Autor: Maycon Sambinelli
Versão: 2024-07-09

1 Produtos Notáveis

Sejam a e b números reais.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2 Potenciação/Exponenciação

Se a é um número real e n e um inteiro positivo, então a **n-ésima potência** de a é

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

o número a é chamado de **base** e o n de **expoente**.

$$a^0 := 1 \text{ se } a \neq 0$$
$$0^0 \text{ é indefinido}$$
$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

A **função exponencial de base** a é definida para todo número real x como sendo

$$f(x) := a^x,$$

onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Regras

Sejam a, b, m e n números reais

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$
$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

3 Raiz

Se n é um inteiro positivo, então a **n-ésima raiz** de a é definida como

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

(ou seja, $(\sqrt[n]{a})^n = a$). Se n é par, então $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Definimos

$$\sqrt{n} := \sqrt[2]{n}$$

Regras

alerta: *para cada uma das regras a seguir, assumimos que as raizes envolvidas existem.*

Sejam a e b números reais e n e m números inteiro positivos.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$
$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ se } n \text{ é ímpar}$$
$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ se } n \text{ é par}$$

Expoentes Racionais

Seja a um número real e n um inteiro positivo, então

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}.$$

De forma geral, definimos um expoente racional m/n, onde m e n são inteiros, $n > 0$ e a é um número real, como

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

onde $a \geq 0$ se n é par.

4 Logaritmos

Seja a um número real positivo com $a \neq 1$. A **função logarítmica com base** a, denotada por $\log_a$, é definida por

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x.$$

Portanto, $\log_a(x)$ é o expoente ao qual a base a deve ser elevada para dar o valor x, ou seja,

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Definimos os seguintes apelidos para algumas bases especiais.

$$\log x := \log_{10} x.$$
$$\ln x := \log_e x.$$
$$\lg x := \log_2 x.$$

Propriedades

Sejam a, b números reais positivos, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Sejam A, B, C números reais com $A > 0$ e $B > 0$.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a(A \cdot B) = \log_a(A) + \log_a(B)$$
$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$$
$$\log_a\left(A^C\right) = C\log_a(A)$$
$$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$$
$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$
$$A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$$

5 Limite

Propriedades Básicas

alerta: *cada uma das regras a seguir só pode ser usada se todos os limites envolvidos existirem (forem diferentes de $+\infty$ ou $-\infty$).*

Sejam $a, c, m \in \mathbb{R}$ constantes, $n \in \mathbb{N}$, $\square \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$, $\diamond \in \{, +, -\}$ (note que $\diamond$ pode ser trocado por "nada") e $\pm \in \{+, -\}$.

$$\lim_{x \to a^\diamond} (mx + c) = ma + c$$
$$\lim_{x \to a^\diamond} x = a$$
$$\lim_{x \to \square} c = c$$
$$\lim_{x \to \square} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to \square} f(x) \pm \lim_{x \to \square} g(x)$$
$$\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$
$$\lim_{x \to \square} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to \square} f(x) \cdot \lim_{x \to \square} g(x)$$
$$\lim_{x \to \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to \square} f(x)}{\lim_{x \to \square} g(x)},$$
$$\text{se } \lim_{x \to \square} g(x) \neq 0$$
$$\lim_{x \to \square} [f(x)]^n = [\lim_{x \to \square} f(x)]^n$$
$$\lim_{x \to \square} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to \square} f(x)}, \text{ se } n$$

é par, assumimos que $\lim_{x \to \square} f(x) > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = \infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } r \text{ é ímpar} \\ +\infty, & \text{se } r \text{ é par} \end{cases}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Teoremas

Thm. *Se $\lim_{x \to \square} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to \square} g(x) = d$, onde $d \neq 0$ é uma constante, então*

(i) $c > 0$ e $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$, então $\lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

(ii) $c > 0$ e $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$, então $\lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iii) $c < 0$ e $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$, então $\lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iv) $c < 0$ e $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$, então $\lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

Thm (L'Hôpital). *Se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \ldots,$ ou $\frac{+\infty}{+\infty}$, então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx}(f(x))}{\frac{d}{dx}(g(x))}.$$

Se o limite da direita existe ou se é igual a ∞ ou $-\infty$. □

Thm. *Se f é uma função polinomial ou uma função racional e a está no domínio de f, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \qquad \square$$

Thm. *Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está perto de a (exceto possivelmente em a) e o limite de f e g existem quando x se aproxima de a, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x). \qquad \square$$

Thm (Sanduíche). *Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L. \qquad \square$$

6 Derivada

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$
$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(a^{f(x)}\right) = a^{f(x)}(\ln a) f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[\log_a f(x)] = \frac{1}{(\ln a) f(x)} f'(x)$$

Uma função f é **derivável em** a se $f'(a)$ existe.

Regra da Cadeia. Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f(g(x))$ é derivável em x e $F' = f'(g(x))g'(x)$.

7 Equação Quadrática

$$ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

se $a > 0$, então a parábola tem formato de $\cup$ e se $a < 0$, então o formato é $\cap$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$(x+i)(x+j) = x^2 + (j+i)x + ij$$
$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

8 Notação Assintótica

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções reais.

$f(n) = O(g(n)) \iff$ existe um $n_0 \in \mathbb{R}$ e uma constante $c > 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$.

$f(n) = \Omega(g(n)) \iff$ existe um $n_0 \in \mathbb{R}$ e uma constante $c > 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$.

$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = \Omega(g(n))$ e $f = O(g(n))$.

As seguintes afirmações são verdadeiras

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0, \infty \Rightarrow f = \Theta(g)$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty \Rightarrow f = O(g)$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \Rightarrow f = \Omega(g)$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow f = o(g)$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Leftrightarrow f = \omega(g)$$

Para todo $\alpha, k > 0$ pertencente aos reais, temos que:

$$(\ln n)^k = o(n^\alpha)$$

$$n^k = o((1+\alpha)^n)$$

Mestre Simplificado

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$ e $k \geq 0$ constante e seja $f(n)$ um polinômio de grau k cujo coeficiente do monômio de maior grau é positivo. Para $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, vale que

(i) Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;

(ii) Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$;

(iii) Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$ constantes e $f(n)$ uma função. Para $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, vale que

(i) Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;

(ii) Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$;

(iii) Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e, para n suficientemente grande, temos que $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

9 Somatório

Dada uma sequência de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onde n é um inteiro não negativo, definimos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \coloneqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Fórmulas

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1).$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Para toda constante real $c \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1} = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}.$$

Para toda constante real $c \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} ic^i = \frac{nc^{n+2} - (n+1)c^{n+1} + c}{(c-1)^2}.$$

10 Funções Chão e Teto

Para todo inteiro positivo n, vale que

$$n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Para todo inteiro positivo n e números reais arbitrários m e x, vale que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/m \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{mn} \right\rfloor$$

$$\left\lceil \frac{\lceil x/m \rceil}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{mn} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+(n-1)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-1}{n} \right\rfloor + 1$$

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lceil \frac{x-(n-1)}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{x+1}{n} \right\rceil - 1$$

11 Combinatória

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$e^x \geq 1 + x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

Desigualdade de Bernoulli

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$, vale que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Fórmula de Stirling

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\alpha_k} \sqrt{2\pi k},$$

onde $\frac{1}{12k+1} \leq \alpha_k \leq \frac{1}{12k}$.

Desigualdade de Jansen

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e X uma variável aleatória finita tomando valores reais. Então.

$$\mathbb{E}[f(x)] \geq f(\mathbb{E}[X])$$

Cor. *Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

□