Revisão

* "Mathematics for Computer Science. Eric Lehman, J. Thomson Leighton, Albert R. Meyer"

* "Velleman, D. J.. How to prove it: A structural Aproach. Second Edition. Cambridge University Press. 2006"

Proposição

Uma proposição é uma sentença declarativa que é verdadeira ou falsa.

Exemplos:

P = "todos os cavalos são brancos"

- $2 + 3 = 5$
- $5 + 4 = 6$
- todos os cavalos são brancos
- toda árvore com ao menos dois vértices contém ao menos duas folhas

Predicado

Predicado é uma proposição cujo valor booleano depende de uma variável.

$P(n)$ = "n é um quadrado perfeito"

- $P(4)$ = "4 é um quadrado perfeito"
  ↳ Verdadeiro

- $P(5)$ = "5 é um quadrado perfeito"
  ↳ Falso

Indução

Indução Matemática

- Serve para provar um predicado da forma $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$

- Tem dois momentos:

  (i) prova da base

  (ii) prova do passo

Indução Matemática

Indução Versão 1

(i) provamos $P(1)$ (Base)

(ii) provamos $\forall n \in \mathbb{N} \; P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (Passo)

"Algoritmo que empurra a verdade"

$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \cdots$$

Teorema A soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Demonstração

$$P(n) = \text{“} \sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = n^2 \text{”}$$

Teorema A soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Demonstração

Base: $P(1)$ vale

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = 1$ (A)

- $n^2 = 1^2 = 1$ (B)

Como (A) e (B) são iguais, temos que o resultado segue.

Passo: $\forall n \in \mathbb{N} \; P(n) \Rightarrow P(n+1)$

SABemos	objetivo
	$\forall n \in \mathbb{N} \; P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Passo: $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

SABEMOS	objetivo
	~~$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$~~
Seja n um natural arbitrário	$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Passo: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

SABEMOS	objetivo
	~~$\forall\, n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$~~
Seja n um natural arbitrário	~~$P(n) \Rightarrow P(n+1)$~~
$P(n) =$ "$\sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = n^2$"	$P(n+1) =$ "$\sum_{i=1}^{n+1} [2(i-1)+1] = (n+1)^2$"

Passo: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

SABEMOS	Obj...
Seja n um natural arbitrário	
$P(n) =$ " $\sum_{i=1}^{n} [2(i-1) + 1] = n^2$ "	
$\sum_{i=1}^{n+1} [2(i-1)+1] = \sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] + 2n + 1$	

Passo: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

SABemos | Obj...

Seja n um natural arbitrário

$$P(n) = \text{"} \sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = n^2 \text{"}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} [2(i-1)+1] = \sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] + 2n + 1$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

Passo: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

SABEMOS	Objetivo

Seja n um natural arbitrário

$P(n) =$ "$\sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = n^2$"

$$\sum_{i=1}^{n+1} [2(i-1)+1]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] + 2n + 1$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

$\square$

~~$\forall\, n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$~~

~~$P(n) \Rightarrow P(n+1)$~~

$P(n+1) =$ "$\sum_{i=1}^{n+1} [2(i-1)+1] = (n+1)^2$"

Teorema A soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

SABEMOS	Objetivo

Seja n um natural arbitrário

$P(n) =$ " $\sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = n^2$ "

$$\sum_{i=1}^{n+1} [2(i-1)+1]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] + 2n + 1$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= \boxed{(n+1)^2}$$

$\square$

~~$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$~~

~~$P(n) \Rightarrow P(n+1)$~~

$P(n+1) =$ " $\sum_{i=1}^{n+1} [2(i-1)+1] = (n+1)^2$ "

Indução Matemática

Indução Versão 2

(i) provamos $P(1)$ (Base)

(ii) provamos $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\ P(n-1) \Rightarrow P(n)$ (Passo)

"Algoritmo que empurra a verdade"

$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \cdots$$

Teorema A soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Demonstração

Base: $P(1)$ vale

$\boxed{\text{idêntico}}$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[2(i-1)+1] = 1$ (A)

- $n^2 = 1^2 = 1$ (B)

Como (A) e (B) são iguais, temos que o resultado segue.

Passo: $\forall\ n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\ P(n-1) \Rightarrow P(n)$

SABEMOS	Obj...

Seja n um natural arbitrário

$P(n-1) =$ "$\sum_{i=1}^{n-1} [2(i-1)+1] = (n-1)^2$"

$$\sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = \sum_{i=1}^{n-1} [2(i-1)+1] + 2(n-1) + 1$$

$$= (n-1)^2 + 2n - 2 + 1$$

$$= n^2 \cancel{-2n} \cancel{+1} \cancel{+2n} \cancel{-2} \cancel{+1}$$

$$= n^2$$

$\square$

Teorema A soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

SABEMOS	Obj...

Seja n um natural arbitrário

$$P(n-1) = \text{“} \sum_{i=1}^{n-1} [2(i-1)+1] = (n-1)^2 \text{”}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = \sum_{i=1}^{n-1} [2(i-1)+1] + 2(n-1) + 1$$

$$= (n-1)^2 + 2n - 2 + 1$$

$$= n^2 - \cancel{2n} + \cancel{1} + \cancel{2n} - \cancel{2} + \cancel{1}$$

$$= n^2 \qquad \square$$

Teorema A soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Demonstração

- Note que o i-ésimo natural ímpar é dado pela fórmula $2(i-1)+1$.
- Assim, o teorema nos pede para provar que

$$\sum_{i=1}^{n}[2(i-1)+1] = n^2$$

- Nossa demonstração segue por indução em n.
- Se $n=1$, então

$$\sum_{i=1}^{n}[2(i-1)+1] = \sum_{i=1}^{1}[2(i-1)+1] = 1 = 1^2 = n^2,$$

e o resultado segue.

- Agora assuma que $n > 1$.
- Por hipótese de indução, sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} [2(i-1)+1] = (n-1)^2$$

- Assim, $$\sum_{i=1}^{n} [2(i-1)+1] = \sum_{i=1}^{n-1} [2(i-1)+1] + 2(n-1)+1$$

$$= (n-1)^2 + 2n - 1$$

$$= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1$$

$$= n^2$$

$\square$

Indução Matemática

Indução Versão 3

(i) provamos $P(n_0)$

(ii) provamos $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n_0\}$ $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

Teorema (exercício) Se $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 5$, então $2^n > n^2$.

$n = 3$: $\quad 2^3 = 8 \ngtr 9 = 3^2$

$n = 4$: $\quad 2^4 = 16 \ngtr 16 = 4^2$

Indução Matemática

Indução Versão 4

(i) provamos $P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2), \ldots, P(n_0+k-1)$

(ii) provamos

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n_k\} \; P(n-1), P(n-2), \ldots, P(n-k) \Rightarrow P(n)$$

Teorema (exercício) Prove que $F_n \geqslant 2^{n/2}$ para todo $n \geqslant 6$ e $n \in \mathbb{N}$, onde

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leqslant 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Indução Matemática

Indução Versão **Forte**

(i) provamos $P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2), \ldots, P(n_1)$

(ii) provamos

$$\forall n \in \mathbb{N} \left[\forall k \in \mathbb{N},\ n_0 \leq k < n,\ P(k) \Rightarrow P(n) \right]$$

$$\Downarrow$$

"Se $\underline{\text{vale p/ todo } k < n}$, então vale p/ n"

$\uparrow$

você ganha de graça

Teorema Se G é um grafo simples e conexo, então

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G).$$

Demonstração

- Por indução em $e(G)$.
- Se $e(G) = 0$, então $d(u) = 0$ para todo $u \in V(G)$, e o resultado segue
- Então, suponha que $e(G) \geq 1$.
- Seja $uv \in E(G)$ e seja $G' = G - u$
- Note que $e(G') = e(G) - d(u) < e(G) - 1$
- Por hipótese de indução

$$\sum_{x \in V(G')} d_{G'}(x) = 2e(G') = 2e(G) - 2d(u).$$

- Seja $A = V(G') \setminus N(u)$ e $B = N(u)$
- Note que $V(G) = A \cup B \cup \{u\}$
- Note também que $\forall\, x \in A \cup B$

$$d_{G'}(x) = \begin{cases} d_G(x) & \text{se } x \in A \\ d_G(x) - 1 & \text{se } x \in B \end{cases}$$

- Assim

$$\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = \sum_{x \in A} d_G(x) + \sum_{x \in B} d_G(x) + d_G(u)$$

$$= \sum_{x \in A} d_{G'}(x) + \sum_{x \in B} [d_{G'}(x) + 1] + d_G(u)$$

$|B| = |N(u)| = d_G(u)$

$= |E(u)|$

quantidade de arestas tocando u

Por H.I.

$$\boxed{= \sum_{x \in A \cup B} d_{G'}(x) \\ = 2e(G')} + |B| + d_G(u)$$

$$+ 2|E(u)| = 2e(G). \qquad \square$$