

Recorrências

1. Seja F_n o n -ésimo número da sequência de Fibonacci. Temos $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$. Use indução e prove que $F_n \geq 2^{0.5n}$ para todo $n \geq 6$. Qual o significado desse resultado?

2. Suponha que $T(1) = 1$ e $T(2) = 1$. Resolva as seguintes recorrências com notação O com o resultado mais justo possível (quando não especificado, use o método que preferir):

- (a) $T(n) = T(\frac{n}{3}) + n^2$ (método de iteração)
- (b) $T(n) = 2T(n - 1) + n$ (método de iteração)
- (c) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$ (método de substituição, suponha $T(n) = \Theta(n^2)$)
- (d) $T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + 3$ (método de substituição, suponha $T(n) = \Theta(2^n)$)
- (e) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \sqrt{n}$ (árvore de recursão e método mestre)
- (f) $2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n$ (método de substituição)
- (g) $T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + n^2$ (árvore de recursão e método de substituição)
- (h) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + 1$ (método mestre)
- (i) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$ (método mestre)
- (j) $2T(\lfloor \frac{n}{2} + 17 \rfloor) + n$ (método de substituição)
- (k) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + n$ (método mestre)
- (l) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + n^2$ (método mestre)
- (m) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$ (faça uma mudança de variáveis, usando $m = \log n$, escreva uma recorrência equivalente e resolva-a)
- (n) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n$
- (o) $T(n) = 2T(\lceil \frac{3n}{4} \rceil) + n$
- (p) $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 2T(\frac{n}{3}) + 1$ (método de substituição)
- (q) $T(n) = 64T(\frac{n}{8}) + 7n^3$
- (r) $T(n) = 4T(\frac{n}{8}) + \sqrt{n}$
- (s) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$ (chute: $T(n) = \Theta(n \log^2 n)$)
- (t) $T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{n}{6}) + T(\frac{n}{9}) + n$

3. Um algoritmo A tem o seu consumo de tempo descrito através da recorrência

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2.$$

Um outro algoritmo B tem o seu consumo de tempo descrito através da recorrência

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2,$$

onde a é uma constante. Qual é o maior valor inteiro possível para a de tal forma que o algoritmo B seja assintoticamente mais eficiente que o algoritmo A ? Justifique a sua resposta.