COMBINATÓRIA EXTREMAL
LISTA 4: MÉTODO PROBABILÍSTICO

(1) Prove que $\frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1$ para todo $k \geq 3$.

(2) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas sobre o mesmo espaço de probabilidade e sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Prove que
$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

(3) Seja $(\Omega, \mathbb{P})$ um espaço probabilístico e seja X uma variável aleatória. Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Prove que

(a) Se $\mathbb{E}[X] \geq k$, então existe um elemento $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) \geq k$.

(b) Se $\mathbb{E}[X] \leq k$, então existe um elemento $\omega \in \Omega$ tal que $X(\omega) \leq k$.

(4) Dados $n, k \in \mathbb{N}$ e $0 < p < 1$, prove que se $pk \geq 2 \log n$, então
$$\frac{en}{k} e^{-p(k-1)/2} \leq \frac{5}{k}.$$

(5) Use o Teorema 5.3.11 para provar o Teorema de Turán: se um grafo G com n vértices é livre de K_r, então
$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Date: 2024/08/16, 11:03pm.