Notação Assintótica

Notação Assintótica

Notação Assintótica é uma abstração que nos permite focar no que ocorre com um função $f(n)$ quando os valores de n crescem indefinidamente.

Regra geral

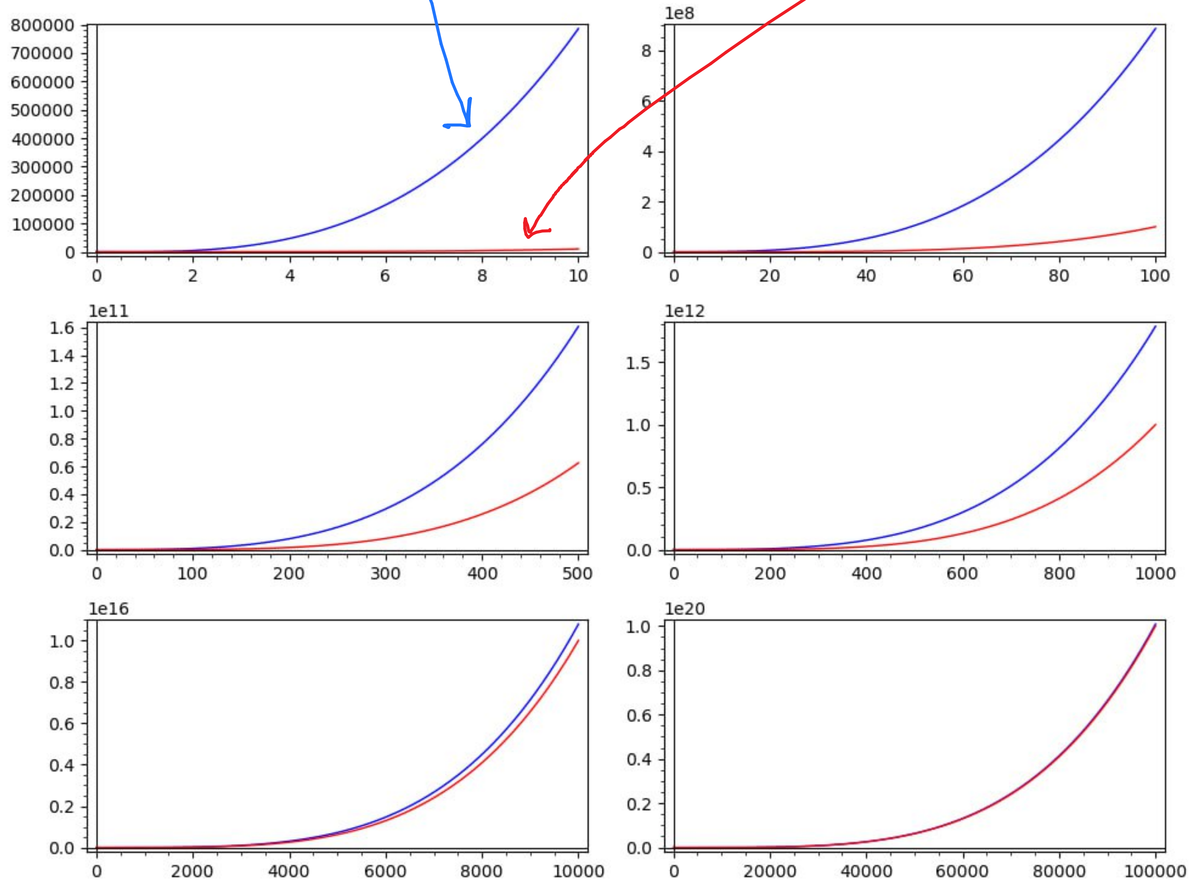
- termos de menor ordem ñ importam
- constantes ñ importam

$$f(n) = n^4 + 786n^3 + 2n^2 - 999n + 12$$

$$f(n) \approx n^4$$

$$f(n) = n^4 + 786n^3 + 2n^2 - 999n + 12$$

$$g(n) = n^4$$



Uma abordagem analítica

$$f(n) = n^4 + 786\,n^3 + 2n^2 - 999n + 12$$

$$= n^4\left(1 + \frac{786}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{999}{n^3} + \frac{12}{n^4}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{786}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{999}{n^3} + \frac{12}{n^4}\right) = 1$$

Onde $n \to \infty$, $f(n) \approx n^4$.

Outro Exemplo

$$\left.\begin{aligned} f(n) &= 475n + 34 \quad (\approx n) \\ g(n) &= n^2 + 3 \quad (\approx n^2) \end{aligned}\right\}$$ qual função cresce mais rápido ?

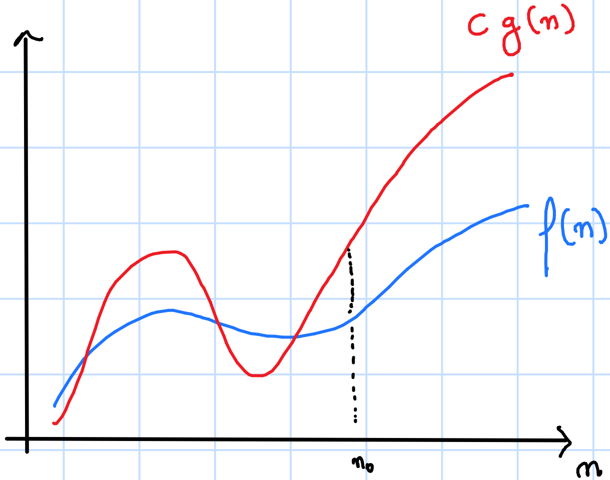
$$475n + 34 \leq n^2 + 3$$

$$0 \leq n^2 - 475n - 31$$

$n \geq 476$ temos que a inequação vale

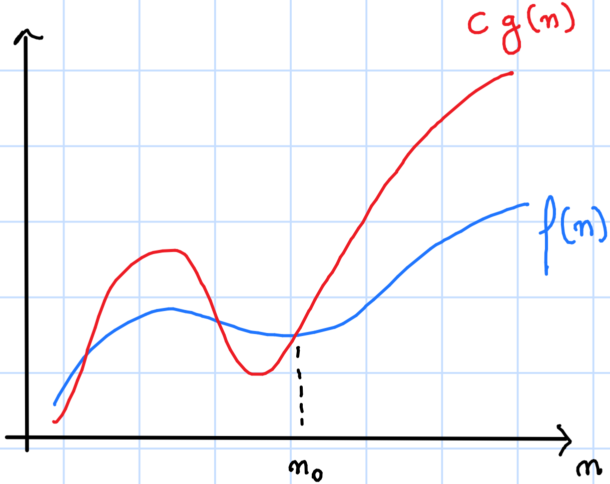
Notação O - "Oh zão"

Def. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que $f(n) \in O(g(n))$ se existem constantes positivas C e n_0 tais que $f(n) \leq C g(n)$ para todo $n \geq n_0$.



Notação O - "Oh zão"

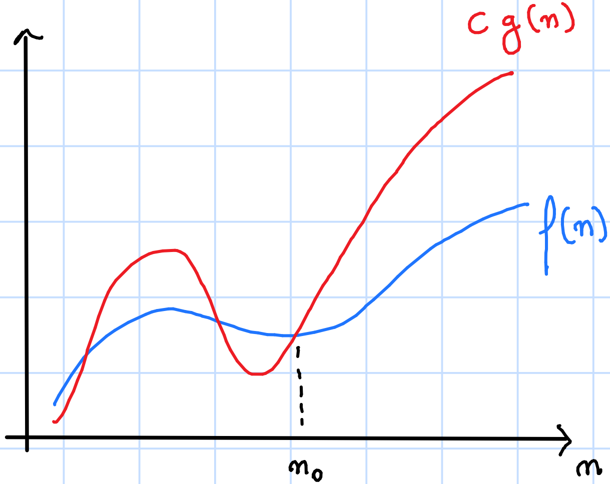
Def. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que $f(n) \in O(g(n))$ se existem constantes positivas C e n_0 tais que $f(n) \leq C\,g(n)$ para todo $n \geq n_0$.



<u>Significado</u>: para valores de n "suficientemente grandes", a função $f(n)$ é dominada por uma "versão escalada" de $g(n)$.

Notação O - "Ohzão"

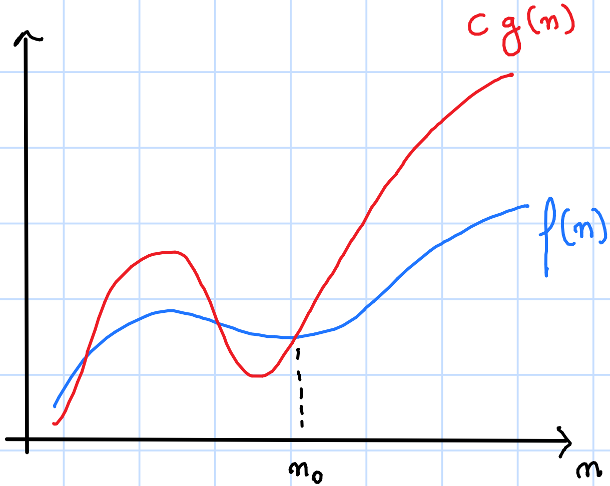
Def. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que $f(n) \in O(g(n))$ se existem constantes positivas C e n_0 tais que $f(n) \leq C\,g(n)$ para todo $n \geq n_0$.



<u>Significado</u>: Uma versão escalada de $g(n)$ é um limitante superior para $f(n)$ para valores suficientemente grandes.

Notação O - "Oh zão"

Def. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que $f(n) \in O(g(n))$ se existem constantes positivas C e n_0 tais que $f(n) \leq C g(n)$ para todo $n \geq n_0$.



- Note que $O(g(n))$ é uma classe de funções, um conjunto, e $f(n) \in O(g(n))$

Nomenclatura e Abuso de Notação

A seguintes notações são equivalentes:

- $f(n) \in O(g(n))$
- $f(n)$ é $O(g(n))$
- $f(n) = O(g(n))$

→ Esse abuso de notação é extremamente comum. Entretanto é importante manter em mente que $O(g(n))$ representa um conjunto de funções.

Exemplo - Método: Isolando a Constante

Ex: Prove que $f(n) = 5n+3$ é $O(n)$ exibindo as constantes.

Exemplo - Método: Isolando a Constante

Ex: Prove que $f(n) = 5n+3$ é $O(n)$ exibindo as constantes.

Sol.

- Se $f(n)$ é $O(n)$, então existem constantes n_0 e C tais que

$$f(n) \leq C n \qquad \forall n \geq n_0$$

- Assim

$$5n + 3 \leq Cn$$

$$5 + \frac{3}{n} \leq C$$

Note que $5 + \frac{3}{n} \leq 8$ para qualque $n \geq 1$. vale

Portanto para $C = 8$ e $n_0 = 1$, temos que o resultado $\square$

Exemplo - Método do Sanduíche

Ex: Prove que $f(n) = 5n + 100$ é $O(n^2)$ e exiba as constantes.

Sol 1

Note que

$$5n + 100 \leq 5n + 100n = 105n \leq 105n^2$$

Vale para $n \geq 1$

Assim, com $C = 105$ e $n_0 = 1$, temos que $f(n) \in O(n^2)$

$\square$

Exemplo - Método do Sanduíche

Ex: Prove que $f(n)=7n+30$ é $O(n^2)$ e exiba as constantes

Sol 2

Note que

$$7n+30 \le n^2$$

Vale para $n \geq 10$

$$7n+30 \le n^2$$

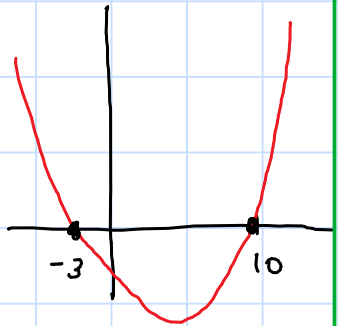
$$0 \le n^2 - 7n - 30$$

$$\frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{49+120}}{2}$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{7 \pm 13}{2}$$

$$n' = 10 \quad e \quad n'' = -3$$



Portanto para $c=1$ e $n_0 = 10$, temos que $f(n) \in O(n^2)$ $\square$

Exemplo

Ex: mostre que $f(n) = 7n + 30 \notin O(\sqrt{n})$.

Exemplo

Prova por contradição mostrando que não é posível ter as constantes

Ex: mostre que $f(n) = 7n + 30 \notin O(\sqrt{n})$.

Sol

- Suponha para uma contradição que $f(n) \in O(\sqrt{n})$.
- Então existem constantes positivas C e n_0 tais que

$$f(n) \leq C\sqrt{n} \quad \forall n \geq n_0$$

- Assim,

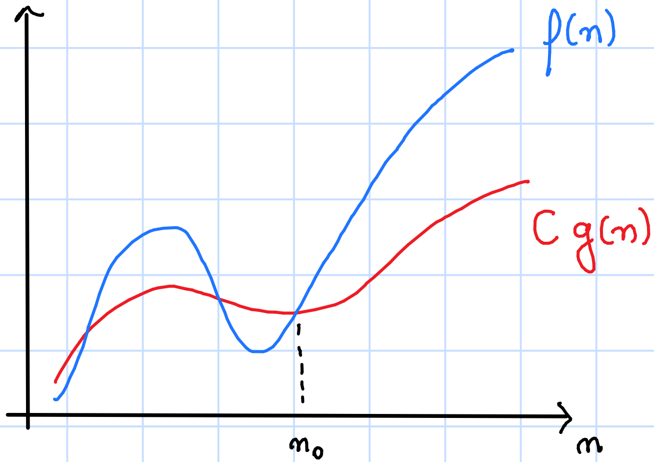
$$7n + 30 \leq C\sqrt{n} \iff \frac{7n}{\sqrt{n}} + \frac{30}{\sqrt{n}} \leq C \iff 7\sqrt{n} + \frac{30}{\sqrt{n}} \leq C.$$

- Note que $\lim_{n \to \infty} 7\sqrt{n} = \infty$ e $\lim_{n \to \infty} \frac{30}{\sqrt{n}} = 0$

- Assim, $7\sqrt{n} + \frac{30}{\sqrt{n}} \to \infty$ qndo $n \to \infty$, o que contraria a existência de C

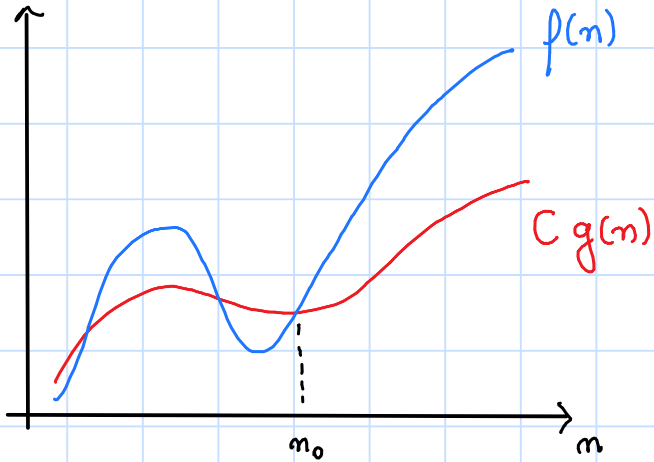
Notação Ω - "Omega"

Def. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que $f(n) \in \Omega(g(n))$ se existem constantes positivas C e n_0 tais que $f(n) \geq C\,g(n)$ para todo $n \geq n_0$.



Notação Ω - "Omega"

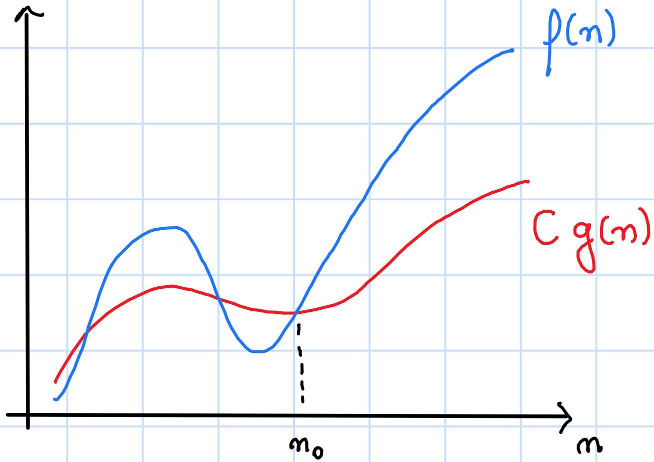
Def. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que $f(n) \in \Omega(g(n))$ se existem constantes positivas C e n_0 tais que $f(n) \geq C\,g(n)$ para todo $n \geq n_0$.



<u>Significado</u>: para valores de n "suficientemente grandes", a função $f(n)$ é limitada inferiormente por uma "versão escalada" de $g(n)$.

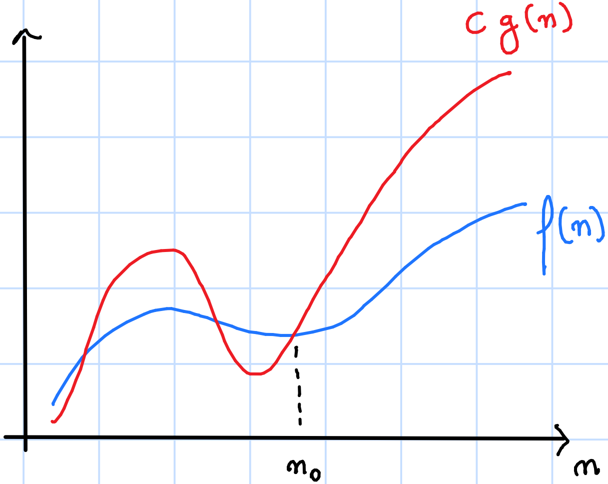
Notação Ω - "Omega"

Def. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que $f(n) \in \Omega(g(n))$ se existem constantes positivas C e n_0 tais que $f(n) \geq C\,g(n)$ para todo $n \geq n_0$.



Significado: Uma versão escalada de $g(n)$ é um limitante inferior para $f(n)$ para valores suficientemente grandes.

Teo $f(n) \in O(g(n))$ se e somente se $g(n) \in \Omega(f(n))$



Teo $f(n) \in O(g(n))$ se e somente se $g(n) \in \Omega(f(n))$

Demonstração

$(\Rightarrow)$

Se $f(n) \in O(g(n))$, então existem constantes C e n_0 tais que

$$f(n) \leq C\,g(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Então

$$\frac{1}{C} f(n) \leq g(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Portanto

$$g(n) \in \Omega(f(n))$$

$(\Leftarrow)$

Exercício

$\square$

Exemplo - Método: isolando a constante

Ex: mostre que $f(n) = 5n + 3 \in \Omega(n)$ exibindo as constantes

Exemplo - Método: isolando a constante

Ex: mostre que $f(n) = 5n + 3 \in \Omega(n)$ exibindo as constantes

Sol

- Se $f(n) \in \Omega(n)$, então existem constantes c e n_0 tais que

$$f(n) \geq C\, g(n) \quad \forall\, n \geq n_0 \qquad (A)$$

- Assim,

$$5n + 3 \geq Cn \iff 5 + \frac{3}{n} \geq C$$

- note que $\frac{3}{n} \geq 0$ para todo $n \geq 1$

- Assim, para $C = 5$ e $n_0 = 1$, temos que (A) vale e o teorema segue. $\square$

Exemplo - Método: do Sanduíche

Ex: mostre que $f(n) = 5n + 3 \in \Omega(\sqrt{n})$ exibindo as constantes

Sol

Note que

$$5n + 3 \geqslant 5n \geqslant 5\sqrt{n}$$

Assim, para $c = 5$ e $n_0 = 1$, temos que $f(n) \in \Omega(\sqrt{n})$

$\square$

Exemplo - Método: do Sanduíche

↳ tirando lasquinha para se livrar de temo negativo

Ex: mostre que $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

Exemplo - Método: do Sanduíche

↳ tirando lasquinha para se livrar de temo negativo

Ex: mostre que $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

Nosso objetivo

$$n^2 - 10n + 7 \geq \cdots \geq c\,n^2$$

ñ há problema em jogar termo positivo de menor ordem fora

$$n^2 - 10n + 7 \geq n^2 - 10n \cancel{\geq} n^2$$

errado

Exemplo - Método: do Sanduíche

↳ tirando lasquinha para se livrar de temo negativo

Ex: mostre que $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

$$n^2 - 10n = \frac{1}{2}n^2 + \boxed{\frac{1}{2}n^2 - 10n} \geq \frac{1}{2}n^2$$

a ideia é tirar uma lasquinha do termo de maior ordem e fazer n_0 ser tão grande que o "quadrado verde" fique positivo

Exemplo - Método: do Sanduíche

↳ tirando lasquinha para se livrar de temo negativo

Ex: mostre que $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

$$n^2 - 10n = \frac{1}{2}n^2 + \boxed{\frac{1}{2}n^2 - 10n} \geq \frac{1}{2}n^2$$

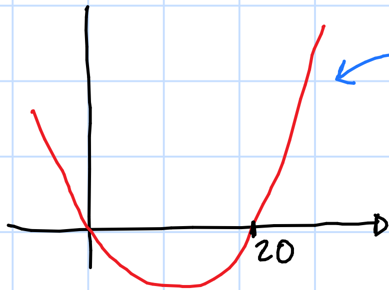
Quando $\frac{1}{2}n^2 - 10n \geq 0$?

Analisando as raízes:

$\frac{1}{2}n^2 - 10n = 0$

$n(\frac{1}{2}n - 10) = 0$

$n' = 0$ ou $n'' = 20$



$n \geq 20$ a função fica ≥ 0

Ex: mostre que $f(n) = n^2 - 10n + 7 \in \Omega(n^2)$

Sol

- Note que

$$n^2 - 10n + 7 \geq n^2 - 10n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 - 10n \qquad (A)$$

- Note também que $\frac{1}{2}n^2 - 10n \geq 0$ para todo $n \geq 20$, pois

$$\frac{1}{2}n^2 - 10n = 0 \iff n\left(\frac{1}{2}n - 10\right) = 0$$

que é 0 qndo $n = 0$ ou

$$\frac{1}{2}n - 10 = 0 \iff \frac{1}{2}n = 10 \iff n = 20$$

- Assim, $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 - 10n \geq \frac{1}{2}n^2$, e o resultado segue para $n_0 = 20$ e $c = 1/2$ $\square$

Exemplo

Prova por contradição mostrando que ñ é possível ter as constantes

Ex: mostre que $f(n) = 5n + 3 \notin \Omega(n^2)$

Sol

- Suponha para uma contradição que $f(n) \in \Omega(n^2)$
- Então existem constantes positivas C e n_0 tais que

$$f(n) \geq C n^2 \qquad \forall\, n \geq n_0$$

- Portanto

$$5n + 3 \geq C n^2$$

$$\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \geq C$$

- Note que $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 0$, o que contraria o fato de C ser uma constante positiva $\square$

Nomenclatura e Abuso de Notação

A seguintes notações são equivalentes:

- $f(n) \in \Omega(g(n))$

- $f(n)$ é $\Omega(g(n))$

- $f(n) = \Omega(g(n))$

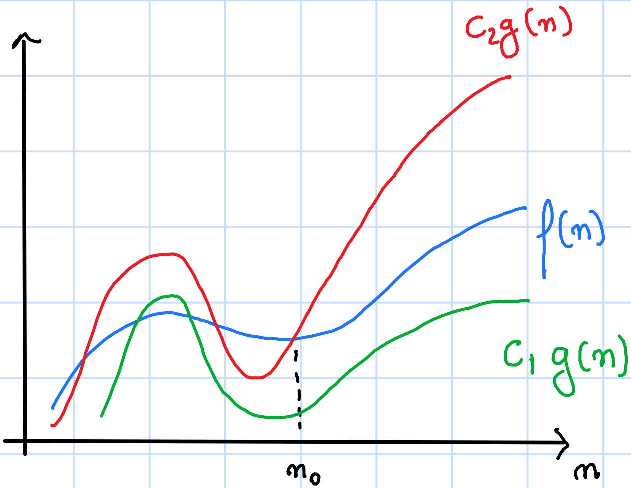
Esse abuso de notação é extremamente comum. Entretanto é importante manter em mente que $\Omega(g(n))$ representa um conjunto de funções.

Notação Θ - "Theta"

Def. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que $f(n) \in \Theta(g(n))$ se existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Teo $f(n) \in \Theta(g(n))$ sse $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $f(n) \in O(g(n))$

$\hookrightarrow$ a demonstração segue diretamente das definições de Θ, Ω e O.

Nomenclatura e Abuso de Notação

A seguintes notações são equivalentes:

- $f(n) \in \Theta(g(n))$

- $f(n)$ é $\Theta(g(n))$

- $f(n) = \Theta(g(n))$

Esse abuso de notação é extremamente comum. Entretanto é importante manter em mente que $\Theta(g(n))$ representa um conjunto de funções.

$O(1)$, $\Omega(1)$ e $\Theta(1)$

Escrevemos $f(n) = O(1)$ e $f(n) = \Omega(1)$ para denotar que $f(n)$ é limitada superiormente e interior-mente, respectivamente, por uma constante c.

$\exists\, c$ e n_0 tais que $f(n) \leq c \cdot 1$

Quando $f(n) = O(1)$ e $f(n) = \Omega(1)$, também escrevemos $f(n) = \Theta(1)$

Notação o – "onzinho"

Def Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que

$$f(n) \in o(g(n))$$

Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 .$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{para toda constante } c > 0 \text{, existe um } n_0 \text{ tal que} \\ f(n) < c\, g(n) \quad \forall\, n \geq n_0 . \end{array}}$$

Nomenclatura e Abuso de Notação

A seguintes notações são equivalentes:

- $f(n) \in o(g(n))$
- $f(n)$ é $o(g(n))$
- $f(n) = o(g(n))$
- $f(n) \ll g(n)$

lê-se: "f é assintoticamente inferior à g"

notação nova!

Notação ω – "omegazinho"

Def Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Dizemos que

$$f(n) \in \omega(g(n))$$

Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Se para toda constante $c > 0$, existe um n_0 tal que

$$f(n) > c\,g(n) \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Nomenclatura e Abuso de Notação

A seguintes notações são equivalentes:

- $f(n) \in \omega(g(n))$.
- $f(n)$ é $\omega(g(n))$.
- $f(n) = \omega(g(n))$.
- $f(n) \gg g(n)$

Intuição Sobre Notação Assintótica

- $f(n) = \Theta(g(n))$ — f cresce com a mesma razão de g
- $f(n) = O(g(n))$ — f não cresce mais rápido que g
- $f(n) = \Omega(g(n))$ — f cresce tão rápido qnto g
- $f(n) = o(g(n))$ — f cresce mais devagar que g
- $f(n) = \omega(g(n))$ — f cresce mais rápido que g

Propriedades envolvendo notação Assintótica

Sejam $f(n)$, $g(n)$ e $h(n)$ funções positivas e assuma que $n \geq 0$.

Transitividade

Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$

(o mesmo vale se trocarmos O por Ω, Θ, o ou ω)

Reflexiva

$f(n) \in O(f(n))$ $\qquad$ $f(n) \in \Omega(f(n))$ $\qquad$ $f(n) \in \Theta(f(n))$

Simetria

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$$

Propriedades envolvendo notação Assintótica

$f(n), g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) + g(n) \in O(h(n))$

$f(n) = 5n^2 - lg(n) + 30 \quad \in O(n^2)$

$g(n) = 7n^3 + 12n^2 \quad \in O(n^3)$

$f(n) + g(n) = 7n^3 + 17n^2 - lg(n) + 30 \in O(n^3)$

$f(n) \in O(g_1(n))$ e $h(n) \in O(g_2(n))$, então $f(n)\,g(n) \in O(g_1(n) \cdot g_2(n))$

$f(n) = n^2 + 3n \quad \in O(n^2)$

$g(n) = 7n^3 \quad \in O(n^3)$

$f(n) \cdot g(n) = (n^2 + 3n)\,7n^3 = 7n^5 + 21n^4 \in O(n^2 \cdot n^3) = O(n^5)$

Teo $f(n) \in o(g(n))$ sse $g(n) \in \omega(f(n))$.

Teo se $f(n) \in o(g(n))$, então $g(n) \notin O(f(n))$

Teo Se $f(n) \in \omega(g(n))$, então $g(n) \notin \Omega(f(n))$

Teo se $f(n) = \Theta(g(n))$, então $f(n) \neq o(g(n))$

Demonstração

- Como $f(n) = \Theta(g(n))$, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad *$$

- Se $f(n) = o(g(n))$, então $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, ou seja,

$$\forall c > 0, \exists n' \text{ tal que } f(n) < c\, g(n) \quad \forall n \geqslant n'$$

- o que não é possível, pois $c_1 > 0$ e, $\forall n > n_0$, sabemos

$$f(n) \geqslant c_1 g(n)$$

$\square$

Teo se $f(n) = \Theta(g(n))$, então $f(n) \neq \omega(g(n))$

Demonstração

- Como $f(n) = \Theta(g(n))$, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \quad \forall\, n \geq n_0 \quad *$$

- Se $f(n) = \omega(g(n))$, então $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, ou seja,

$\forall c > 0$, $\exists\, n'$ tal que $f(n) > c\, g(n) \quad \forall_{n \geq n'}$

- o que não é possível, pois $c_2 > 0$ e, $\forall\, n > n_0$, sabemos

$$f(n) \leq c_2 g(n)$$

$\square$

theta é tight

Apertado/justo

Coro. se $f(n) = \Theta(g(n))$, então

$$f(n) \neq \omega(g(n)) \quad e \quad f(n) \neq o(g(n)).$$

Limite e Notação Assintótica

As definições de notação assintótica estão relacionadas ao conceito de limite. Assim, $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ revela a relação assintótica entre f e g (desde que esse limite exista).

Limite e Notação Assintótica

Teo Se $f(n)$ e $g(n)$ são funções positivas, $n \geq 0$, então

ⓐ $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0, \infty \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

ⓑ $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$

ⓒ $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$

ⓓ $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow f(n) \in o(g(n))$

ⓔ $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Leftrightarrow f(n) \in \omega(g(n))$

Aplicação

com este método, ñ é possível exibir as constantes

Ex Prove que $f(n) = 3n^4 - 5n^3 + 4n \in \Theta(n^4)$

Sol

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^4 - 5n^3 + 4n}{n^4}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(3 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^3} \right) = \lim_{n \to \infty} 3 - \lim_{n \to \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n^3}$$

$$= 3 - 0 + 0 = 3.$$

Como $\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) = 3$, pelo Teorema dos Limites (a),

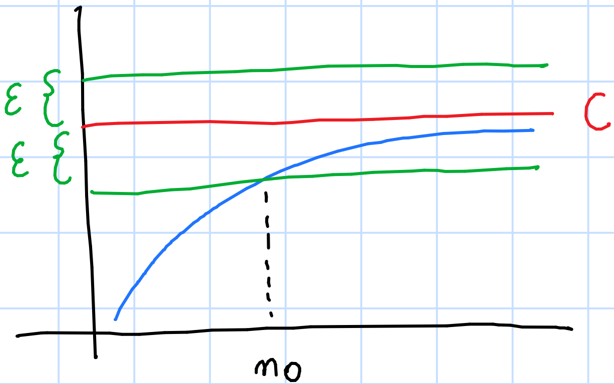
temos que $f(n) \in \Theta(n^4)$ $\square$

Teo. Dadas duas funções positivas $f(n)$ e $g(n)$. Se $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0, \infty$ então $f(n) = \Theta(g)$.

Demonstração

- Se $\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) \neq 0, \infty$, temos que $\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) = C$, onde C é uma constante
- Pela definição de limite, temos

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \text{ tal que } \forall n > n_0 \ \left| \frac{f(n)}{g(n)} - C \right| < \varepsilon.$$



- Seja $\varepsilon' < C$
- Então existe um n_0 tal que, para todo $n > n_0$, vale $\left| \frac{f(n)}{g(n)} - C \right| < \varepsilon'$

se $\frac{f(n)}{g(n)} - c \geq 0$, então

$$f(n)/g(n) - c \geq 0 \Leftrightarrow f(n) \geq c\,g(n)$$

Logo $f(n) \in \Omega(g(n))$

Além disso

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - c \right| < \varepsilon' \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} - c < \varepsilon' \Leftrightarrow f(n) \leq (\varepsilon' + c) \quad (n)$$

Logo $f(n) \in O(g(n))$

se $\frac{f(n)}{g(n)} - c \leq 0$, então

$$f(n)/g(n) - c \leq 0 \iff f(n) \leq c\,g(n)$$

Logo $f(n) \in O(g(n))$

Além disso

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)} - c\right| < \varepsilon' \iff -\left(\frac{f(n)}{g(n)} - c\right) < \varepsilon' \iff \frac{f(n)}{g(n)} - c > -\varepsilon'$$

Como $\varepsilon < C$, $C - \varepsilon > 0$

$$\iff f(n) > (C - \varepsilon)\, g(n)$$

Logo, $f(n) \in \Omega(g(n))$ $\square$

Teo Para todo $\alpha, k > 0$ pertencentes aos reais

$$(\ln n)^k \in o(n^\alpha)$$

$$n^k \in o((1+\alpha)^n)$$

Teo Para todo $\alpha, k > 0$ pertencentes aos reais

$$(\ln n)^k \in o(n^\alpha)$$

$$n^k \in o((1+\alpha)^n)$$

$$(\ln n)^{100000} \ll n^{0.000001}$$

$$n^{1000000000} \ll 1.000000001^n$$

Teo Para todo $\alpha, k > 0$ pertencentes aos reais

$$(\ln n)^k \in o(n^\alpha)$$
$$n^k \in o((1+\alpha)^n)$$

Demonstração

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{\alpha/k}} \right)^k \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha/k}} \right)^k$$

Por L'Hospital

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha/k}} \right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 1}{\frac{\alpha}{k} \, n^{\alpha/k - 1}} \right)^k = \left(\frac{k}{\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha/k}} \right)^k$$

$$= \left[\frac{k}{\alpha} \cdot 0 \right]^k = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+\alpha)^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\alpha)^{n/k}} \right)^k$$

Por L'Hospital

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\alpha)^{n/k}} \right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{k}(1+\alpha)^{n/k-1}} \right)^k = \frac{k}{n}(1+\alpha) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^{n/k}}$$

$$= \frac{k}{n}(1+\alpha) \cdot 0 = 0$$

$\square$

Cor Para todo $\alpha, k > 0$ pertencentes aos reais e para todo $b > 0$, $b \neq 1$, temos que

$$(\log_b n)^k \in o(n^\alpha)$$

Sabemos $(\ln n)^k \in o(n^\alpha)$

$$\log_b n = \boxed{\frac{1}{\ln b}} \cdot \ln n$$

↳ escalar!

Ordem de Crescimento

$$c \ll \log n \ll \sqrt{n} \ll n^c \ll n^c \lg n \ll 2^n \ll n!$$

Onde $c > 1$ é uma constante