

MC-202

Revisão de recursão

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2023

Recursão



A ideia é que um problema pode ser resolvido da seguinte maneira:

- **Primeiro**, definimos as soluções para casos básicos
- **Em seguida**, tentamos reduzir o problema para instâncias menores do problema
- **Finalmente**, combinamos o resultado das instâncias menores para obter um resultado do problema original

Genericamente

Caso base:

- resolve **instâncias pequenas** diretamente

Caso geral:

- reduz o problema para **instâncias menores** do mesmo problema
- chama a função recursivamente

```
1 int fat(int n) {
2   if (n == 0) /* caso base */
3     return 1;
4   else /* caso geral */
5     return n * fat(n-1); /* instância menor */
6 }
```

Definições recursivas

Algumas operações matemáticas ou objetos matemáticos têm uma definição recursiva

- Ex: fatorial, sequência de Fibonacci, palíndromos, etc...
- ou podem ser vistos do ponto de vista da recursão
 - multiplicação, divisão, exponenciação, etc...

Isso nos permite projetar algoritmos para lidar com essas operações/objetos

Ex: Exponenciação

Seja a é um número real e b é um número inteiro não-negativo

- Se $b = 0$, então $a^b = 1$
- Se $b > 0$, então $a^b = a \cdot a^{b-1}$

```
1 double potencia(double a, int b) {
2     if (b == 0)
3         return 1;
4     else
5         return a * potencia(a, b - 1);
6 }
```

Palíndromos

Uma palavra é um **palíndromo** se ela é igual ao seu reverso

- Ex: ana, ovo, osso, radar

Matematicamente, uma palavra é palíndromo se:

- ou tem zero letras (palavra vazia)
- ou tem uma letra
- ou é da forma *$ap\alpha$* onde
 - *α* é uma letra
 - *p* é um palíndromo

```
1 int eh_palindromo(char *palavra, int ini, int fim) {
2     if (ini >= fim)
3         return 1;
4     return (palavra[ini] == palavra[fim]) &&
5         eh_palindromo(palavra, ini + 1, fim - 1);
6 }
7
8 eh_palindromo(palavra, 0, strlen(palavra) - 1);
```

Busca Binária

Para buscar x no vetor ordenado dados entre as posições l e r

Casos base:

- Se o intervalo for vazio ($l > r$), x não está no vetor
- Se $\text{dados}[m] == x$, onde $m = (l + r)/2$
 - Devolvemos m

Caso geral:

- Se $\text{dados}[m] < x$, então x só pode estar entre $m + 1$ e r
 - Devolvemos o resultado da chamada recursiva
- Se $\text{dados}[m] > x$, então x só pode estar entre l e $m - 1$
 - Devolvemos o resultado da chamada recursiva

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l + r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```

Comparando recursão e algoritmos iterativos

Normalmente algoritmos recursivos são:

- mais simples de entender
- menores e mais fáceis de programar
- mais “elegantes”

Mas algumas vezes podem ser

- **muito** ineficientes (quando comparados a algoritmos iterativos para o mesmo problema)

Estratégia ideal:

1. encontrar algoritmo recursivo para o problema
2. reescrevê-lo como um algoritmo iterativo

Isso sempre é possível? Quando for possível, sempre melhora a eficiência do algoritmo?

- Veremos mais sobre isso no curso...

Fibonacci: recursivo vs. iterativo

Sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

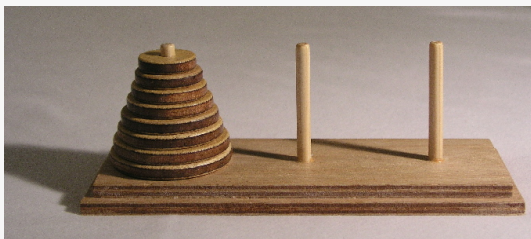
```
1 int fib_rec(int n) {
2   if (n == 1)
3     return 1;
4   else if (n == 2)
5     return 1;
6   else
7     return fib_rec(n-2) +
8           fib_rec(n-1);
9 }
```

```
1 int fib_iterativo(int n) {
2   int ant, atual, prox, i;
3   ant = atual = 1;
4   for (i = 3; i <= n; i++) {
5     prox = ant + atual;
6     ant = atual;
7     atual = prox;
8   }
9   return atual;
10 }
```

Número de operações:

- iterativo: $\approx n$
- recursivo: $\approx \text{fib}(n)$ (aproximadamente 1.6^n)

Torres de Hanói



A torre de Hanói é um brinquedo com três estacas *A*, *B* e *C* e discos de tamanhos diferentes

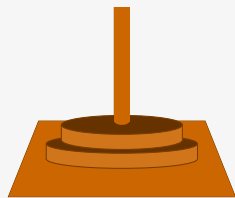
Objetivo:

- mover todos os discos da estaca *A* para a estaca *C*

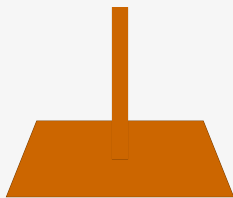
Regras:

- Apenas um disco pode ser movido de cada vez
- Um disco maior não pode ser colocado sobre um menor

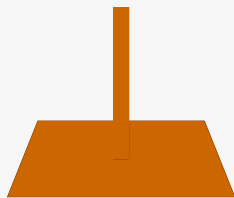
Torres de Hanói recursivo



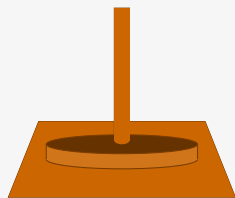
orig



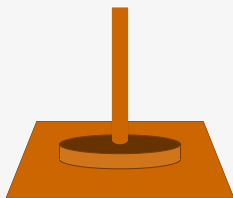
aux



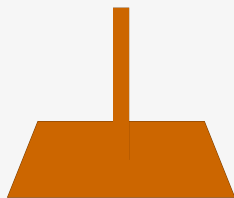
dest



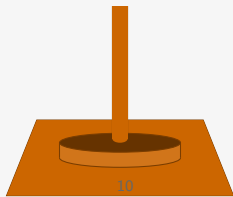
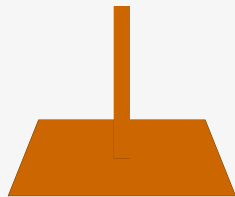
orig



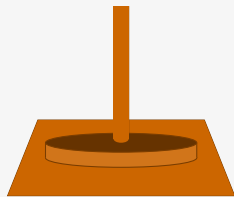
aux



dest



10



Exercício - Calculando o Máximo

Escreva uma função recursiva que calcule o máximo de um vetor dado com n elementos

```
int maximo(int *v, int n)
```

Exercício - Coeficientes Binomiais

Escreva uma função recursiva que calcule, para $n \geq 0$ e $k \geq 0$

$$\binom{n}{k}$$

Relação de Stifel:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$