$$

$E(X) = \{q \in Q \colon q$ pode ser atingido a partir de um $p \in X$ seguindo 0 ou mais transições com o rótulo $\varepsilon\}$

- **estado inicial:** deve imitar o estado em que o AFN se encontra quando nenhum símbolo foi processado

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN
- **função de transição:** deve imitar o funcionamento do AFN
  - Sejam $R \in B$ e $a \in \Sigma$, definimos

$$\varphi(R, a) = \{p \in E(\delta(r, a)) \colon r \in R\}$$

$E(X) = \{q \in Q\colon$ q pode ser atingido a partir de um $p \in X$ seguindo 0 ou mais transições com o rótulo $\varepsilon\}$

- **estado inicial:** deve imitar o estado em que o AFN se encontra quando nenhum símbolo foi processado

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN
- **função de transição:** deve imitar o funcionamento do AFN
  - Sejam $R \in B$ e $a \in \Sigma$, definimos

$$\varphi(R, a) = \{p \in E(\delta(r, a)) \colon r \in R\}$$

$E(X) = \{q \in Q \colon q$ pode ser atingido a partir de um $p \in X$ seguindo 0 ou mais transições com o rótulo $\varepsilon\}$

- **estado inicial:** deve imitar o estado em que o AFN se encontra quando nenhum símbolo foi processado
  - $p_0 = E(\{q_0\})$

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN
- **função de transição:** deve imitar o funcionamento do AFN
  - Sejam $R \in B$ e $a \in \Sigma$, definimos

$$\varphi(R, a) = \{p \in E(\delta(r, a)) \colon r \in R\}$$

$E(X) = \{q \in Q \colon q$ pode ser atingido a partir de um $p \in X$ seguindo 0 ou mais transições com o rótulo $\varepsilon\}$

- **estado inicial:** deve imitar o estado em que o AFN se encontra quando nenhum símbolo foi processado
  - $p_0 = E(\{q_0\})$
- **estados de finais/aceitação:** quais estados imitam o comportamento de aceitação do AFN?

Convertendo um AFN em AFD (Cont.)

Construindo o AFD $M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$ tal que $L(M) = L(N)$:

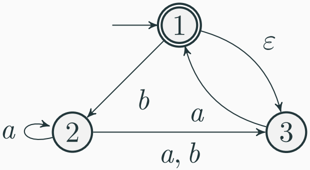
- **estados:** um estado pra cada possível conjunto de estados ativos do AFN
  - $B = \mathcal{P}(Q)$
- **alfabeto:** idêntico ao do AFN
- **função de transição:** deve imitar o funcionamento do AFN
  - Sejam $R \in B$ e $a \in \Sigma$, definimos

$$\varphi(R, a) = \{p \in E(\delta(r, a)) \colon r \in R\}$$

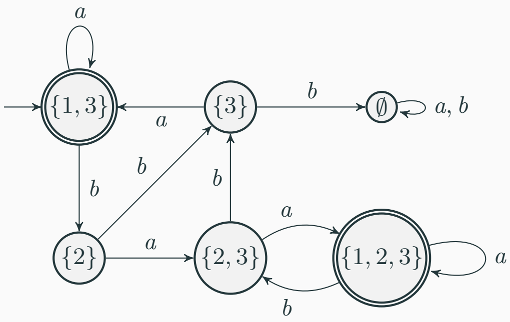
    $E(X) = \{q \in Q \colon q$ pode ser atingido a partir de um $p \in X$ seguindo 0 ou mais transições com o rótulo $\varepsilon\}$
- **estado inicial:** deve imitar o estado em que o AFN se encontra quando nenhum símbolo foi processado
  - $p_0 = E(\{q_0\})$
- **estados de finais/aceitação:** quais estados imitam o comportamento de aceitação do AFN?
  - $A = \{S \in B \colon S \cap F \neq \emptyset\}$

Convertendo um AFN em AFD

$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

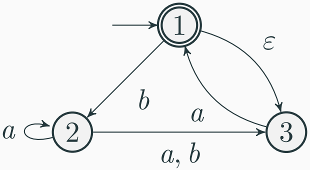


$M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$

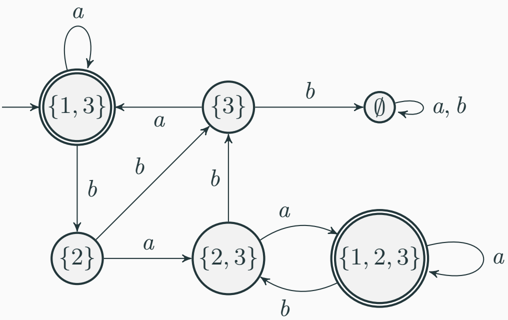


Convertendo um AFN em AFD

$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$



$M = (B, \Sigma, \varphi, p_0, A)$



✎ Exemplo

Vamos processar as cadeias **baaa**, **aabbb**

Equivalência entre AFD e AFN

Corolário

Uma linguagem é **regular** se e somente se algum AFN a reconhece

Simulando um AFN

```python
# Definição da função de transição do AFD M^*
delta = {('q1', '0' ): {'q1'},
         ('q1', '1'): {'q1', 'q2'},
         ('q2', '0'): {'q3'},
         ('q2', 'ε'): {'q3'},
         ('q3', '1'): {'q4'},
         ('q4', '0'): {'q4'},
         ('q4', '1'): {'q4'}}

afn(delta, 'q1', {'q4'}, "001100") # -> True
```

Simulando um AFN

```python
def afn(delta, q0, F, w):
    states = E({q0}, delta)
    for a in w:
        new_states = set()
        for q in states:
            if (q, a) in delta:
                new_states.update(E(delta[(q, a)], delta))
        states = new_states

    return len(states.intersection(F)) != 0
```

Simulando um AFN

```
def E(states, delta):
    S = set(states)
    nvisited = list(states)  # non-visited states
    while len(nvisited) > 0:
        q = nvisited.pop()
        if (q, 'ε') in delta:
            diff = delta[(q, 'ε')].difference(S)
            if len(diff) > 0:
                S.update(diff)
                nvisited.extend(diff)
    return S
```