# Recorrências

# Recorrência

- <u>Recorrência</u> é uma equação na qual o n-ésimo termo da sequência é igual a uma combinação dos termos anteriores

Ex

$$T(n) = \begin{cases} 5 & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 10 & \end{cases}$$

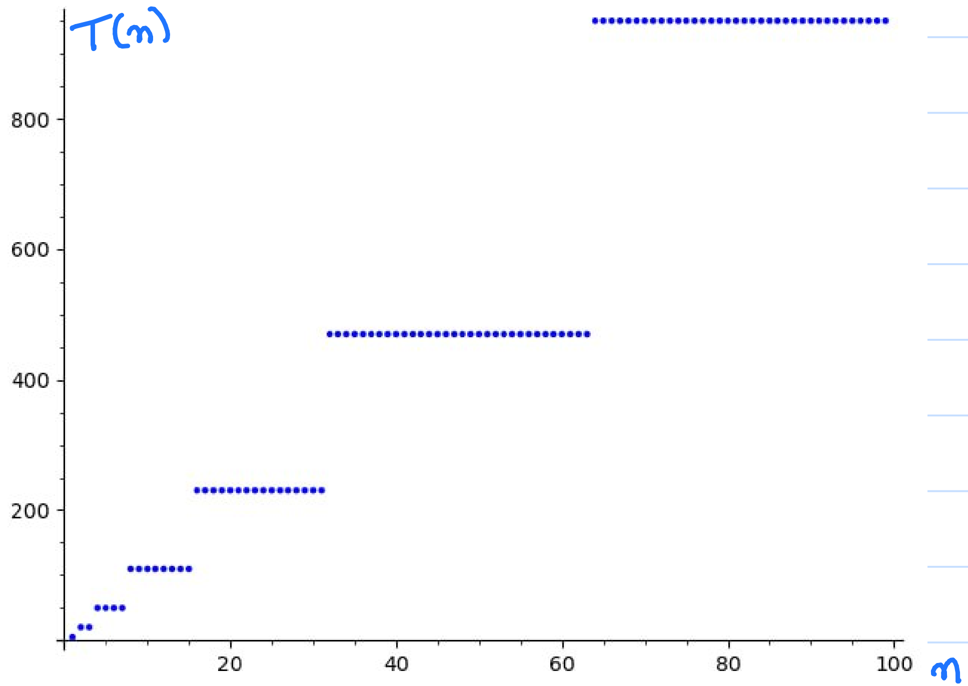
| $n$ | $T(n)$ |
|---|---|
| 1 | $5$ |
| 2 | $2T\left(\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor\right) + 10 = 2T(1) + 10 = 2 \cdot 5 + 10 = 20$ |
| 3 | $2T\left(\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor\right) + 10 = 2 \cdot T(1) + 10 = 20$ |
| 4 | $2T\left(\left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor\right) + 10 = 2 \cdot T(2) + 10 = 50$ |
| 5 | $50$ |
| 6 | $50$ |

# Recorrência

- <u>Recorrência</u> é uma equação na qual o n-ésimo termo da sequência é igual a uma combinação dos termos anteriores

Ex

$$T(n) = \begin{cases} 5 & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 10 & \end{cases}$$



# Recorrência

- **Recorrência** é uma equação na qual o n-ésimo termo da sequência é igual a uma combinação dos termos anteriores

Ex

$$Fib(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 3T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

# Resolução de Recorrèncias

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências

1) Substituição
2) Iteração
3) Árvore de recorrência
4) Método Mestre

# Método da Substituição

Ideia: demonstrar por indução matemática que a recorrência $T(n)$ é $O(f(n))$ e/ou $\Omega(f(n))$.

- é necessário que se saiba qual é a função $f$
  - geralmente, $f$ é obtida por um chute
    - precisa de experiência para dar um bom chute.

Assuma que $n = 2^k$ para algum $k \geq 1$

Apresente um limitante superior para a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Palpite: $T(n)$ é $O(n^2)$ há uma constante escondida.

Vamos provar por indução em $n$ que

$$T(n) \leq 10\, n^2 \qquad \forall\, n \geq 1$$

Como $10 n^2 = O(n^2)$, obteremos o resultado desejado.

## Base $(n=1)$

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

## Hipótese de Indução

$$T(k) \leq 10k^2 \quad \text{para todo } 1 \leq k < n$$

## Passo

Sabemos que

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\tfrac{n}{2}\right) + n \\ &\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\tfrac{n}{2}\right)^2 + n \\ &= 5n^2 + n \end{aligned}$$

H.I.

## Bese $(n=1)$

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

## Hipótese de Indução

$T(k) \leq 10k^2$ para todo $1 \leq k < n$

## Passo

Sebemos que $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$$\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n$$

H.I.

$$= 5n^2 + n$$

$$= O(n^2)$$

## Base $(n=1)$

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

## Hipótese de Indução

$T(k) \leq 10k^2$ para todo $1 \leq k < n$

## Passo

Sabemos que $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

H.I.

$$\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n$$

$$= 5n^2 + n$$

$$= O(n^2)$$

Bese $(n=1)$

Sabemos que $T(1) = 1 \leqslant 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

Hipótese de Indução

$T(k) \leqslant 10k^2$ para todo $1 \leqslant k < n$

Passo

Sebemos que $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ H.I.

$\leqslant 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n$

Você esta provando que $T(n) \leqslant 10n^2$ !!

$= 5n^2 + n$

$= O(n^2)$ ✗

## Base $(n=1)$

Sabemos que $T(1) = 1 \leq 10n^2 = 10 \cdot 1^2 = 10$

## Hipótese de Indução

$$T(k) \leq 10k^2 \quad \text{para todo } 1 \leq k < n$$

## Passo

Sabemos que
$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\tfrac{n}{2}\right) + n \\
&\leq 2 \cdot 10 \cdot \left(\tfrac{n}{2}\right)^2 + n \qquad \text{H.I.} \\
&= 5n^2 + n \\
&\leq 5n^2 + 5n^2 \\
&\leq 10n^2
\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova. Portanto, $T(n) \leq 10n^2$ para todo $n \geq 1$ e, como consequência, $T(n) = O(n^2)$ $\square$

- Essa recorrência era mamão com açúcar
  - tivemos sorte ao escolher a constante 10, nem sempre é tão fácil fazer esse chute
  - Na prática, deixamos a demonstração nos mostrar quem é a constante $c$ e $n_0$
    - Precisamos chutar apenas a função

Assuma que $n = 2^k$ para algum $k \geq 1$

Apresente um limitante superior para a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Palpite: $T(n)$ é $O(n^2)$

Vamos provar por indução em $n$ que

$$T(n) \leq c\, n^2$$

A Prova

Vai dizer quem é c

# Passo

$\frac{n}{2} \geq 1 \iff n \geq 2$

Sabemos que
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$
$$\leq 2 \cdot c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n \qquad \text{por H.I.}$$
$$= \frac{cn^2}{2} + n$$
$$\leq cn^2 \qquad *$$

Temos que * vale se $\frac{cn^2}{2} + n \leq cn^2 \iff$

$$\frac{cn}{2} + 1 \leq cn \iff 1 \leq \frac{cn}{2} \iff \frac{2}{n} \leq c$$

Funciona para $c \geq 2$

$\frac{2}{n} \leq 2 \quad \forall\, n \geq 1$

## Base $(n=1)$

- Sabemos que $T(1) = 1$.
- Queremos que $c \cdot n^2 \geq T(1) = 1$

$c \cdot n^2 = c$ neste caso

- Logo a base vale para qualquer $c \geq 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ O passo funciona para } c \geq 2 \text{ e } n \geq 2 \\ \bullet \text{ A base funciona para } c \geq 1 \text{ e } n = 1 \\ \text{Portanto a prova funciona para } c \geq 2 \text{ e } n \geq 1. \end{array}}$$

$\square$

Assuma que $n = 3^k$ para algum $k \geq 1$

Mostre um limitante superior para

$$T(n) \leq \begin{cases} 8 & \text{se } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Atenção

Assuma que $n = 3^k$ para algum $k \geq 1$

Mostre um limitante superior para

$$T(n) \leq \begin{cases} 8 & \text{se } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Atenção

Assuma que $n = 3^k$ para algum $k \geq 1$

Mostre um limitante superior para

$$T(n) \leq \begin{cases} 8 & \text{se } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Atenção

Chute: $T(n) = O(n)$

Então, vamos provar por indução que

$$T(n) \leq c\,n$$

novamente, vamos deixar a prova escolher a constante

Passo

$\frac{n}{3} \geq 1 \iff n \geq 3$

Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1$ ⇒ Por H.I.

$\leq cn + 1$

$\leq cn$ *

Quando $cn + 1 \leq cn$ ?

## Passo

$\frac{n}{3} \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 3$

Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1 \quad \text{Por H.I.}$$

$$\leq cn + 1$$

$$\leq cn \quad *$$

Quando $cn + 1 \leq cn$ ?

NUNCA!

- Isto não implica que $T(n) \neq O(n)$
  - De fato, $T(n) = O(n)$
  - Só mostra que essa prova não funciona

- Vamos tentar resolver o problema com uma H.I. mais forte!

- Vamos analisar o problema

Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1$ ▷ Por H.I.

$\leq cn + 1$

$\leq cn$

é um termo de menor ordem

Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1$ ⟹ Por H.I.

$\leq cn + 1$

$\leq cn$

① é um termo de menor ordem

② Vamos tentar subtraí-lo

Nova Prop. $T(n) \leq cn - 1$

$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$\leq 3\left[c\frac{n}{3} - 1\right] + 1$

$= cn - 3 + 1$

$= cn - 2 \leq cn$

Vamos usá-lo para matar esse

Sabemos que $T(n) \le 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$$\le 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1 \quad \triangleright \text{ Por H.I.}$$

$$\le cn + 1$$

$$\le cn$$

① é um termo de menor ordem

② Vamos tentar subtraí-lo

NOVA Prop. $T(n) \le cn - 1$

$$T(n) \le 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

$$\le 3\left[c\frac{n}{3} - 1\right] + 1$$

$$= cn - 3 + 1$$

$$= cn - 2 \le cn$$

Vamos usá-lo para Matar esse

Precisamos provar $\le cn - 1$

Sabemos que $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

$\leq 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} + 1$ ⊳ Por H.I.

$\leq cn + 1$

$\leq cn$

1 é um termo de menor ordem

2 Vamos tentar subtraí-lo

Nova Prop. $T(n) \leq cn - 1$

$$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

$$\leq 3\left[c\frac{n}{3} - 1\right] + 1$$

Vamos usá-lo para matar esse

$$= cn - 3 + 1$$

$$= cn - 2 \leq cn - 1 \quad \blacksquare$$

Podemos deixar a demonstração escolher essa constante também.

NOVA Prop. 2 $\quad T(n) \leq cn - d$

PASSO

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \\ &\leq 3\left[c\frac{n}{3} - d\right] + 1 \\ &= cn - 3d + 1 \\ &\leq cn - d \end{aligned}$$

*

* Vale se

$$-3d + 1 \leq -d$$

$$1 \leq 2d$$

$$\frac{1}{2} \leq d$$

funciona para $c \geq 1$, $d \geq 1/2$ e $n \geq 3$

## Base $(n=1)$

- Sabemos que $T(1)=8$.
- Queremos que $cn-d \geqslant T(1)=8$. Portanto

$$cn-d \geqslant 8$$
$$c \cdot 1 - d \geqslant 8$$
$$c \geqslant 8+d$$

- O que sabemos?
  - Passo funciona para: $c \geqslant 1$, $d \geqslant 1/2$ e $n \geqslant 3$
  - Base funciona para: $c \geqslant 8+d$

Portanto a prova funciona para: $d=1$, $c=9$

$$T(n)=O(n)$$

# Outro exemplo do uso do truque

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

chute $T(n) = O(n^2)$

$T(n) \leq cn^2$

$$\leq 4\left[c\left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n$$

$$= cn^2 + n$$

NUNCA

$$\leq cn^2$$

Sobra é linear

---

$T(n) \leq cn^2 - dn$

$$\leq 4\left[c\left(\frac{n}{2}\right)^2 - d\left(\frac{n}{2}\right)\right] + n$$

$$= cn^2 - 2dn + n$$

$\forall d \geq 1$

$$\leq cn^2 - dn$$

Mostre um limite inferior para a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + 3n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Chute: $T(n) = \Omega(n^2)$

Para demonstrar esse fato, vamos provar por indução em n que

$$T(n) \geqslant c\, n^2$$

## Passo

$$T(n) = T(n-1) + 3n$$

$$\geq c(n-1)^2 + 3n \qquad \triangleright \text{ Por H.I.}$$

$$= c(n^2 - 2n + 1) + 3n$$

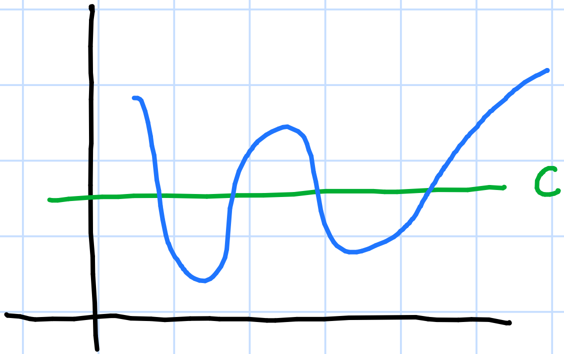
$$= cn^2 - 2cn + c + 3n \quad *$$

$$\geq cn^2$$

Para * valer, precisamos que

$$-2cn + c + 3n \geq 0 \iff 3n \geq 2cn - c \iff 3n \geq c(2n-1)$$

$$\iff \boxed{\frac{3n}{2n-1}} \geq c$$



## Passo

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + 3n \\
&\geq c(n-1)^2 + 3n \qquad \triangleright \text{ Por H.I.} \\
&= c(n^2 - 2n + 1) + 3n \\
&= cn^2 - 2cn + c + 3n \quad * \\
&\geq cn^2
\end{aligned}
$$

Para * valer, precisamos que

$-2cn + c + 3n \geq 0 \iff 3n \geq 2cn - c \iff 3n \geq c(2n-1)$

$\iff \boxed{\dfrac{3n}{2n-1}} \geq c$

$$\frac{3n}{2n-1} \geq \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

Logo $c \leq \dfrac{3}{2}$

$T(n) \geq c\,n^2$

<u>Base</u> $(n=1)$

- Suponha que $n=1$
- Queremos que $c \cdot n^2 = c \cdot 1^2 \geq T(n) = T(1) = 1$
- Portanto

$$c \cdot 1^2 \geq 1$$

$$c \geq 1$$

i) Base funciona para: $n=1$ e $c \geq 1$

ii) Passo funciona para: $n \geq 2$ e $0 < c \leq 3/2$

Portanto a prova funciona para $n \geq 1$ e $c=1$

* Note que seria muito difícil acertar essa constante por causa de ii

Mostre que a recorrência $T(n)$ é $\Theta$ de alguma função $f$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chute: $T(n) = \Theta(n \lg n)$

Primeiro, vamos demonstrar que $T(n) = O(n \lg n)$ provando que

$$T(n) \leq c\, n \lg n$$

$n \geq 2$

Passo

$n \geq 1$ $\quad$ $n \geq 2$

$$T(n) = T\left(\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

$$\leq c \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + n$$

$$\leq c \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + n \quad a$$

$$\leq c \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg \tfrac{n}{2} + n$$

$$\leq c \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg n - c \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg 2 + n$$

$$\leq c \left( \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - c \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + n$$

$$\leq c\, n \lg n - \frac{c(n-1)}{2} + n \quad b$$

a)

$$\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2} \leq n$$

$$\frac{n+1}{2} \leq n \iff \frac{1}{2} \leq \frac{n}{2}$$

$$\iff 1 \leq n$$

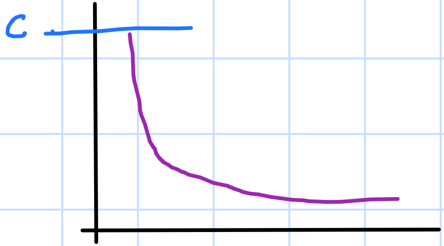
b)

$$\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n-1}{2}$$

$$-\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \leq -\frac{(n-1)}{2}$$

$$-c\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{-c(n-1)}{2}$$

# Passo




$$T(n) = T\Big(\overset{n \geq 1}{\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil}\Big) + T\Big(\overset{n \geq 2}{\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor}\Big) + n$$

$$\leq \dots$$

$$\leq c\, n \lg n - \frac{c(n-1)}{2} + n \quad (c)$$

$$\leq c\, n \lg n$$

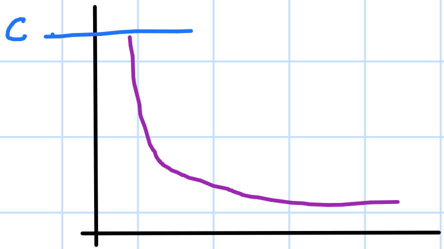
(c) $-\dfrac{c(n-1)}{2} + n \leq 0 \iff n \leq \dfrac{c(n-1)}{2} \iff \dfrac{2n}{n-1} \leq c$

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{2n}{n-1}\right) = \frac{(n-1)\cdot 2 - 2n}{(n-1)^2} = \frac{-2}{(n-1)^2}$$

$h = \dfrac{2n}{n-1}$ é decrescente $\Rightarrow h(2)$ é máximo

$h(2) = \dfrac{2 \cdot 2}{2-1} = 4 \Rightarrow$ Passo funciona $n \geq 2$ e $c \geq 4$

# Passo (Final V2)




$n \geq 1$ $\qquad$ $n \geq 2$

$$T(n) = T\left(\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

$$\leq \ldots$$

$$\leq c\, n \lg n - \frac{c(n-1)}{2} + n$$

$$\leq c\, n \lg n$$

©

$$© \quad -\frac{c(n-1)}{2} + n \leq 0 \iff n \leq \frac{c(n-1)}{2} \iff \frac{2n}{n-1} \leq c$$

$$\frac{2n}{n-1} \leq \frac{2n+2}{n-1} = \frac{2(n+1)}{(n-1)} \underset{n \geq 2}{\leq} 2 \cdot 3 \leq c$$

$$\frac{n+1}{n-1} \overset{?}{\leq} 3 \iff n+1 \leq 3n-3 \iff 4 \leq 2n$$

$$\iff 2 \leq n$$

Logo o passo funciona p/ $c \geq 6$ e $n \geq 2$

# Base

- O passo funciona para $n \geq 2$, então vamos escolher a nossa base como sendo $n=1$.

- Queremos mostrar que $T(n) \leq c\, n \lg n$ qndo $n=1$. Então

$$T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$$

- A base não vale!
  - Tudo bem, queremos mostrar que

$$T(n) \leq c\, n \lg n \quad \forall\, n \geq n_0$$

  - Vemos mostrar que podemos escolher

$$n_0 = 2$$

## Base

$$T(2) = T\left(\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor\right) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \leq c \cdot 2 \lg 2 \iff \frac{4}{2} \leq c \iff 2 \leq c$$

## Base

$$T(2) = T\left(\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor\right) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \leq c \cdot 2 \lg 2 \iff \frac{4}{2} \leq c \iff 2 \leq c$$

O que acontece no passo quando $n=3$?

$$T(3) = T\left(\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor\right) + 3$$

$$\leq c \left\lceil \tfrac{3}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \tfrac{3}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \tfrac{3}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \tfrac{3}{2} \right\rfloor + 3$$

$$\leq \ldots$$

$$\leq c\, 3 \lg 3$$

## Base

$$T(2) = T\left(\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor\right) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \leq c \cdot 2 \lg 2 \iff \frac{4}{2} \leq c \iff 2 \leq c$$

O que acontece no passo quando $n = 3$ ?

$$T(3) = T\left(\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor\right) + 3 \longrightarrow T(1)$$

$$\leq c \left\lceil 3/2 \right\rceil \lg \left\lceil 3/2 \right\rceil + c \left\lfloor 3/2 \right\rfloor \lg \left\lfloor 3/2 \right\rfloor + 3$$

$$\leq \ldots$$

$$\leq c \, 3 \lg 3$$

$T(1)$ ñ vale: $T(1) \cancel{\leq} c\, 1 \cdot \lg 1$

## Base

$$T(2) = T\left(\left\lceil \tfrac{2}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \tfrac{2}{2} \right\rfloor\right) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \leq c \cdot 2 \lg 2 \iff \frac{4}{2} \leq c \iff 2 \leq c$$

$$T(3) = T\left(\left\lceil \tfrac{3}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor 3/2 \right\rfloor\right) + 3$$

$$= T(2) + T(1) + 3 = 4 + 1 + 3 = 8$$

$$8 \leq c \cdot 3 \lg 3 \iff \frac{8}{3 \lg 3} \leq c$$

$\approx 1.68$

Base funciona

$c \geq 2$

Base com $n=2$ e $n=3$ são suficientes

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq 2$$

$n$ par

$$\frac{n}{2} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 4$$

$n$ ímpar

$$\frac{n-1}{2} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 5$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq 2$$

$n$ par

$$\frac{n}{2} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 4$$

$n$ ímpar

$$\frac{n+1}{2} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 3$$

Base funciona com = $n \in \{2,3\}$ e $c \geq 2$

Passo funciona com = $n \geq 4$ e $c \geq 4$

Portanto para $c = 4$ e $n_0 = 2$, temos que

$$T(n) \leq c\, n \lg n \quad \forall\, n \geq n_0$$

Isto prova que $T(n) = O(n \lg n)$

Agora vamos provar que $T(n) = \Omega(n \log n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Para isso, vamos mostrar que

$$T(n) \geq c\, n \lg n$$

Passo

$\star\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n}{4}$

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{4}$

$\frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{4}$

$\Updownarrow$

$\frac{n}{2} - \frac{n}{4} \geq 1$

$\Updownarrow$

$n \geq 4$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\geq c\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + n \quad \star \quad n \geq 4 \\
&\geq c\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg \tfrac{n}{2} + c\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg \tfrac{n}{4} + n \\
&= c\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg n - c\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \lg 2 + c\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg n \\
&\quad - c\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \lg 4 + n \\
&= c\left(\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil - 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\lceil n/2 \rceil - 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\
&\geq cn \lg n - c\lceil n/2 \rceil - 2c\lceil n/2 \rceil + n \\
&= cn \lg n - 3c\lceil n/2 \rceil + n \\
&\geq cn \lg n - 3c\left(\tfrac{n+1}{2}\right) + n \geq cn \lg n
\end{aligned}
$$

B C

(B) $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \frac{n+1}{2} \iff -\lceil \frac{n}{2} \rceil \geq -\frac{n+1}{2} \iff -3c\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq -3c\,\frac{n+1}{2}$

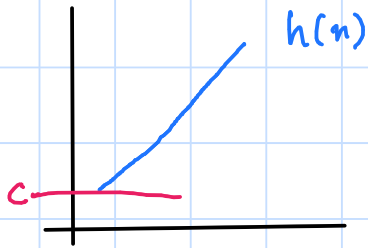
(C) O Passo (C) é verdade sempre que

$$-3c\left(\frac{n+1}{2}\right) + n \geq 0 \iff n \geq 3c\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$\iff \frac{2n}{3n+3} \geq c$. Seja $h(n) = \frac{2n}{3n+3}$

$$\frac{d}{dn}(h) = \frac{(3n+3)\,2 - 2n\cdot 3}{(3n+3)^2} = \frac{6n+6-6n}{(3n+1)^2} = \frac{6}{(3n+1)^2}$$

$h(n)$ é crescente. $\implies h(1)$ é mínimo




$$h(1) = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 1+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Versão de Final 2

(B) $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2} \iff -\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq -\frac{n+1}{2} \iff -3c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq -3c\,\frac{n+1}{2}$

(c) O Passo (c) é verdade sempre que

$$-3c\left(\frac{n+1}{2}\right) + n \geq 0 \iff n \geq 3c\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\iff \frac{2n}{3n+3} \geq c.$$

$$\frac{2n}{3n+3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1} \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq c$$

$n \geq 1$

$$\frac{n}{n+1} \overset{?}{\geq} \frac{1}{2} \iff n \geq \frac{n+1}{2} \iff 2n \geq n+1 \iff n \geq 1$$

Logo, o passo funciona para $0 < c \leq 1/3$ e
$n \geq 4$

escolhi um intervalo que funciona p/ os 2 finais.

Pelo exercício do 0, sabemos que a base não funciona para $n=1$, pois

$\lg 1 = 0$

- Portanto, aqui também precisamos de dois casos base.

## Base $n=2$ e $n=3$

$$T(2) = T\left(\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor\right) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$4 \geq c \cdot 2 \lg 2 \iff \frac{4}{2} \geq c \iff 2 \geq c$$

$$T(3) = T\left(\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor 3/2 \right\rfloor\right) + 3$$

$$= T(2) + T(1) + 3 = 4 + 1 + 3 = 8$$

$$8 \geq c \cdot 3 \lg 3 \iff \frac{8}{3 \lg 3} \geq c$$

$$\approx 1.68$$

Base funciona para $c \leq 1.5$

Portanto, temos

Base funciona para: $n \in \{2,3\}$ e $c \leq 1.5$

Passo funciona para: $n \geq 4$ e $0 < c \leq 1/3$

Logo, a prova funciona quando $n \geq 2$ e $c = 1/3$

Assim, $T(n) \geq \frac{1}{2} n \lg n \quad \forall n \geq 2.$

Isso prova que $T(n) = \Omega(n \lg n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) + T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Como provamos que

$$T(n) = O(n \lg n) \quad \text{e}$$

$$T(n) = \Omega(n \lg n),$$

Temos que $T(n) = \Theta(n \lg n)$.

Quando temos uma recorrência do tipo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + k & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

geralmente assumimos que $n = b^t$ para algum $t \geq 1$

- Se $n \neq b^t$, então $T(n)$ ñ está bem definido

EX

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(n/2) + 1 & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad \text{e } n = 3$$

- Indução só funciona em variável inteira (NATURAIS)
- Assintoticamente dá no mesmo p/ muitos casos

É possível provar que os tetos e pisos podem ser desconsiderados em recorrências do tipo

$$T(n) = a\left[T\left(\left\lfloor n/b \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil n/c \right\rceil\right)\right] + f(n)$$

qndo $a > 0$ e $b, c > 1$

→ Tipo mais frequente que surge em algoritmos

Assuma que $n = 2^k$ para algum $k \geq 1$

Apresente um limitante superior para a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

É comum tratarmos essas recorrências como

$$T(n) \leq \begin{cases} 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \end{cases} \quad \text{e} \quad T(n) \geq \begin{cases} 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \end{cases}$$

A notação $\Theta, O, \Omega$ escondem uma constante que não faz diferença para a notação assintótica

## Nossa Convenção

1. Quando $T(1)$ não for definido, assuma $T(1) = 1$

2. Se $T(\lfloor \frac{a}{b} \rfloor)$ ou $T(\lceil \frac{a}{b} \rceil)$ não aparecerem explicitamente, i.e., se escrevermos $T(\frac{a}{b})$, assuma que $a = b^k$ para algum $k$.

Fazendo o chute

- Não há receita genérica para o chute
  - A experiência é um fator importante
  - Normalmente recorrências similares possuem o mesmo fator de crescimento

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Muito parecida com $T(n) = \begin{cases} 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n \end{cases}$

que sabemos se $\Theta(n \lg n)$. Então chutamos $\Theta(n \lg n)$

(Exercício)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

- Intuitivamente $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 17) \approx T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

- chutamos $T(n) = \Theta(n \log n)$

Exercício

# Método da Iteração

# Método da Iteração

## Ideia

1. Expandir a recorrência iterativamente até chegar no caso base
2. Reescrevê-la como uma somatória em termos de $n$

Não é necessário adivinhar a resposta

- É útil conhecer fórmulas de somatório

Resolva a recorrência $T(x) \leq T\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.

$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$\leq T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 + 1$$

$$\leq \left[T\left(\frac{n}{8}\right) + 1\right] + 1 + 1$$

$$= T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3$$

$$\leq \left[T\left(\frac{n}{16}\right) + 1\right] + 3$$

$$= T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4 \leq \ldots \leq T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq T\left(\frac{n}{4}\right) + 1$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) \leq T\left(\frac{n}{8}\right) + 1$$

$$T\left(\frac{n}{8}\right) \leq T\left(\frac{n}{16}\right) + 1$$

Vamos expandir isso até $\frac{n}{2^i} = 1$, pois sabemos $T(1) = 1$

Isso vai acontecer qndo

$$\frac{n}{2^i} = 1 \iff n = 2^i \iff \lg n = \lg 2^i \iff \lg n = i$$

Assim, qndo $i = \lg n$, teremos

$$T(n) \leq \dots \leq T(1) + \lg n = 1 + \lg n.$$

Portanto, $T(n) = O(\lg n)$.

Resolva a recorrência $T(n) = 2T(n-1) + n$

$T(\square) = 2T(\square - 1) + \square$

$T(n-1) = 2T(n-2) + n-1$

$T(n-2) = 2T(n-3) + n-2$

$T(n-3) = 2T(n-4) + n-3$

$$T(n) = 2T(n-1) + n$$

$$= 2\left[2T(n-2) + n-1\right] + n$$

$$= 2^2 T(n-2) + 2n - 2 + n$$

$$= 2^2\left[2T(n-3) + n-2\right] + 2n - 2 + n$$

$$= 2^3 T(n-3) + 2^2 n - 2^2 \cdot 2 + 2n - 2 + n$$

$$= 2^3\left[2T(n-4) + n-3\right] + 2^2 n - 2^2 \cdot 2 + 2n - 2 + n$$

$$= 2^4 T(n-4) + 2^3 \cdot n - 2^3 \cdot 3 + 2^2 n - 2^2 \cdot 2 + 2n - 2 + n$$

$$= 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j n - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j \cdot j$$

$$= 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j n - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j \cdot j$$

$$= 2^i T(n-i) + n \sum_{j=0}^{i-1} 2^j - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j \cdot j$$

$$= 2^i T(n-i) + n(2^i - 1) - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j \cdot j$$

Temos que a iteração termina qndo $n - i = 1$
$\Leftrightarrow \quad n - 1 = i$

Assim, temos que

$$T(n) = 2^{n-1} \cdot T(1) + n(2^{n-1} - 1) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$$

$$= 2^{n-1} + n(2^{n-1} - 1) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$$

Até agora temos

$$T(n) = \underbrace{2^{n-1} + n\left(2^{n-1} - 1\right) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^{j} \cdot j}_{*}$$

$$* = O(g) \Rightarrow T(n) = O(g)$$

$$* = \Omega(g) \Rightarrow T(n) = \Omega(g)$$

Vamos provar um limitante superior para $T(n)$

$$T(n) = 2^{n-1} + n\left(2^{n-1} - 1\right) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$$

$$\leq 2^{n-1} + n\,2^{n-1} - n$$

$$\leq 2^{n-1} + n\,2^{n-1} = O\left(n 2^n\right)$$

Será que se não descartarmos $-\sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$ conseguimos um limitante melhor?

→ Vamos tentar

Vamos provar um limitante superior para $T(n)$

$$T(n) = 2^{n-1} + n\,(2^{n-1} - 1) - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \cdot j$$

$$= 2^{n-1} + n\,(2^{n-1} - 1) - \left[ \frac{(n-2)\,2^n - (n-1)\,2^{n-1} + 2}{(2-1)^2} \right]$$

$$= 2^{n-1} + n\,(2^{n-1} - 1) - (n-2)2^n + (n-1)\,2^{n-1} - 2$$

$$= \underline{2^{n-1}} + \underline{n\ \ 2^{n-1}} - n \quad \underline{-(n-2)2^n} + \underline{(n-1)\,2^{n-1}} - 2$$

$$= 2^{n-1}\,(1 + n - (n-2)\,2 + n - 1) - n - 2$$

$$= 2^{n-1} \cdot 4 - n - 2$$

$$= 2 \cdot 2^n - n - 2$$

Sabemos que

$$T(n) = 2 \cdot 2^n - n - 2$$

É fácil mostrar que $2 2^n - n - 2$ é $O(2^n)$ e $\Omega(2^n)$.

Assim, vale que $T(n) = \Theta(2^n)$.

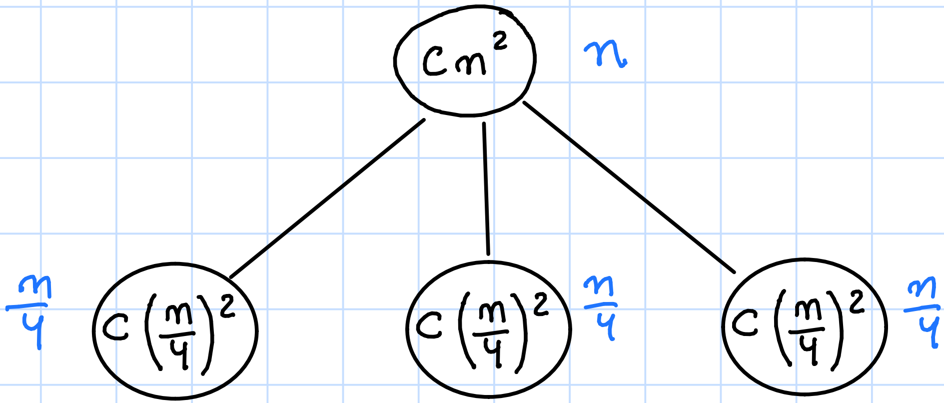
# Método da árvore de Recorrência

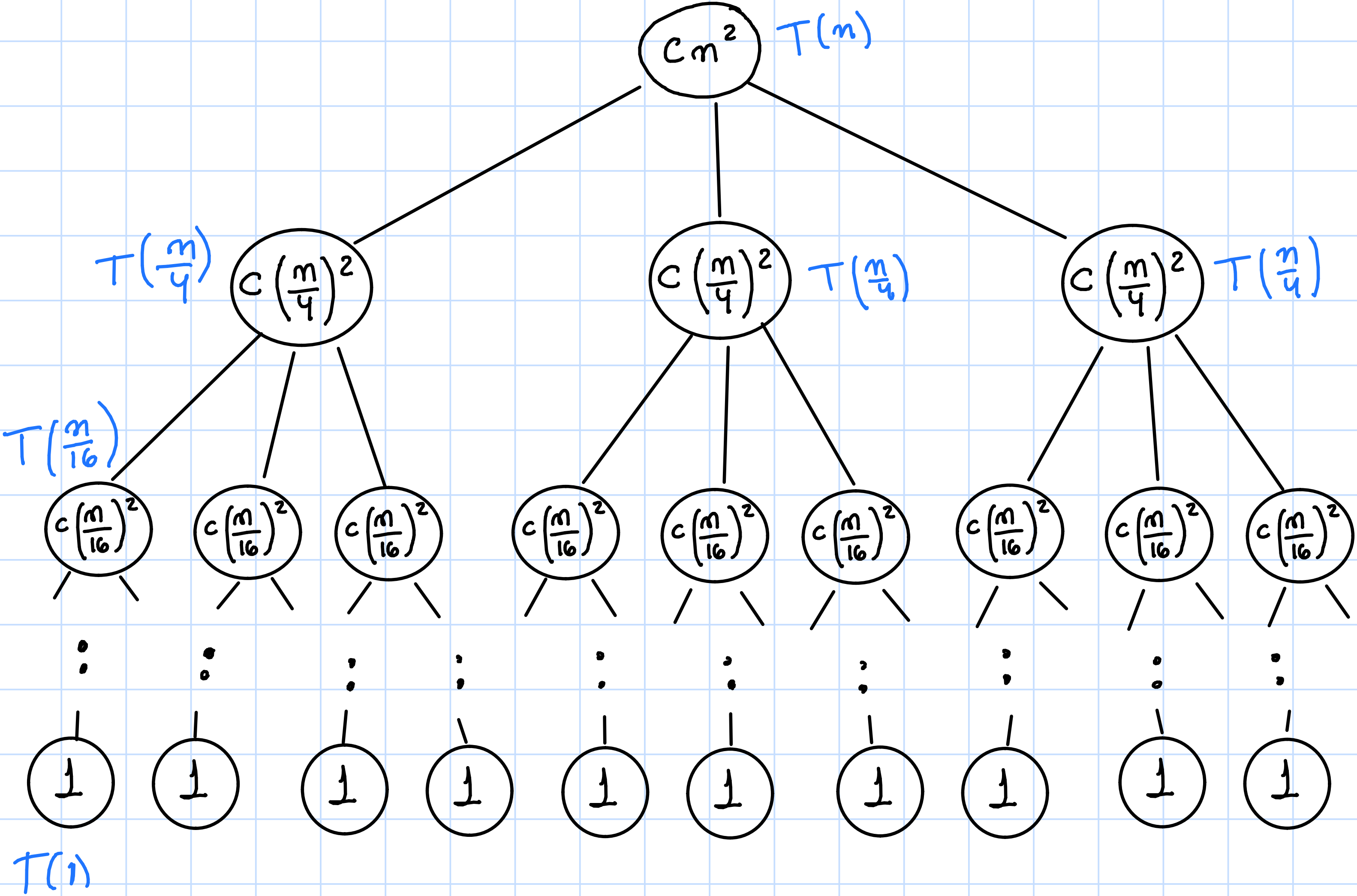
# Árvore de Recorrência

→ Consiste em analisar a árvore de recorrência
  → Cada nó representa um subproblema/chamada recursiva
  → Um nó é rotulado internamente com o tempo gasto naquela chamada (desconsiderando os tempos das chamadas recursivas).
  → Um nó é rotulado externamente com o tamanho do subproblema dele
  → Os filhos de um nó são as chamadas recursivas

Encontre uma fórmula fechada para

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + cn^2$, onde c é uma constante

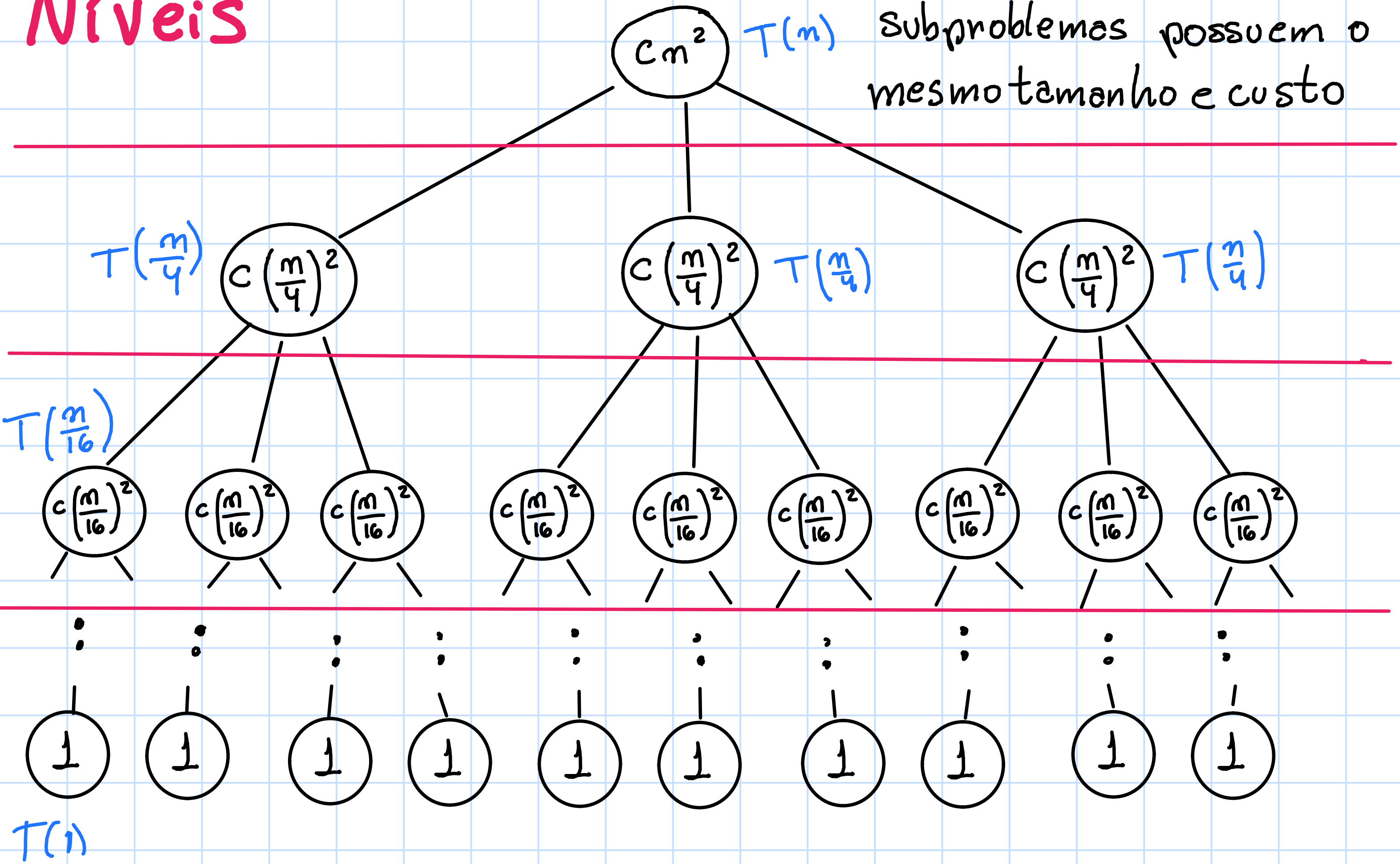




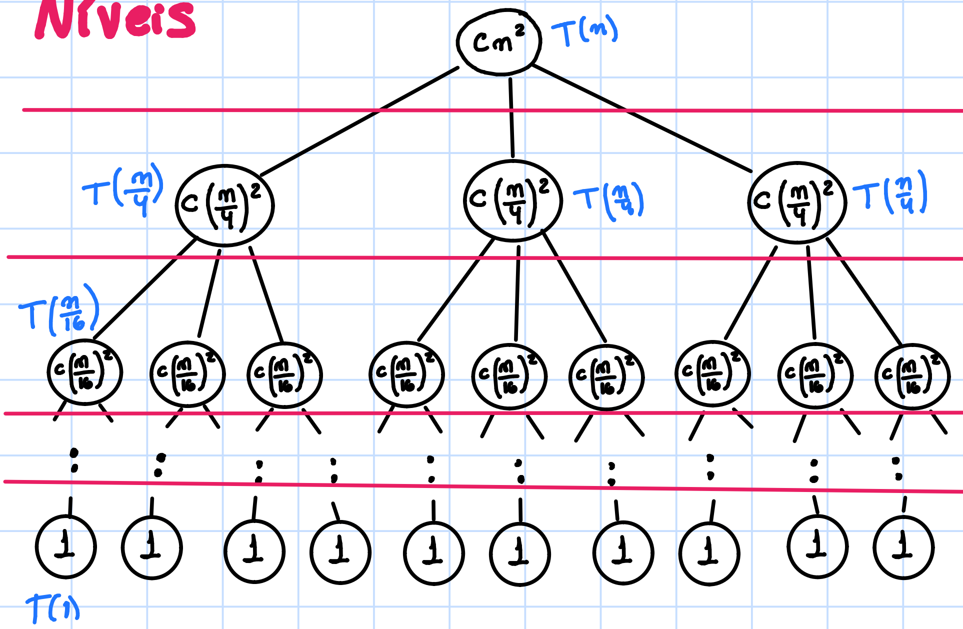
$cn^2$
$T(n)$
$c\left(\frac{n}{4}\right)^2$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$c\left(\frac{n}{16}\right)^2$
$T\left(\frac{n}{16}\right)$
1
$T(1)$

# Níveis

Dentro de cada nível os subproblemas possuem o mesmo tamanho e custo



# Níveis

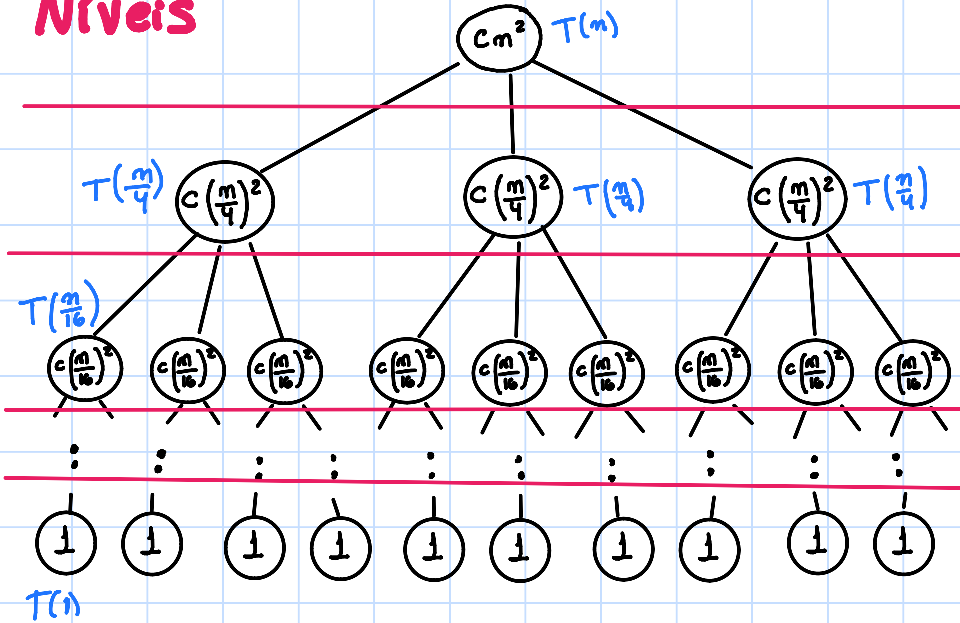



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

+1 coluna: →

"custo total do nível"

# Níveis

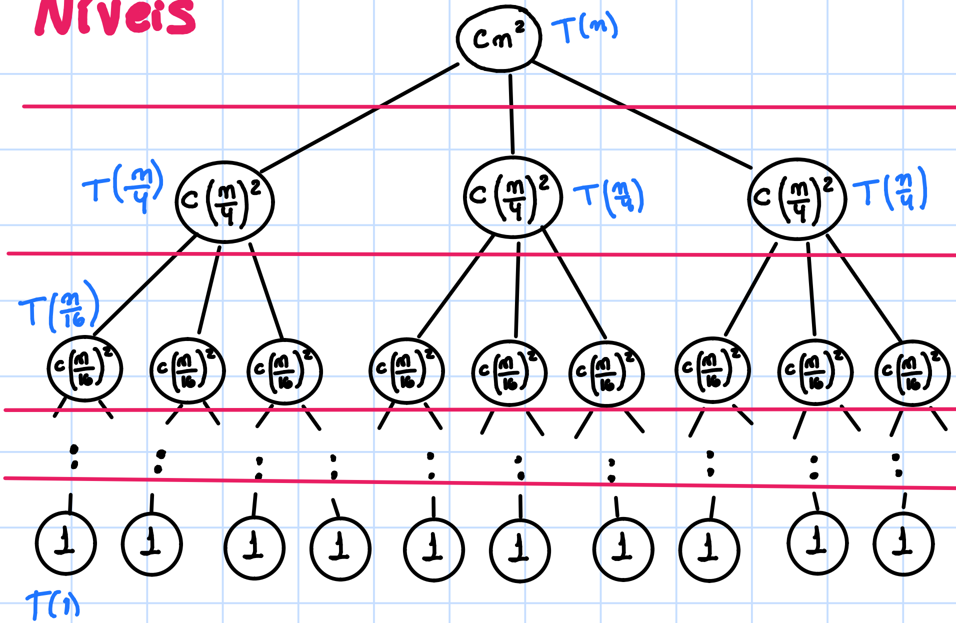



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| i | | | |
| | | | |

+1 coluna: →

"custo total do nível"

# Níveis

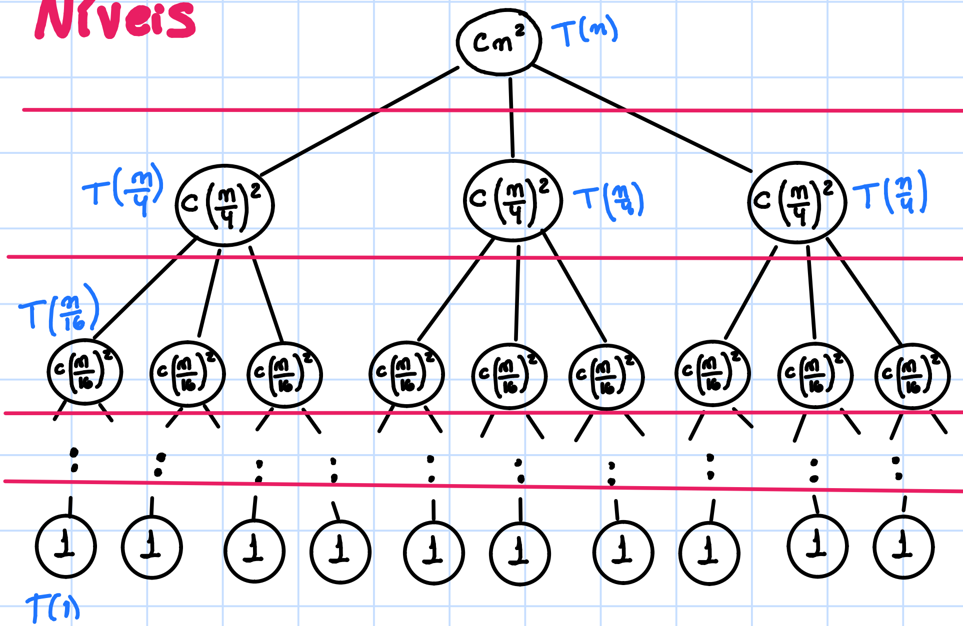



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | |
| 1 | 3 | | |
| 2 | 9 | | |
| $i$ | | | |
| | | | |

+1 coluna: →

"custo total do nível"

# Níveis

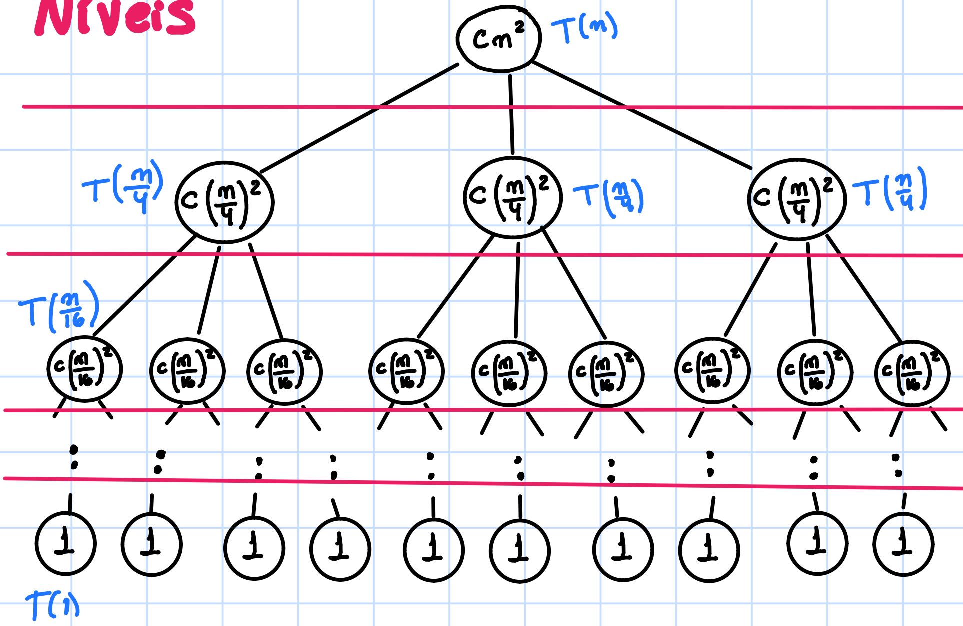



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 $3^0$ | | |
| 1 | 3 $3^1$ | | |
| 2 | 9 $3^2$ | | |
| $i$ | | | |
| | | | |

+1 coluna: →

"custo total do nível"

# Níveis

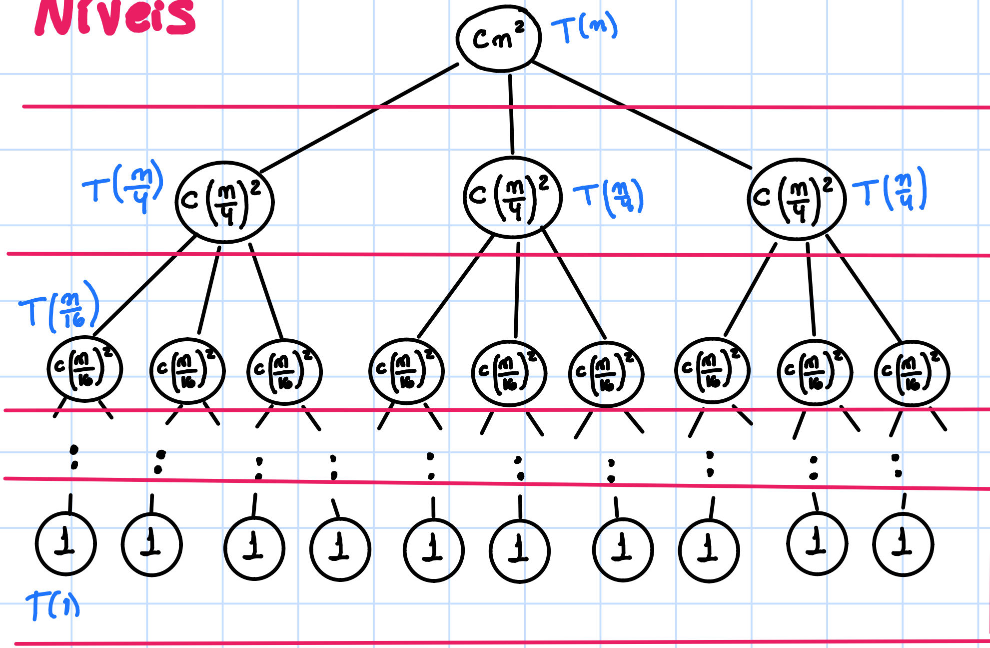



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 $3^0$ | | |
| 1 | 3 $3^1$ | | |
| 2 | 9 $3^2$ | | |
| $i$ | $3^i$ | | |
| | | | |

+1 coluna: →

"custo total do nível"

# Níveis

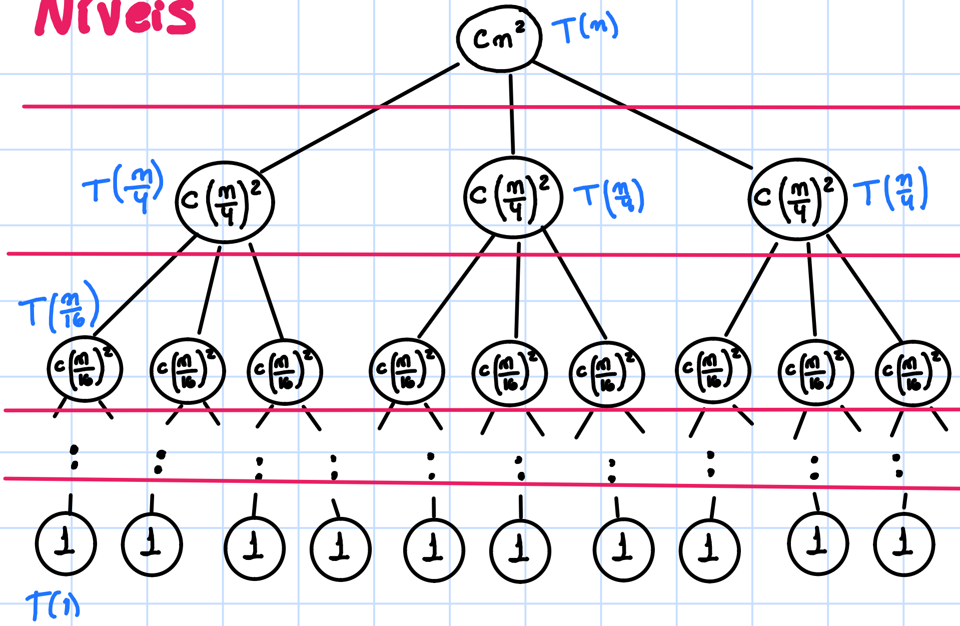



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | $n$ | |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | |
| $i$ | $3^i$ | | |
| | | | |

+1 coluna: $\rightarrow$

"custo total do nível"

# Níveis

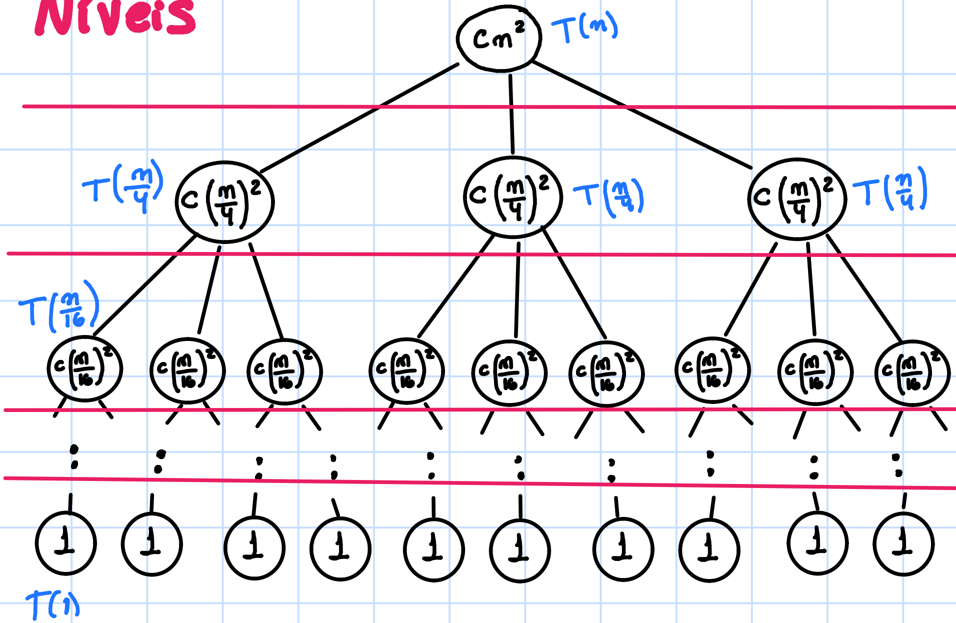



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n \quad \frac{n}{4^0}$ | |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4} \quad \frac{n}{4^1}$ | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16} \quad \frac{n}{4^2}$ | |
| $i$ | $3^i$ | | |
| | | | |

+1 coluna: →

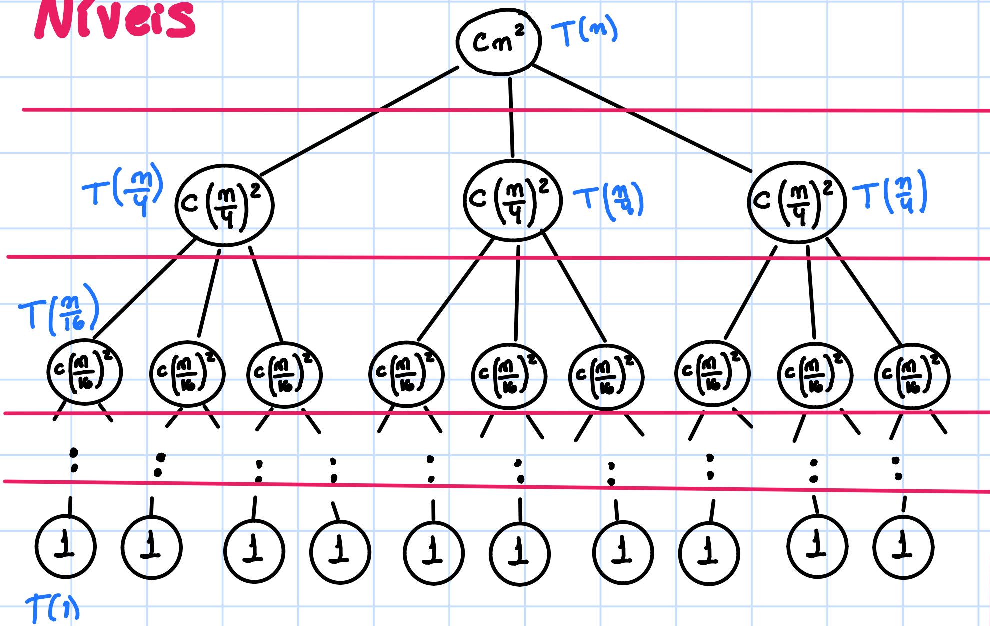
"custo total do nível"

# Níveis



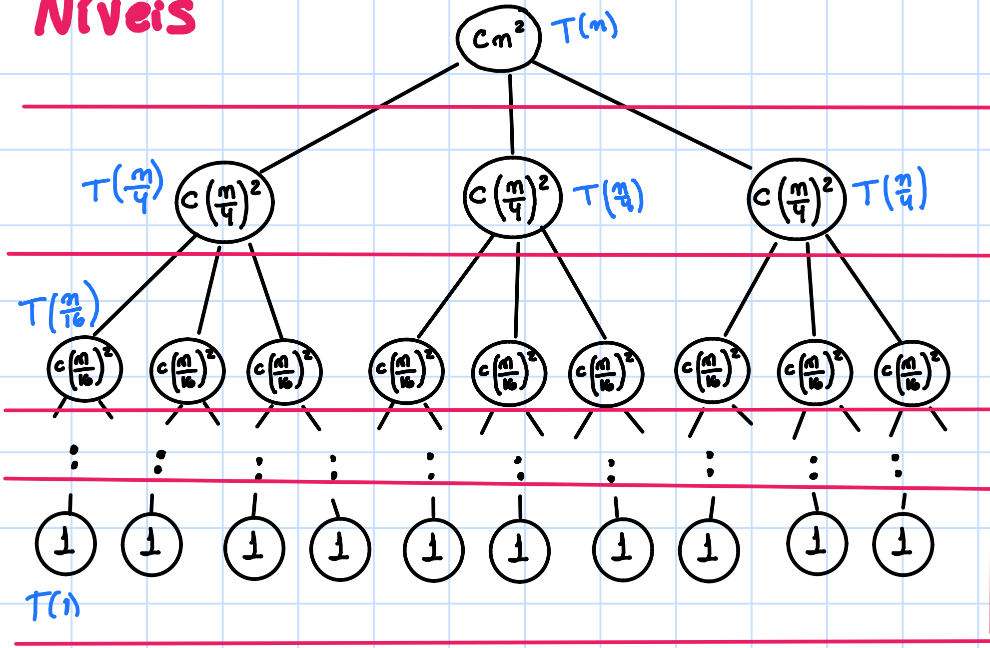

| Nível | # Nós | TAM Sub. | Custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | |
| | | | |

# Níveis




| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | |
| | | 1 | |

# Níveis

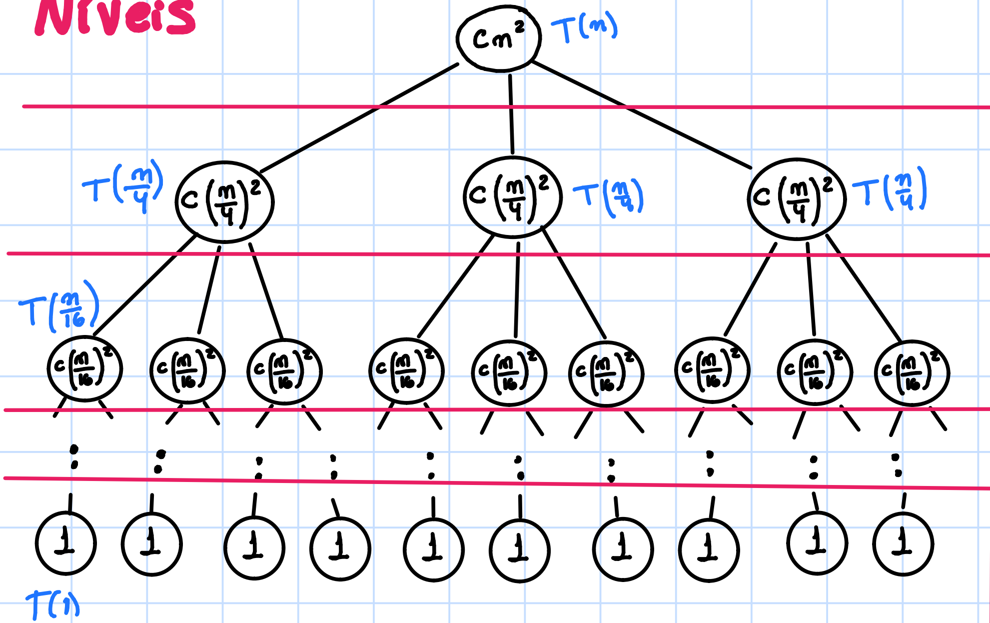



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | |
| | | 1 | |

$$\frac{n}{4^i} = 1 \iff n = 4^i \iff \log_4 n = \log_4 4^i$$

$$\iff \log_4 n = i \cdot \log_4 4 \iff \log_4 n = i$$

# Níveis

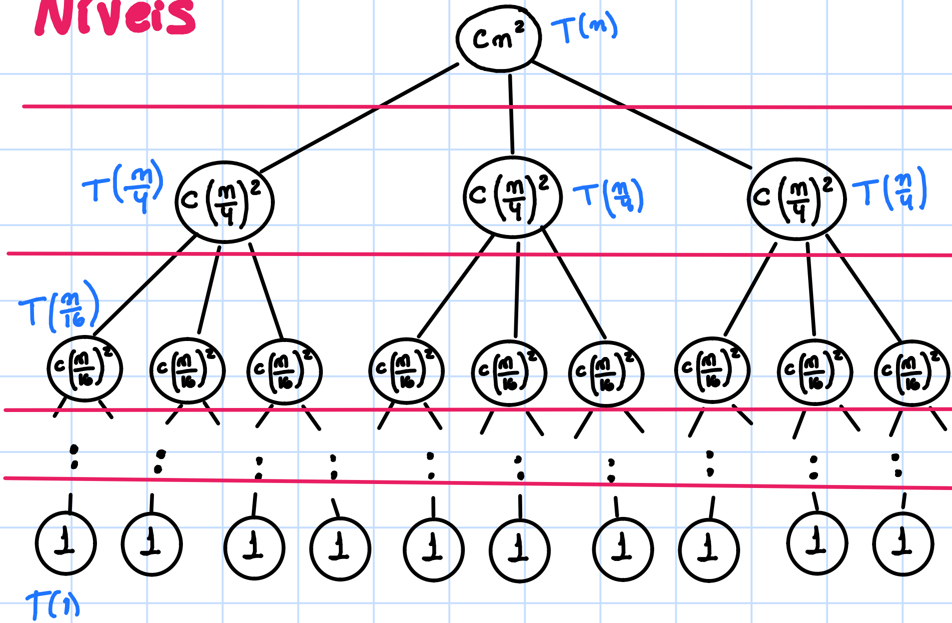



| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | |
| $\log_4 n$ | | 1 | |

$$\frac{n}{4^i} = 1 \iff n = 4^i \iff \log_4 n = \log_4 4^i$$

$$\iff \log_4 n = i \cdot \log_4 4 \iff \log_4 n = i$$

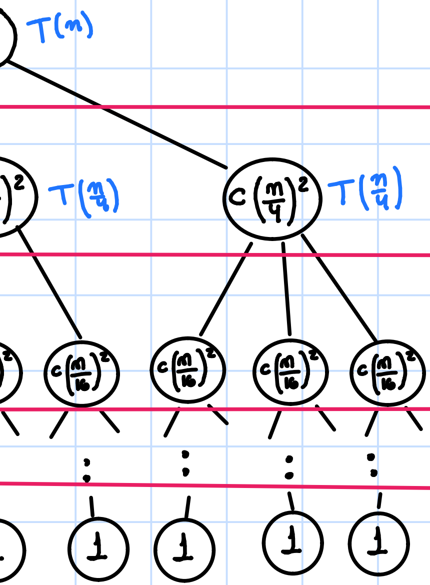
# Níveis



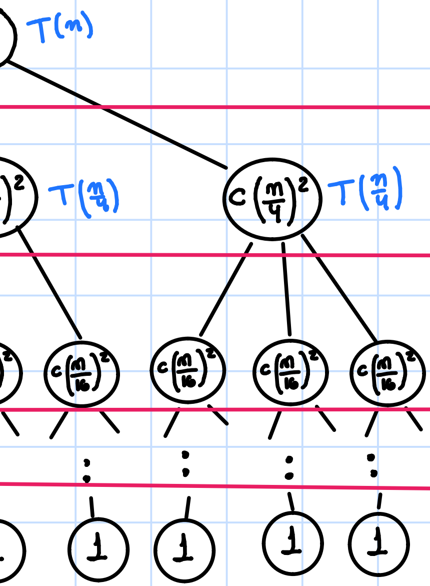

| Nível | # Nós | TAM sub. | custo nó |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | $c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ |
| $\log_4 n$ | | 1 | |

$$\frac{n}{4^i} = 1 \iff n = 4^i \iff \log_4 n = \log_4 4^i$$

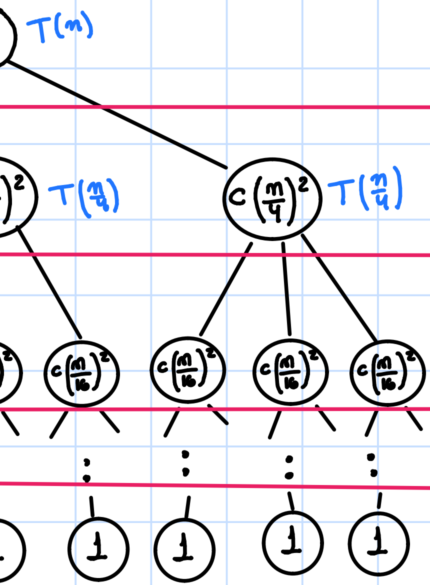
$$\iff \log_4 n = i \cdot \log_4 4 \iff \log_4 n = i$$




| Nível | # Nós | Tam Sub. | Custo nó | Custo total do Nível |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | | # Nós x custo por nó |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | $c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ | $3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ |
| $\log_4 n$ | | 1 | | |



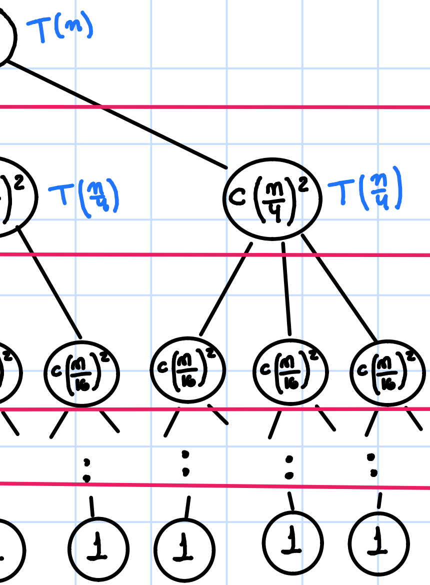

| Nível | # Nós | TAM Sub. | Custo nó | Custo total do Nível |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | | #nós x custo por nó |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | $c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ | $3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ |
| $\log_4 n$ | | 1 | 1 | |



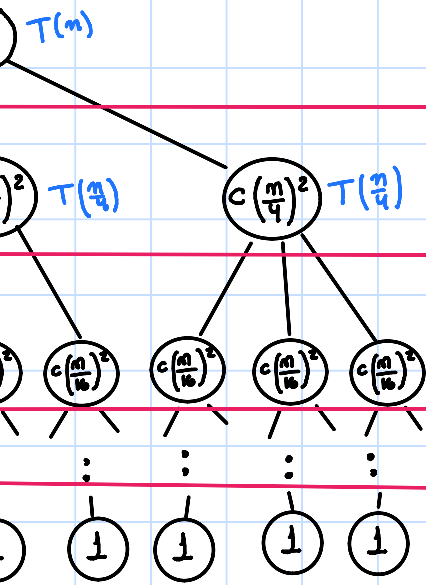

| Nível | # Nós | Tam Sub. | Custo nó | Custo total do Nível |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | | #Nós x custo por nó |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | $c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ | $3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ |
| $\log_4 n$ | | 1 | 1 | |

Na maioria dos caso são iguais*

* mas não nesse caso :)

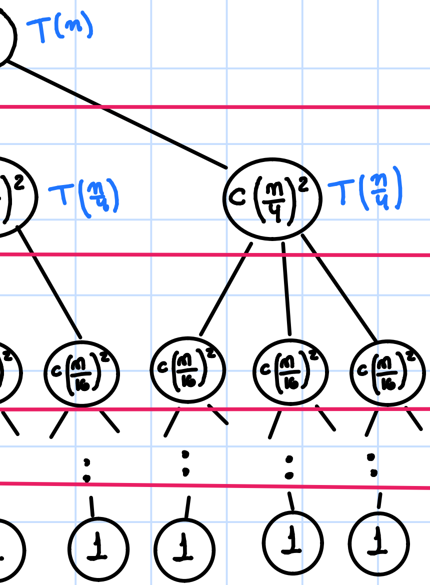



| Nível | # Nós | Tam Sub. | Custo nó | Custo total do Nível |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | | #Nós x custo por nó |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | $c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ | $3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ |
| $\log_4 n$ | $3^{\log_4 n}$ | 1 | 1 | |




| Nível | # Nós | TAM Sub. | Custo nó | Custo total do Nível |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | | #Nós x custo por nó |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | $c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ | $3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ |
| $\log_4 n$ | $3^{\log_4 n}$ | 1 | 1 | |

$T(n) = \sum$ do custo de todos os níveis internos $+ \sum$ do custo das Folhas




| Nível | # Nós | Tam Sub. | Custo nó | Custo total do Nível |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $n$ | | #Nós x custo por nó |
| 1 | 3 | $\frac{n}{4}$ | | |
| 2 | 9 | $\frac{n}{16}$ | | |
| $i$ | $3^i$ | $\frac{n}{4^i}$ | $c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ | $3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2$ |
| $\log_4 n$ | $3^{\log_4 n}$ | 1 | 1 | |

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} 3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 + 3^{\log_4 n} \cdot 1$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} 3^i \cdot c\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 + 3^{\log_4 n} \cdot 1$$

$$= c\sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} 3^i \cdot \frac{n^2}{(4^i)^2} + 3^{\log_4 n}$$

$$= c\, n^2 \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4^2}\right)^i + 3^{\log_4 n}$$

$$= c n^2 \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i + n^{\log_4 3}$$

$$= cn^2 \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i + n^{\log_4 3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}$$

$$= cn^2 \left[ \frac{\left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n} - 1}{\frac{3}{16} - 1} \right] + n^{\log_4 3}$$

$$\frac{3}{16} - 1$$

$$\frac{3}{16} - \frac{16}{16}$$

$$= cn^2 \left[ \left( n^{\log_4 \left(\frac{3}{16}\right)} - 1 \right) \cdot \frac{-16}{13} \right] + n^{\log_4 3}$$

$$-\frac{13}{16}$$

$$= \frac{-16 . cn^2}{13} \left( n^{\log_4 3 - \log_4 16} - 1 \right) + n^{\log_4 3}$$

$$= \frac{-16}{13} \cdot c\, n^2 \left( n^{\log_4 3 - \log_4 16} - 1 \right) + n^{\log_4 3}$$

$$= \frac{-16}{13} \cdot c\, n^2 \left( n^{\log_4 3 - 2} - 1 \right) + n^{\log_4 3}$$

$$= \frac{-16}{13} c\, n^{\log_4 3} + \frac{16}{13} c n^2 + n^{\log_4 3}$$

$$= \frac{16}{13} \cdot c n^2 + \left( -\frac{16}{13} c + 1 \right) n^{\log_4 3}$$

$\log_4 3 \simeq 0.79$

$$= \Theta(n^2)$$

Teorema

Mestre

# Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ uma função. Para

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

Vale que

- Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$
- Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$ e para n suficientemente grande temos

  $a f(n/b) \leq c f(n)$ para alguma constante $c < 1$,

  então $T(n) = \Theta(f(n))$.

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$a = 2$ , $b = 2$ , $f(n) = n$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$$

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$$

$$= \Theta(n \lg n)$$

Caso 2 do método Mestre

$$T(n) = 4T(n/10) + 5\sqrt{n}$$

$a = 4$

$b = 10$ $\qquad n^{\log_{10} 4} \simeq 0.6$

$f(n) = 5\sqrt{n}$

$$f(n) = 5n^{0.5} = O(n^{0.6-0.1}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{0.6})$$

Caso 1 do Método Mestre

$$T(n) = 4\,T(n/2) + 10\,n^3$$

$a = 4$

$b = 2$

$f(n) = 10\,n^3$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$$

$$f(n) = 10\,n^3 = \Omega\,(n^{2+1})$$

$$4 \cdot 10 \left(\frac{n}{2}\right)^3 \overset{?}{\leq} c\,10\,n^3$$ para $n \geq n_0$ e $c < 1$

$$4 \cdot 10 \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{40}{8}\,n^3 = 5\,n^3 = \frac{1}{2} \cdot 10\,n^3 = \frac{1}{2}\,f(n)$$

Portanto $T(n) = \Theta\,(f(n)) = \Theta\,(n^3)$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

$a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n \log n$

$$n^{\log_b a} = n^1$$

$$f(n) \neq O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{1-\varepsilon})$$

$$f(n) \neq \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = O(n^{1+\varepsilon})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

$$a = 2 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad f(n) = n \log n$$

$$n^{\log_b a} = n^1$$

$$f(n) \neq O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right) = O\left(n^{1-\varepsilon}\right)$$

$$f(n) \neq \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right) = O\left(n^{1+\varepsilon}\right)$$

Não da para usar o mestre

Exemplos para os quais o teorema

Mestre não se aplica

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(n) = T(n-1) + \lg n$$

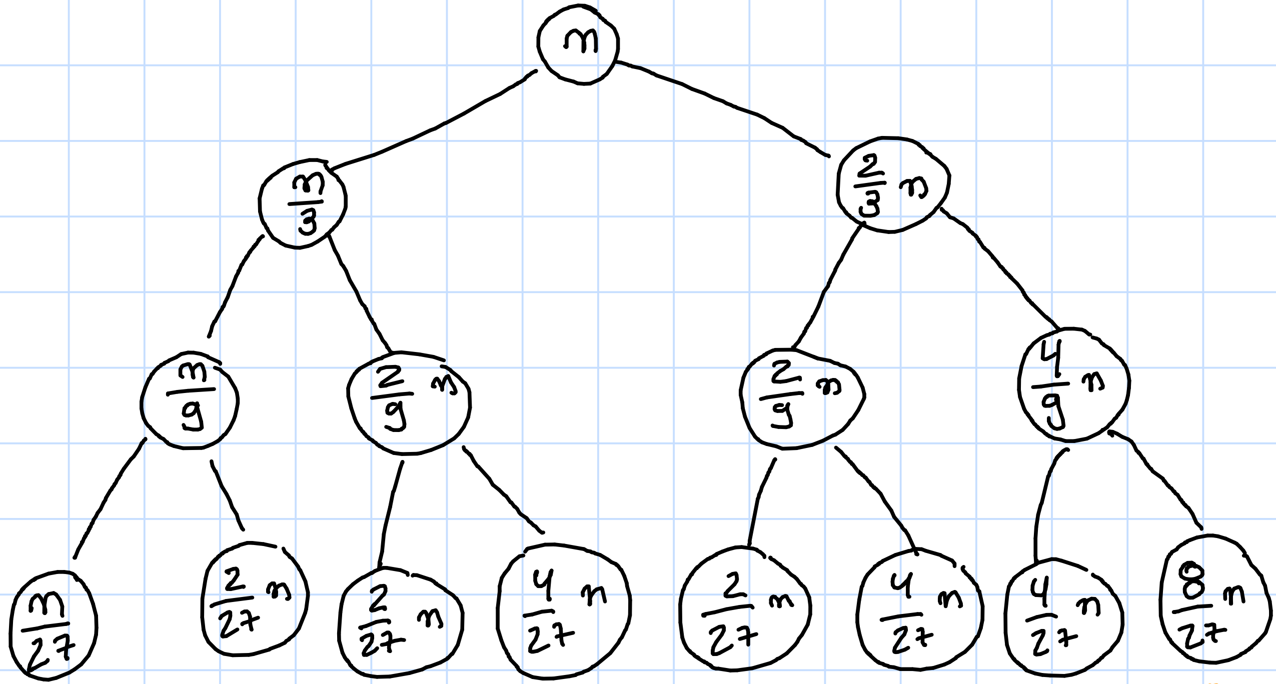
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg n$$

# Outro Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

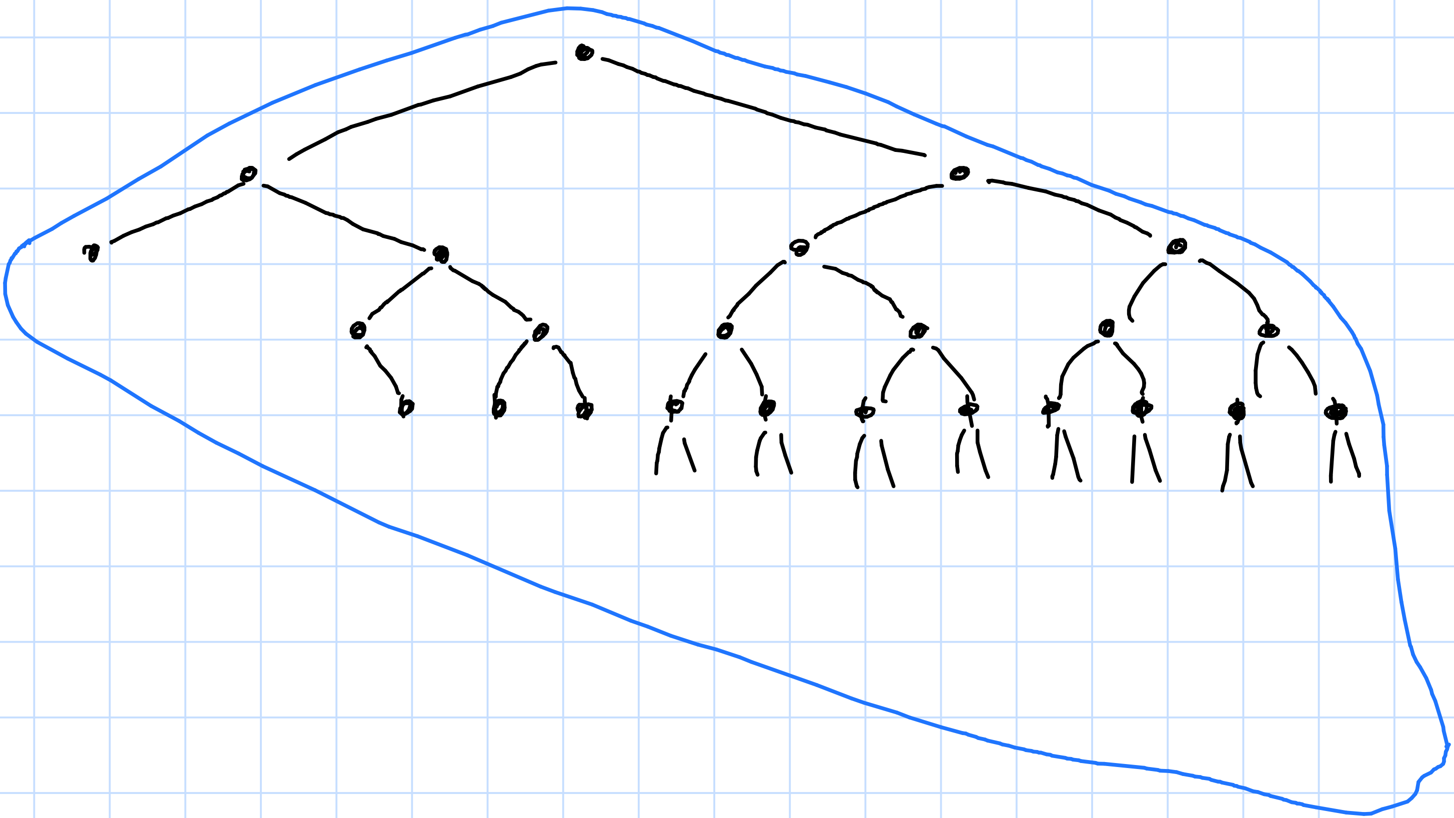
- Vemos ter que unir forças:
  - Árvore
  - Método Mestre
  - substituição / iteração

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

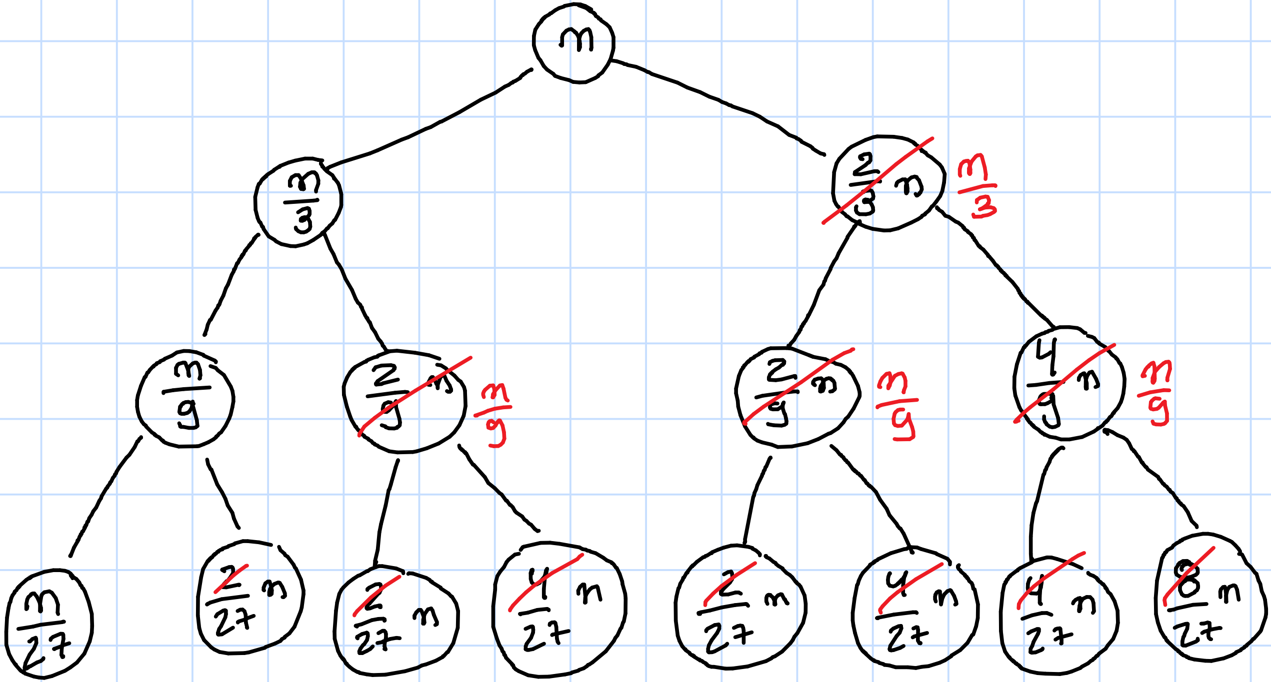



decrescendo + rápido

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$



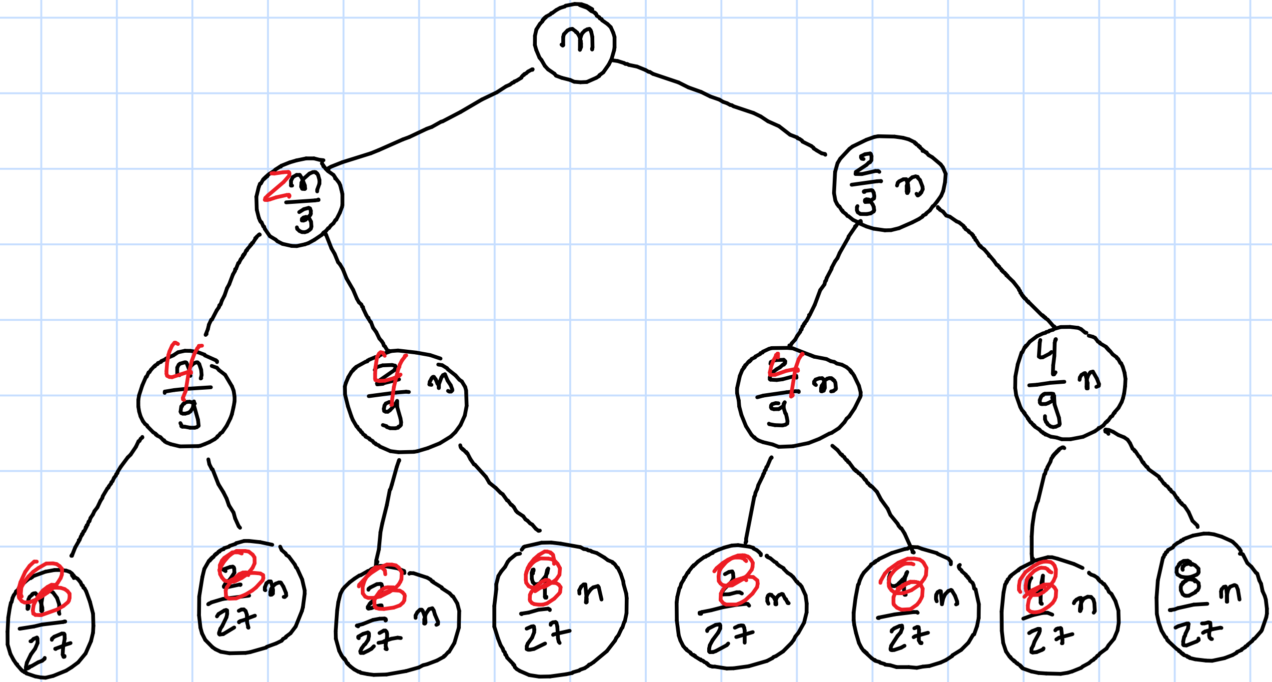
$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$




$$T'(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$T'(n) \leq T(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

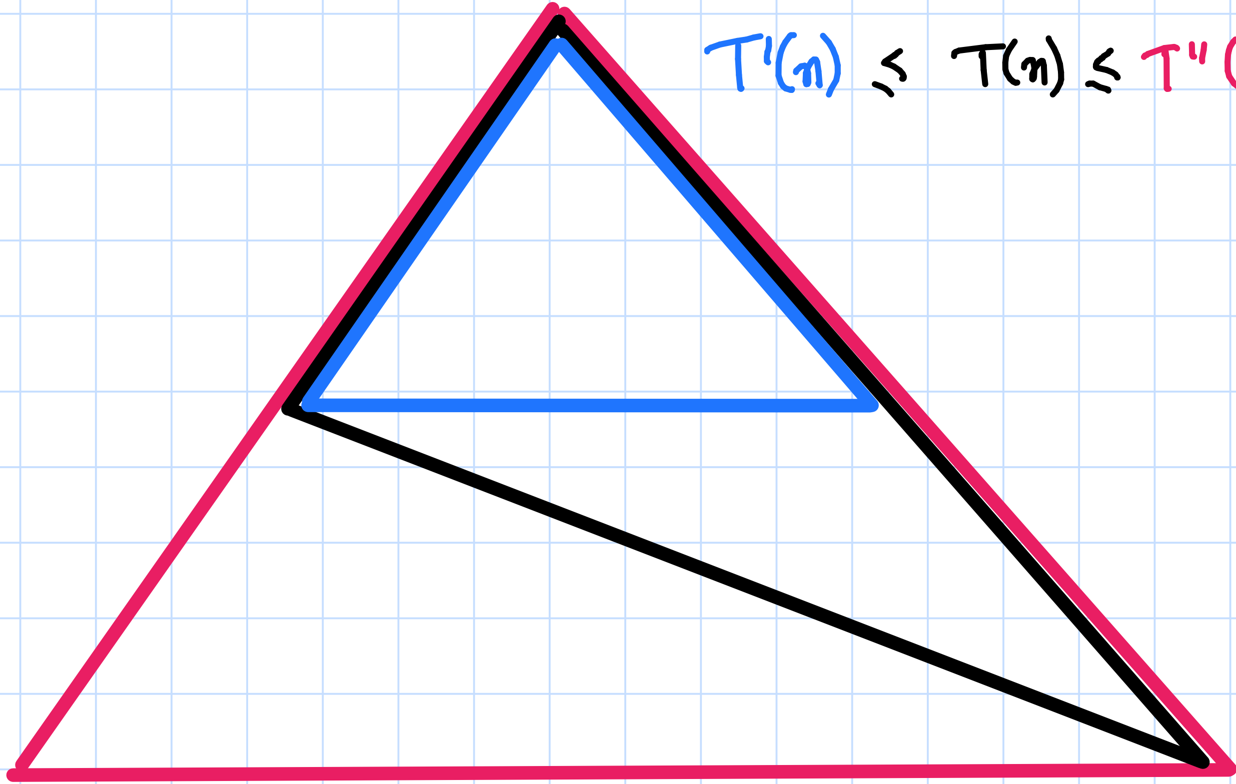



$$T''(n) = 2T\left(\tfrac{2}{3}n\right) + n$$

$$T(n) \le T''(n)$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

$$T'(n) \lesssim T(n) \lesssim T''(n)$$



$$T'(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$a = 2,\ b = 3,\quad f(n) = n \qquad n^{\log_b a} = n^{\log_3 2} = n^{0.63}$

$$f(n) = \Omega\left(n^{0.63+\varepsilon}\right)$$

$$2\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot n$$

$\frac{2}{3} n \leq c\ n \Rightarrow$ Funciona $c = 2/3 < 1$

Logo $\Rightarrow T'(n) = \Theta(n)$

$$T''(n) = 2T\left(\frac{2}{3}n\right) + n$$

$a = 2$, $b = 3/2$ e $f(n) = n$ $\qquad n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 2} = n^{1.7}$

$$f(n) = n = O\left(n^{1.7 - \varepsilon}\right) \Rightarrow T''(n) = \Theta\left(n^{1.7}\right)$$

$T'(n) = \Theta(n)$ $\qquad$ $T''(n) = \Theta(n^{1.7})$

$$\Theta(n) = T'(n) \leq T(n) \leq T''(n) = \Theta(n^{1.7})$$

Agora usamos o método da substituição para provar que

$$T(n) = \begin{cases} 1 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \end{cases}$$

é $O(\quad)$ ?

Aposentados

# Merge-Sort

- Após a nossa análise, concluímos que o tempo de execução do Merge-Sort é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + \Theta(n) \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, essa recorrência é

$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$

Logo, o MergeSort é $\Theta(n \lg n)$.

## Passo

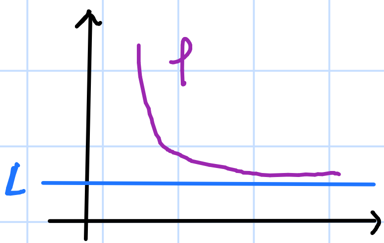
$$T(n) = T(n-1) + 3n$$
$$\geq c(n-1)^2 + 3n \qquad \triangleright \text{ Por H.I.}$$
$$= c(n^2 - 2n + 1) + 3n$$
$$= cn^2 - 2cn + c + 3n \quad (*)$$
$$\geq cn^2$$

Para $*$ valer, precisamos que

$$-2cn + c + 3n \geq 0 \iff 3n \geq 2cn - c \iff 3n \geq c(2n-1)$$
$$\iff \boxed{\frac{3n}{2n-1}} \geq c$$

| $n$ | $\boxed{h}$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| $\vdots$ | |
| 10 | 1.5... |

$h$ é decrescente




$$\frac{d}{dn}\left(\frac{3n}{2n-1}\right) = \frac{(2n-1)3 - 3n(2)}{(2n-1)^2}$$
$$= \frac{\cancel{6n} - 3 - \cancel{6n}}{(2n-1)^2}$$
$$= \frac{-3}{(2n-1)^2}$$

Sempre Negativo

## Passo

$$T(n) = T(n-1) + 3n \qquad n-1 \geq 1 \iff n \geq 2$$

$$\geq c(n-1)^2 + 3n \qquad \triangleright \text{ Por H.I.}$$

$$= c(n^2 - 2n + 1) + 3n$$

$$= cn^2 - 2cn + c + 3n \quad *$$

$$\geq cn^2$$

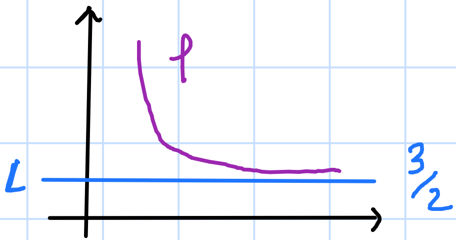
Para * valer, precisamos que

$$-2cn + c + 3n \geq 0 \iff 3n \geq 2cn - c \iff 3n \geq c(2n-1)$$

$$\iff \boxed{\frac{3n}{2n-1}} \geq c$$

| $n$ | $h$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| $\vdots$ | |
| 10 | 1.5... |

h é decrescente




$$\lim_{n\to\infty} h(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n-1} \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Passo funciona $0 < c \leq 3/2$ e $n \geq 2$