Prof. Maycon Sambinelli
versão: 21. Juni 2022

1 Produtos Notáveis

Sejam a e b números reais.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2 Potenciação/Exponenciação

Se a é um número real e n é um inteiro positivo, então a n-**ésima potência** de a é

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

o número a é chamado de **base** e o n de **expoente**.

$$a^0 := 1 \text{ se } a \neq 0$$

$$0^0 = \text{ é indefinido}$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

A **função exponêcial de base** a é definida para todo número real x como sendo

$$f(x) = a^x,$$

onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Regras da Potenciação/Exponenciação

Sejam a, b, m e n números reais

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

3 Raiz

Se n é um inteiro positivo, então a n-**ésima raiz** de a é definida como

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \quad (\text{ou seja, } (\sqrt[n]{a})^n = a).$$

Se n é par, então $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Definimos

$$\sqrt{n} := \sqrt[2]{n}$$

ALERTA: *para cada uma das regras a seguir, assumimos que as raizes envolvidas existem.*

Sejam a e b números reais e n e m números inteiro positivos.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ se } n \text{ é par}$$

Expoentes racionais

Se a um número real e n um inteiro positivo, então

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}.$$

De forma geral, definimos um expoente racional m/n, onde m e n são inteiros, $n > 0$ e a é um número real, como

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,$$

onde $a \geq 0$ se n é par.

4 Logaritmos

Seja a um número real positivo com $a \neq 1$. A **função logarítmica com base** a, denotada por $\log_a$, é definida por

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x.$$

Portanto, $\log_a(x)$ é o expoente ao qual a base a deve ser elevada para dar o valor x, ou seja,

$$a^{\log_a x} = x.$$

Definimos os seguintes apelidos para algumas bases especiais.

$$\log x := \log_{10} x.$$

$$\ln x := \log_e x.$$

$$\lg x := \log_2 x.$$

Propriedades dos Logaritmos

Sejam a, b números reais positivos, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Sejam A, B, C números reais com $A > 0$ e $B > 0$.

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(A \cdot B) = \log_a(A) + \log_a(B)$$

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$$

$$\log_a\left(A^C\right) = C \log_a(A)$$

$$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$$

5 Limite

ALERTA: *cada uma das regras a seguir só pode ser usada se todos os limites envolvidos existirem .*

Leis básicas

Sejam c uma constante e n um inteiro positivo.

OBS: *todas as equivalências a seguir continuam válidas se trocarmos $x \to a$ por $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.*

$$\lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \text{ se } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, se n é par, assumimos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } r \text{ é ímpar} \\ +\infty, & \text{se } r \text{ é par} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

L'Hôpital

Se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \dots$, ou $\frac{+\infty}{+\infty}$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{D_x(f(x))}{D_x(g(x))}.$$

se o limite da direita existe ou se é igual a ∞ ou $-\infty$.

Propriedade da Substituição Direta

Se f é uma função polinomial ou uma função racional e a está no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Limitante superior

Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está perto de a (exceto possivelmente em a) e o limite de f e g existem quando x se aproxima de a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Teorema do Sanduíche

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

6 Derivada

$$D_x(c) = 0$$

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

$$D_x(cf(x)) = c \cdot D_x(f(x))$$

$$D_x(f(x) + g(x)) = D_x(f(x)) + D_x(g(x))$$

$$D_x(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot D_x(g(x)) + g(x) \cdot D_x(f(x))$$

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \cdot D_x(f(x)) - f(x) \cdot D_x(g(x))}{[g(x)]^2}$$

$$D_x(cx^n) = cnx^{n-1}$$

$$D_x(\ln f(x)) = \frac{1}{f(x)} \cdot D_x(f(x))$$

$$D_x\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} \cdot D_x(f(x))$$

$$D_x\left(a^{f(x)}\right) = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot D_x(f(x))$$

$$D_x\left(\log_a f(x)\right) = \frac{1}{(\ln a) \cdot f(x)} \cdot D_x(f(x))$$

7 Equação Quadrática

$$ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

se $a > 0$, então a parábola tem formato de U e se $a < 0$, então o formato é $\cap$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(x+i)(x+j) = x^2 + (j+i)x + ij$$

8 Notação Assintótica

Sejam f e g funções reais.

$f = O(g) \iff$ existe um $n_0 \in \mathbb{R}$ e uma constant $c > 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$.

$f = \Omega(g) \iff$ existe um $n_0 \in \mathbb{R}$ e uma constant $c > 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$.

$f = \Theta(g) \iff f = \Omega(g)$ e $f = O(g)$.

$f = o(g) \iff$ para todo $c > 0$, existe um n_0 tal que $0 \leq f(n) < c \cdot g(n)$ para todo $n > n_0$.

$f = \omega(g) \iff$ para todo $c > 0$, existe um n_0 tal que $0 \leq c \cdot g(n) < f(n)$ para todo $n > n_0$.

$$f \sim g \iff \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Sejam f e g duas funções positivas. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0, \infty \Rightarrow f = \Theta(g)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty \Rightarrow f = O(g)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \Rightarrow f = \Omega(g)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f = o(g)$$

Sejam f e g duas funções positivas. Note que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff \lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$$

Isso implica que se $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$, então $f = o(g)$.

Para todo $\alpha, k > 0$ pertencente aos reais, temos que:

$$(\ln n)^k = o(n^\alpha)$$

$$n^k = o((1+\alpha)^n)$$

9 Somatório

Dada uma sequência de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onde n é um inteiro não negativo, definimos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Para toda constante real $c \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}.$$

Para toda constante real $c \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} ic^i = \frac{nc^{n+2}-(n+1)c^{n+1}+c}{(c-1)^2}.$$

10 Funções Chão e Teto

Para todo inteiro positivo n, vale que

$$n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Para todo inteiro positivo n e números reais arbitrários m e x, vale que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/m \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{mn} \right\rfloor$$

$$\left\lceil \frac{\lceil x/m \rceil}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{mn} \right\rceil$$

11 Combinatória

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Fórmula de Stirling

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\alpha_k}\sqrt{2\pi k},$$

onde $\frac{1}{12k+1} \leq \alpha_k \leq \frac{1}{12k}$.

12 Probabilidade

Seja $(\Omega, \mathbb{P})$ um espaço probabilístico.
A probabilidade de um evento $A \subseteq \Omega$ é

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega).$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Sejam $A \subseteq \Omega$ e $B \subseteq \Omega$ eventos.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset.$$

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = P(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq P(A) - \mathbb{P}(\overline{B}).$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ eventos.

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i).$$

Uma **variável aleatória** X é uma função $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dado um número $x \in \mathbb{R}$, é comum escrevermos $\{X = x\}$, ou simplesmente $X = x$, para denotar o evento $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x\}$. De forma semelhante definimos $\{X \leq x\}$, $\{X < x\}$ $\{X \geq x\}$ e $\{X > x\}$.
Dado um evento $A \subseteq \Omega$, I_A é uma **variável aleatória indicadora do evento** A se, para todo $\omega \in \Omega$, temos que

$$I_A = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A. \end{cases}$$

A **esperança** de uma variável aleatória X, denotada por $\mathbb{E}[X]$, é definida como

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(w).$$

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e a e b dois números reais.
Linearidade da esperança:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Se X e Y são independentes, então

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X].$$

Se I_A é uma variável indicadora de um evento A, então

$$\mathbb{E}[I_A] = \mathbb{P}(A).$$

Uma variável aleatória X tem **distribuição de Bernoulli com parâmetro** p se $\mathbb{P}(X = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, onde $0 \leq p \leq 1$. Note que $\mathbb{E}[X] = p$.
Uma **variável aleatória binomial** X **com parâmetros** n **e** p, denotada por $\mathbb{B}(n,p)$, é uma variável aleatória tal que

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

onde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernuoulli com parâmetro p.

$$\mathbb{E}[\mathbb{B}(n,p)] = np.$$

Desigualdade de Markov

Se X é uma variável aleatória tal que $X \geq 0$ e $\mathbb{E}[X] < \infty$, então, para todo $\delta > 0$, vale que

$$\mathbb{E}[X \geq \delta] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\delta}.$$

Variância

A **variância** de uma variável aleatória X, denotada por $\mathrm{VAR}[X]$, é definda como

$$\mathrm{VAR}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

$$\mathrm{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante, então

$$c \cdot \mathrm{VAR}[X] = c^2 \cdot \mathrm{VAR}[X].$$

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então $\mathrm{VAR}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathrm{VAR}[X_1] + \mathrm{VAR}[X_2] + \cdots + \mathrm{VAR}[X_n]$.

Desigualdade de Chebyshev

Se X é uma variável aleatória e $\delta > 0$, então

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \delta) \leq \frac{\mathrm{VAR}[X]}{\delta^2}$$

Desigualdade de Chernoff

Se $\epsilon \in (0,1]$ e X é uma variável aleatória binomial, então, para todo número real $a > 0$,

1. $\mathbb{P}X \geq \mathbb{E}[X] + a \leq e^{-a^2/2n}$
2. $\mathbb{P}X \geq \mathbb{E}[X] - a \leq e^{-a^2/2n}$.