Propriedades das Linguagens Regulares

MCTA015-13 - Linguagens Formais e Automata

Prof. Maycon Sambinelli

m.sambinelli@ufabc.edu.br

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

UFABC

Aula de Hoje

Objetivos de Aprendizagem

- Compreender o conceito de operação fechada sob um conjunto
- Aprender a demonstrar que linguagens regulares são fechadas sob uma determinada operação

Operações regulares

Sejam A e B linguagens. São operações regulares:

Operações regulares

Sejam A e B linguagens. São operações regulares:

- **União**: $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Operações regulares

Sejam A e B linguagens. São operações regulares:

- **União**: $A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Concatenação**: $AB = \{xy\colon x \in A \text{ e } x \in B\}$

Operações regulares

Sejam A e B linguagens. São operações regulares:

- **União**: $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Concatenação**: $AB = \{xy \colon x \in A \text{ e } x \in B\}$
- **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \colon k \geq 0 \text{ e } x_i \in A\}$

Operações regulares

Sejam A e B linguagens. São operações regulares:

- **União**: $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Concatenação**: $AB = \{xy \colon x \in A \text{ e } x \in B\}$
- **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k \colon k \geq 0 \text{ e } x_i \in A\}$

⚠ **Warning**

$\varepsilon \in A^*$, para qualquer linguagem A^*

Exemplos: Operações Regulares

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{0, 00, 000, 0000\}$$

$$M = \{aa, bbbb\}$$

Exemplos: Operações Regulares

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{0, 00, 000, 0000\}$$

$$M = \{aa, bbbb\}$$

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{0, 00, 000, 0000\}$$

$$M = \{aa, bbbb\}$$

- $L \cup M = \{0, 00, 000, 0000, aa, bbbb\}$

Exemplos: Operações Regulares

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{0, 00, 000, 0000\}$$

$$M = \{aa, bbbb\}$$

- $L \cup M = \{0, 00, 000, 0000, aa, bbbb\}$
- $LM = \{0aa, 0bbbb, 00aa, 00bbbb, 000aa, 000bbbb, 0000aa, 0000bbbb\}$

Exemplos: Operações Regulares

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{0, 00, 000, 0000\}$$

$$M = \{aa, bbbb\}$$

- $L \cup M = \{0, 00, 000, 0000, aa, bbbb\}$
- $LM = \{0aa, 0bbbb, 00aa, 00bbbb, 000aa, 000bbbb, 0000aa, 0000bbbb\}$
- $ML = \{aa0, aa00, aa000, aa0000, bbbb0, bbbb00, bbbb000, bbbb0000\}$

Exemplos: Operações Regulares

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{0, 00, 000, 0000\}$$

$$M = \{aa, bbbb\}$$

- $L \cup M = \{0, 00, 000, 0000, aa, bbbb\}$
- $LM = \{0aa, 0bbbb, 00aa, 00bbbb, 000aa, 000bbbb, 0000aa, 0000bbbb\}$
- $ML = \{aa0, aa00, aa000, aa0000, bbbb0, bbbb00, bbbb000, bbbb0000\}$
- $M^* = \{\varepsilon, aa, bbbb, aaaa, aabbbb, bbbbaa, bbbbbbbb, \ldots\}$

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{00, 10\}$$

$$M = \{\varepsilon, aa, bb\}$$

Exemplos: Operações Regulares (Cont)

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{00, 10\}$$

$$M = \{\varepsilon, aa, bb\}$$

- $LM = \{00\varepsilon, 00aa, 00bb, 10\varepsilon, 10aa, 10bb\}$

Exemplos: Operações Regulares (Cont)

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{00, 10\}$$

$$M = \{\varepsilon, aa, bb\}$$

- $LM = \{00, 00aa, 00bb, 10, 10aa, 10bb\}$

Exemplos: Operações Regulares (Cont)

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{00, 10\}$$

$$M = \{\varepsilon, aa, bb\}$$

- $LM = \{00, 00aa, 00bb, 10, 10aa, 10bb\}$
- $M^* = \{\varepsilon, aa, bb, aaaa, aabb, \ldots\}$

Exemplos: Operações Regulares (Cont)

✎ Exemplo

Considere

$$L = \{00, 10\}$$

$$M = \{\varepsilon, aa, bb\}$$

- $LM = \{00, 00aa, 00bb, 10, 10aa, 10bb\}$
- $M^* = \{\varepsilon, aa, bb, aaaa, aabb, \ldots\}$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$
6. $L \cup L = L$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$
6. $L \cup L = L$
7. $(L^*)^* = L^*$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$
6. $L \cup L = L$
7. $(L^*)^* = L^*$
8. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$

Propriedades das Operações de União, Concatenação, e Estrela

1. $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
2. $\{\varepsilon\}L = L\{\varepsilon\} = L$
3. $\emptyset L = L\emptyset = \emptyset$
4. $L(M \cup N) = LM \cup LN$
5. $(M \cup N)L = ML \cup NL$
6. $L \cup L = L$
7. $(L^*)^* = L^*$
8. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$
9. $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$

Propriedades de fechamento de linguagens regulares

Dado um conjunto S e uma operação (função) f, dizemos S é **fechado sob** f se sempre obtemos elementos em S ao aplicarmos f sobre cada um dos elementos de S.

Propriedades de fechamento de linguagens regulares

Dado um conjunto S e uma operação (função) f, dizemos S é **fechado sob** f se sempre obtemos elementos em S ao aplicarmos f sobre cada um dos elementos de S.

✎ Exemplo

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Propriedades de fechamento de linguagens regulares

Dado um conjunto S e uma operação (função) f, dizemos S é **fechado sob** f se sempre obtemos elementos em S ao aplicarmos f sobre cada um dos elementos de S.

✎ Exemplo

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

- O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado sob a operação de adição $(+)$

Dado um conjunto S e uma operação (função) f, dizemos S é **fechado sob** f se sempre obtemos elementos em S ao aplicarmos f sobre cada um dos elementos de S.

✎ Exemplo

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

- O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado sob a operação de adição $(+)$
- O conjunto $\mathbb{N}$ **não** é fechado sob a operação de divisão $(\div)$

Dado um conjunto S e uma operação (função) f, dizemos S é **fechado sob** f se sempre obtemos elementos em S ao aplicarmos f sobre cada um dos elementos de S.

✎ Exemplo

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

- O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado sob a operação de adição $(+)$
- O conjunto $\mathbb{N}$ **não** é fechado sob a operação de divisão $(\div)$
  - $(7 \div 3) \notin \mathbb{N}$

Propriedades das Linguagens Regulares

As linguagens regulares são fechadas sob as operações de união, concatenação e estrela

Propriedades das Linguagens Regulares

As linguagens regulares são fechadas sob as operações de união, concatenação e estrela

Exercício

Demonstre que as linguagens regulares são fechadas sob as operações de interseção, complemento, diferença e reverso

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Perguntas:

- O que é uma linguagem regular?

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Perguntas:

- O que é uma linguagem regular?
- Como demonstramos que uma linguagem é regular?

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Ideia da prova

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Ideia da prova

- Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares e sejam $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ dois AFDs que as reconhecem, respectivamente.

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Ideia da prova

- Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares e sejam $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ dois AFDs que as reconhecem, respectivamente.
- Vamos construir um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ que reconhece $A_1 \cup A_2$.
  - Vamos simular a execução de M_1 e M_2 em paralelo e aceitar uma cadeia se uma das execuções em paralelo aceitar a cadeia.

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Ideia da prova

- Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares e sejam $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ dois AFDs que as reconhecem, respectivamente.
- Vamos construir um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ que reconhece $A_1 \cup A_2$.
    - Vamos simular a execução de M_1 e M_2 em paralelo e aceitar uma cadeia se uma das execuções em paralelo aceitar a cadeia. (Como?)
        - **estados:** $Q_1 \times Q_2$
        - **transição:** $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (i, j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = i$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = j$

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1$ e $r_2 \in Q_2\}$

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1$ e $r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1$ e $r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1$ e $r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1$ ou $r_2 \in F_2\}$

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1$ e $r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1$ ou $r_2 \in F_2\}$

C.Q.D.?

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

C.Q.D.? Nope!

Agora precisamos mostrar que $L(M) = A_1 \cup A_2$

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ que as reconhecem, respectivamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

C.Q.D.? Nope!

Agora precisamos mostrar que $L(M) = A_1 \cup A_2$ (Como?)

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Ideia da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs M_1 e M_2 que as reconhecem, respectivamente.

Sejam $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

C.Q.D.? Nope!

Agora precisamos mostrar que $L(M) = A_1 \cup A_2$ (Como?)

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Ideia da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs M_1 e M_2 que as reconhecem, respectivamente.

Sejam $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

C.Q.D.? Nope!

Agora precisamos mostrar que $L(M) = A_1 \cup A_2$ (Como?)

$$L(M) \subseteq A_1 \cup A_2 \text{ e } A_1 \cup A_2 \subseteq L(M)$$

Propriedade das Linguagens Regulares: União

Ideia da prova

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFDs M_1 e M_2 que as reconhecem, respectivamente.

Sejam $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in Q_1 \text{ e } r_2 \in Q_2\}$
- Para $(r_1, r_2) \in Q$ e $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \colon r_1 \in F_1 \text{ ou } r_2 \in F_2\}$

C.Q.D.? Nope!

Agora precisamos mostrar que $L(M) = A_1 \cup A_2$ (Como?)

$$L(M) \subseteq A_1 \cup A_2 \text{ e } A_1 \cup A_2 \subseteq L(M)$$

Lema $\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

- Seja $|\omega| = \ell$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

- Seja $|\omega| = \ell$
- **Base** $\omega = \varepsilon$. $\hat{\delta}_1(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\hat{\delta}_2(q_2, \varepsilon) = q_2$ e $\hat{\delta}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

- Seja $|\omega| = \ell$
- **Base** $\omega = \varepsilon$. $\hat{\delta}_1(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\hat{\delta}_2(q_2, \varepsilon) = q_2$ e $\hat{\delta}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$
- **H.I.** $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$, *para toda cadeia* α *t.q.* $|\alpha| < \ell$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

- Seja $|\omega| = \ell$
- **Base** $\omega = \varepsilon$. $\hat{\delta}_1(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\hat{\delta}_2(q_2, \varepsilon) = q_2$ e $\hat{\delta}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$
- **H.I.** $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$, *para toda cadeia* α *t.q.* $|\alpha| < \ell$
- **Passo.** Seja $\omega = \alpha a$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

- Seja $|\omega| = \ell$
- **Base** $\omega = \varepsilon$. $\hat{\delta}_1(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\hat{\delta}_2(q_2, \varepsilon) = q_2$ e $\hat{\delta}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$
- **H.I.** $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$, *para toda cadeia* α *t.q.* $|\alpha| < \ell$
- **Passo.** Seja $\omega = \alpha a$
    - $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j)$, $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

- Seja $|\omega| = \ell$
- **Base** $\omega = \varepsilon$. $\hat{\delta}_1(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\hat{\delta}_2(q_2, \varepsilon) = q_2$ e $\hat{\delta}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$
- **H.I.** $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$, *para toda cadeia* α *t.q.* $|\alpha| < \ell$
- **Passo.** Seja $\omega = \alpha a$
  - $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j)$, $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$
  - $\hat{\delta}_1(q_1, \omega) = \delta_1(\hat{\delta}_1(q_1, \alpha), a) = \delta_1(r_i, a)$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

- Seja $|\omega| = \ell$
- **Base** $\omega = \varepsilon$. $\hat{\delta}_1(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\hat{\delta}_2(q_2, \varepsilon) = q_2$ e $\hat{\delta}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$
- **H.I.** $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$, *para toda cadeia* α *t.q.* $|\alpha| < \ell$
- **Passo.** Seja $\omega = \alpha a$
    - $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j)$, $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$
    - $\hat{\delta}_1(q_1, \omega) = \delta_1(\hat{\delta}_1(q_1, \alpha), a) = \delta_1(r_i, a)$
    - $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = \delta_2(\hat{\delta}_2(q_2, \alpha), a) = \delta_2(r_i, a)$

Propriedade das Linguagens Regulares: União (Cont.)

Lemma

$\hat{\delta}(q_0, \omega) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \omega) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = r_j$

- Seja $|\omega| = \ell$
- **Base** $\omega = \varepsilon$. $\hat{\delta}_1(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\hat{\delta}_2(q_2, \varepsilon) = q_2$ e $\hat{\delta}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$
- **H.I.** $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j) \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ *e* $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$, *para toda cadeia* α *t.q.* $|\alpha| < \ell$
- **Passo.** Seja $\omega = \alpha a$
  - $\hat{\delta}(q, \alpha) = (r_i, r_j)$, $\hat{\delta}_1(q_1, \alpha) = r_i$ e $\hat{\delta}_2(q_2, \alpha) = r_j$
  - $\hat{\delta}_1(q_1, \omega) = \delta_1(\hat{\delta}_1(q_1, \alpha), a) = \delta_1(r_i, a)$
  - $\hat{\delta}_2(q_2, \omega) = \delta_2(\hat{\delta}_2(q_2, \alpha), a) = \delta_2(r_i, a)$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, \omega) &= \delta(\hat{\delta}(q, \alpha), a) = \delta((r_i, r_j), a) \\ &= (\delta_1(r_i, a), \delta_2(r_j, a)) = (\hat{\delta}_1(q_1, \omega), \hat{\delta}_2(q_1, \omega)) \quad \square\end{aligned}$$

União - Outra demonstração

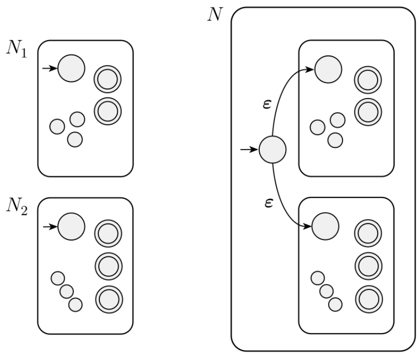
Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.



União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2).

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2).

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
- Para $q \in Q$ e $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- $F = F_1 \cup F_2$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2).

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$
- Para $q \in Q$ e $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- $F = F_1 \cup F_2$

Fato. $\hat{\delta}(q_i, \alpha) = \hat{\delta}_i(q_i, \alpha)$ (continua...) □

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

- Seja $\omega \in A_1 \cup A_2$, então $\hat{\delta}_i(q_i, \omega) \cap F_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

- Seja $\omega \in A_1 \cup A_2$, então $\hat{\delta}_i(q_i, \omega) \cap F_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$
- Suponha s.p.d.g. que $i = 1$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

- Seja $\omega \in A_1 \cup A_2$, então $\hat{\delta}_i(q_i, \omega) \cap F_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$
- Suponha s.p.d.g. que $i = 1$
- $\hat{\delta}(q, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

- Seja $\omega \in A_1 \cup A_2$, então $\hat{\delta}_i(q_i, \omega) \cap F_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$
- Suponha s.p.d.g. que $i = 1$
- $\hat{\delta}(q, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- $\hat{\delta}(q_1, \omega) \subseteq \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

- Seja $\omega \in A_1 \cup A_2$, então $\hat{\delta}_i(q_i, \omega) \cap F_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$
- Suponha s.p.d.g. que $i = 1$
- $\hat{\delta}(q, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- $\hat{\delta}(q_1, \omega) \subseteq \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- Pela construção de N, vale que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = \hat{\delta}_1(q_1, \alpha)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

- Seja $\omega \in A_1 \cup A_2$, então $\hat{\delta}_i(q_i, \omega) \cap F_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$
- Suponha s.p.d.g. que $i = 1$
- $\hat{\delta}(q, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- $\hat{\delta}(q_1, \omega) \subseteq \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- Pela construção de N, vale que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = \hat{\delta}_1(q_1, \alpha)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$
- Logo, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = \hat{\delta}_1(q_1, \omega)$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

- Seja $\omega \in A_1 \cup A_2$, então $\hat{\delta}_i(q_i, \omega) \cap F_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$
- Suponha s.p.d.g. que $i = 1$
- $\hat{\delta}(q, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- $\hat{\delta}(q_1, \omega) \subseteq \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- Pela construção de N, vale que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = \hat{\delta}_1(q_1, \alpha)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$
- Logo, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = \hat{\delta}_1(q_1, \omega)$
- $\emptyset \neq \hat{\delta}_1(q_1, \omega) \cap F_1 \subseteq \hat{\delta}(q_1, \omega) \cap F$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$A_1 \cup A_2 \subseteq L(N)$

- Seja $\omega \in A_1 \cup A_2$, então $\hat{\delta}_i(q_i, \omega) \cap F_i \neq \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2\}$
- Suponha s.p.d.g. que $i = 1$
- $\hat{\delta}(q, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- $\hat{\delta}(q_1, \omega) \subseteq \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- Pela construção de N, vale que $\hat{\delta}(q_1, \alpha) = \hat{\delta}_1(q_1, \alpha)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$
- Logo, $\hat{\delta}(q_1, \omega) = \hat{\delta}_1(q_1, \omega)$
- $\emptyset \neq \hat{\delta}_1(q_1, \omega) \cap F_1 \subseteq \hat{\delta}(q_1, \omega) \cap F$
- Logo N aceita $\omega \implies \omega \in L(N)$

$\square$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$L(N) \subseteq A_1 \cup A_2$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$L(N) \subseteq A_1 \cup A_2$

- Seja $\omega \in L(N)$, então $\hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$L(N) \subseteq A_1 \cup A_2$

- Seja $\omega \in L(N)$, então $\hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$
- Pela construção da máquina $\hat{\delta}(q_i, \alpha) = \hat{\delta}_i(q_i, \alpha)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$L(N) \subseteq A_1 \cup A_2$

- Seja $\omega \in L(N)$, então $\hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$
- Pela construção da máquina $\hat{\delta}(q_i, \alpha) = \hat{\delta}_i(q_i, \alpha)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$
- Sabemos que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$L(N) \subseteq A_1 \cup A_2$

- Seja $\omega \in L(N)$, então $\hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$
- Pela construção da máquina $\hat{\delta}(q_i, \alpha) = \hat{\delta}_i(q_i, \alpha)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$
- Sabemos que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- Qndo $\omega \neq \varepsilon$, $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\delta}(\{q_1, q_2\}, \omega)$

União - Outra demonstração

Teorema

A união de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Demonstração (Versão 2) – Continuação.

$L(N) \subseteq A_1 \cup A_2$

- Seja $\omega \in L(N)$, então $\hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \neq \emptyset$
- Pela construção da máquina $\hat{\delta}(q_i, \alpha) = \hat{\delta}_i(q_i, \alpha)$ para todo $\alpha \in \Sigma^*$
- Sabemos que $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), \omega) = \hat{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \omega)$
- Qndo $\omega \neq \varepsilon$, $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\delta}(\{q_1, q_2\}, \omega)$
- Então $\hat{\delta}(q_0, \omega) = \hat{\delta}(\{q_1, q_2\}, \omega) = \hat{\delta}(q_1, \omega) \cup \hat{\delta}(q_2, \omega) = \hat{\delta}_1(q_1, \omega) \cup \hat{\delta}_2(q_2, \omega)$

$$\begin{aligned}
\emptyset \neq\ & \hat{\delta}(q_0, \omega) \cap F \\
&= \left(\hat{\delta}_1(q_1, \omega) \cup \hat{\delta}_2(q_2, \omega)\right) \cap (F_1 \cup F_2) \\
&= (\hat{\delta}_1(q_1, \omega) \cap F_1) \cup (\hat{\delta}_2(q_2, \omega) \cap F_2)
\end{aligned}$$

$\square$

Concatenação

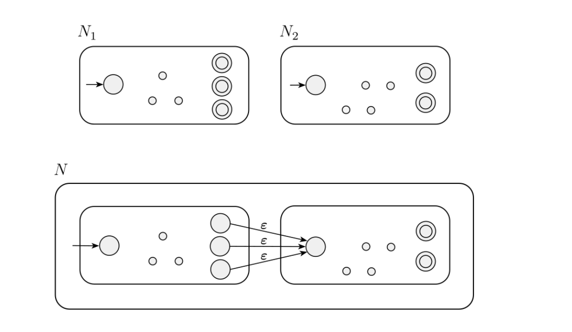
Teorema

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.

Concatenação

Teorema

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.



Concatenação

Teorema

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Prova.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

Concatenação

Teorema

A concatenação de duas linguagens regulares é regular.

Rascunho da Prova.

Sejam A_1 e A_2 duas linguagens regulares. Por definição, existem AFNs N_1 e N_2 que as reconhecem, respectivamente.

Sejam $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- Para $q \in Q$ e $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a) & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \delta_2(q, a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

- $q_0 = q_1$
- $F = F_2$

□

Estrela

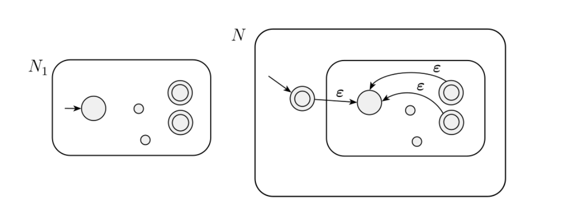
Teorema

A estrela de uma linguagem regular é regular.

Estrela

Teorema

A estrela de uma linguagem regular é regular.



Estrela

Teorema

A estrela de uma linguagem regular é regular.

Rascunho da Prova.

Sejam A uma linguagem regular. Por definição, existe um AFN N que a reconhece.

Estrela

Teorema

A estrela de uma linguagem regular é regular.

Rascunho da Prova.

Sejam A uma linguagem regular. Por definição, existe um AFN N que a reconhece.

Sejam $N = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$. Construa $N' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ em que

- $Q = \{q_0\} \cup Q_1$
- Para $q \in Q$ e $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,

$$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q, a) & \text{se } q \in Q_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a) \cup \{q_1\} & \text{se } q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & \text{se } q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & \text{se } q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

- $F = \{q_0\} \cup F_1$

□