Autor: Maycon Sambinelli
Versão: 2024-07-09

1 Produtos Notáveis

Sejam a e b números reais.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2 Potenciação/Exponenciação

Se a é um número real e n é um inteiro positivo, então a **n-ésima potência** de a é

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

o número a é chamado de **base** e o n de **expoente**.

$$a^0 := 1 \text{ se } a \neq 0$$
$$0^0 \text{ é indefinido}$$
$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

A **função exponencial de base** a é definida para todo número real x como sendo

$$f(x) := a^x,$$

onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

Regras

Sejam a, b, m e n números reais

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$
$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

3 Raiz

Se n é um inteiro positivo, então a **n-ésima raiz** de a é definida como

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

(ou seja, $(\sqrt[n]{a})^n = a$). Se n é par, então $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Definimos

$$\sqrt{n} := \sqrt[2]{n}$$

Regras

alerta: *para cada uma das regras a seguir, assumimos que as raizes envolvidas existem.*

Sejam a e b números reais e n e m números inteiro positivos.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$
$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ se } n \text{ é ímpar}$$
$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ se } n \text{ é par}$$

Expoentes Racionais

Seja a um número real e n um inteiro positivo, então

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}.$$

De forma geral, definimos um expoente racional m/n, onde m e n são inteiros, $n > 0$ e a é um número real, como

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

onde $a \geq 0$ se n é par.

4 Logaritmos

Seja a um número real positivo com $a \neq 1$. A **função logarítmica com base** a, denotada por $\log_a$, é definida por

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x.$$

Portanto, $\log_a(x)$ é o expoente ao qual a base a deve ser elevada para dar o valor x, ou seja,

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Definimos os seguintes apelidos para algumas bases especiais.

$$\log x := \log_{10} x.$$
$$\ln x := \log_e x.$$
$$\lg x := \log_2 x.$$

Propriedades

Sejam a, b números reais positivos, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Sejam A, B, C números reais com $A > 0$ e $B > 0$.

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a(A \cdot B) = \log_a(A) + \log_a(B)$$
$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$$
$$\log_a\left(A^C\right) = C\log_a(A)$$
$$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$$
$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$
$$A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$$

5 Limite

Propriedades Básicas

alerta: *cada uma das regras a seguir só pode ser usada se todos os limites envolvidos existirem (forem diferentes de $+\infty$ ou $-\infty$).*

Sejam $a, c, m \in \mathbb{R}$ constantes, $n \in \mathbb{N}$, $\square \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$, $\diamond \in \{, +, -\}$ (note que $\diamond$ pode ser trocado por "nada") e $\pm \in \{+, -\}$.

$$\lim_{x \to a^\diamond} (mx + c) = ma + c$$
$$\lim_{x \to a^\diamond} x = a$$
$$\lim_{x \to \square} c = c$$
$$\lim_{x \to \square} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to \square} f(x) \pm \lim_{x \to \square} g(x)$$
$$\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$
$$\lim_{x \to \square} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to \square} f(x) \cdot \lim_{x \to \square} g(x)$$
$$\lim_{x \to \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to \square} f(x)}{\lim_{x \to \square} g(x)}, \quad \text{se } \lim_{x \to \square} g(x) \neq 0$$
$$\lim_{x \to \square} [f(x)]^n = [\lim_{x \to \square} f(x)]^n$$
$$\lim_{x \to \square} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to \square} f(x)}, \text{ se } n$$

é par, assumimos que $\lim_{x \to \square} f(x) > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = \infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } r \text{ é ímpar} \\ +\infty, & \text{se } r \text{ é par} \end{cases}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Teoremas

Thm. *Se $\lim_{x \to \square} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to \square} g(x) = d$, onde $d \neq 0$ é uma constante, então*

(i) $c > 0$ e $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$, então $\lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

(ii) $c > 0$ e $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$, então $\lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iii) $c < 0$ e $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$, então $\lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iv) $c < 0$ e $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$, então $\lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

Thm (L'Hôpital). *Se $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \dots,$ ou $\frac{+\infty}{+\infty}$, então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx}(f(x))}{\frac{d}{dx}(g(x))}.$$

Se o limite da direita existe ou se é igual a ∞ ou $-\infty$. □

Thm. *Se f é uma função polinomial ou uma função racional e a está no domínio de f, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \quad □$$

Thm. *Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está perto de a (exceto possivelmente em a) e o limite de f e g existem quando x se aproxima de a, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x). \quad □$$

Thm (Sanduíche). *Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L. \quad □$$

6 Derivada

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$
$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(a^{f(x)}\right) = a^{f(x)}(\ln a) f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[\log_a f(x)] = \frac{1}{(\ln a) f(x)} f'(x)$$

Uma função f é **derivável em** a se $f'(a)$ existe.

Regra da Cadeia. Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f(g(x))$ é derivável em x e

$$F' = f'(g(x))g'(x).$$

7 Integrais Definidas

Se f é uma função contínua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ as extremidas desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalor $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de** f **de** a **a** b é

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

Thm. *Se f for contínua em $[a, b]$, ou f tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.* □

Thm. *Se f for integrável em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x,$$

onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\Delta x$. □

Propriedades

Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \int_a^e f(x)\,dx + \int_e^b g(x)\,dx$$

onde $a \le e \le b$

Propriedades Comparativas

$$(\forall a \le x \le b, f(x) \ge 0$$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

$$(\forall a \le x \le b, f(x) \ge g(x))$$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

$$(\forall a \le x \le b, m \le f(x) \le M)$$
$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que f seja contínua em $[a,b]$.

(i) Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$; e

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isso é, F é tal que $\frac{d}{dx}(F) = f$. □

8 Integrais Indefinidas

$$\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Propriedades

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \ne -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$$

Regra da Substituição

Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Se g' for contínua em $[a,b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Integração por Partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx$$
$$= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

9 Integrais impróprias

Se $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para cada número $t \ge a$, então

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx,$$

desde que o limite exista (como um número).

Se $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para cada número $t \le b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx,$$

desde que o limite exista (como um número).

As integrais impróprias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ são chamadas de **convergentes** se os limites correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existem.

Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

para um a qualquer.

10 Equação Quadrática

$$ax^2 + bx + c, \qquad a \ne 0$$

se $a > 0$, então a parábola tem formato de $\cup$ e se $a < 0$, então o formato é $\cap$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(x+i)(x+j) = x^2 + (j+i)x + ij$$

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

11 Notação Assintótica

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções reais.

$f(n) = O(g(n)) \iff$ existe um $n_0 \in \mathbb{R}$ e uma constante $c > 0$ tal que, para todo $n \ge n_0$, $0 \le f(n) \le c \cdot g(n)$.

$f(n) = \Omega(g(n)) \iff$ existe um $n_0 \in \mathbb{R}$ e uma constante $c > 0$ tal que, para todo $n \ge n_0$, $0 \le c \cdot g(n) \le f(n)$.

$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = \Omega(g(n))$ e $f = O(g(n))$.

As seguintes afirmações são verdadeiras

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} \ne 0, \infty \Rightarrow f = \Theta(g)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} \ne \infty \Rightarrow f = O(g)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} \ne 0 \Rightarrow f = \Omega(g)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow f = o(g)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Leftrightarrow f = \omega(g)$$

Para todo $\alpha, k > 0$ pertencente aos reais, temos que:

$$(\ln n)^k = o(n^\alpha)$$

$$n^k = o((1+\alpha)^n)$$

Mestre Simplificado

Sejam $a \ge 1$, $b > 1$ e $k \ge 0$ constante e seja $f(n)$ um polinômio de grau k cujo coeficiente do monômio de maior grau é positivo. Para $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, vale que

(i) Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;

(ii) Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$;

(iii)Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

Mestre

Sejam $a \ge 1$, $b > 1$ constantes e $f(n)$ uma função. Para $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, vale que

(i) Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;

(ii) Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$;

(iii)Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e, para n suficientemente grande, temos que $af(n/b) \le cf(n)$ para alguma constante $c < 1$, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

12 Somatório

Dada uma sequência de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, onde n é um inteiro não negativo, definimos

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Fórmulas

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Para toda constante real $c \ne 1$,

$$\sum_{i=0}^n c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1} = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}.$$

Para toda constante real $c \ne 1$,

$$\sum_{i=0}^n ic^i = \frac{nc^{n+2} - (n+1)c^{n+1} + c}{(c-1)^2}.$$

13 Funções Chão e Teto

Para todo inteiro positivo n, vale que

$$n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

Para todo inteiro positivo n e números reais arbitrários m e x, vale que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/m \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{mn} \right\rfloor$$

$$\left\lceil \frac{\lceil x/m \rceil}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{mn} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{x}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+(n-1)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-1}{n} \right\rfloor + 1$$

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lceil \frac{x-(n-1)}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{x+1}{n} \right\rceil - 1$$

14 Combinatória

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$e^x \ge 1 + x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \le n! \le \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

Desigualdade de Bernoulli

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$, vale que

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

Fórmula de Stirling

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\alpha_k}\sqrt{2\pi k},$$

onde $\frac{1}{12k+1} \le \alpha_k \le \frac{1}{12k}$.

Desigualdade de Jansen

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e X uma variável aleatória finita tomando valores reais. Então.

$$\mathbb{E}[f(x)] \ge f(\mathbb{E}[X])$$

Cor. *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i) \ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)$$ □

15 Probabilidade

Seja $(\Omega, \mathbb{P})$ um espaço probabilístico.

A probabilidade de um evento $A \subseteq \Omega$ é

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega).$$

Note que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Propriedades

Sejam $A \subseteq \Omega$ e $B \subseteq \Omega$ eventos.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset$$
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = P(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq P(A) - \mathbb{P}(\overline{B})$$
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ eventos, então
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i).$$

Variável Aleatória e Esperança

Uma **variável aleatória** X é uma função $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dado um número $x \in \mathbb{R}$, é comum escrevermos $\{X = x\}$, ou simplesmente $X = x$, para denotar o evento $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x\}$. De forma semelhante definimos $\{X \leq x\}$, $\{X < x\}$ $\{X \geq x\}$ e $\{X > x\}$.

Dado um evento $A \subseteq \Omega$, I_A é uma **variável aleatória indicadora do evento** A se, para todo $\omega \in \Omega$, temos que
$$I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

A **esperança** de uma variável aleatória X, denotada por $\mathbb{E}[X]$, é definida como
$$\mathbb{E}[X] \coloneqq \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(w).$$

Propriedades

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e a e b dois números reais.
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[X].$$
Linearidade da Esperança:
$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]\,.$$
Se X e Y são independentes, então
$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$
Se I_A é uma variável indicadora de um evento A, então
$$\mathbb{E}[I_A] = \mathbb{P}(A).$$
Uma variável aleatória X tem **distribuição de Bernoulli com parâmetro** p se $\mathbb{P}(X = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, onde $0 \leq p \leq 1$. Note que $\mathbb{E}[X] = p$.

Uma **variável aleatória binomial** X **com parâmetros** n **e** p, denotada por $\mathbb{B}(n, p)$, é uma variável aleatória tal que
$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$
onde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli com parâmetro p.
$$\mathbb{E}[\mathbb{B}(n, p)] = np.$$

Desigualdade de Markov

Se X é uma variável aleatória tal que $X \geq 0$ e $\mathbb{E}[X] < \infty$, então, para todo $\delta > 0$, vale que
$$\mathbb{E}[X \geq \delta] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\delta}.$$

Variância

A **variância** de uma variável aleatória X, denotada por $\mathrm{VAR}[X]$, é definda como
$$\mathrm{VAR}[X] \coloneqq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

$$\mathrm{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante, então
$$c \cdot \mathrm{VAR}[X] = c^2 \cdot \mathrm{VAR}[X].$$

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então $\mathrm{VAR}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathrm{VAR}[X_1] + \mathrm{VAR}[X_2] + \cdots + \mathrm{VAR}[X_n]$.

Desigualdade de Chebyshev

Se X é uma variável aleatória e $\delta > 0$, então
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \delta) \leq \frac{\mathrm{VAR}[X]}{\delta^2}$$

Desigualdade de Chernoff

Se $\epsilon \in (0, 1]$ e X é uma variável aleatória binomial, então, para todo número real $a > 0$,

(i) $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + a) \leq e^{-a^2/2n}$

(ii) $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] - a) \leq e^{-a^2/2n}$

16 Sagemath

Download/Install:

`https://www.sagemath.org/`

Editor IDE (Opcional)

https://code.visualstudio.com/

Instale a extensão sugerida de Jupyter e Python. Ao abrir/criar um arquivo de notebook, observe e selecione o kernel do SageMath. Caso a saída de uma célula não tenha sido renderizada corretamente pelo VS Code, você pode mudar o tipo de visualização da resposta clicando nos três pontinhos que aparece ao lado da saída.

Constantes

π = `pi`; e = `e`; i = `i` ou `I`; ∞ = `infinity` ou `oo`; φ = `golden_ration`

Funções elementares

Entrada de funções trigonométricas é dada em radianos.

```
sin(2)      # seno
cos(2)      # cosseno
tan(2)      # tangente
sec(2)      # secante
log(8, 2) # log_2(8) = 3
ln(2)       # logaritmo natural
exp(2)      # e^2
sqrt(2)     #  raiz de 2
```

Definindo expressões simbólicas

Criando variáveis simbólicas

```
var("t, u, theta")
```

Use `+` para adição, `-` para subtração, `*` para multiplicação, `/` para divisão e `^` para exponenciação.

$2x^5 + \sqrt{2}$ = `2*x^5 + sqrt(2)`

Para visualizar uma expressão

`show(2*x^5 + sqrt(2))` $\longrightarrow 2x^5 + \sqrt{2}$

Funções simbólicas

Uma função simbólica

```
f(a, b, theta) = a + b * theta^2
```

Simplificando e expandindo

Abaixo f deve ser uma expressão simbólica

Simplificação:
`f.simplify_exp()`, `f.simplify_full()`, `f.simplify_log()`, `f.simplify_radical()`, `f.simplify_rational()`, `f.simplify_trig()`

Expansão: `f.expand()`

Sistema de (In)Equações

Relação: `f == g` ($f = g$), `f != g` ($f \neq g$), `f <= g` ($f \leq g$), `f >= g` ($f \geq g$), `f < g` ($f < g$) e `f > g` ($f > g$).

Resolvendo:
`solve([x^2 + y^2 == 1, (x-1)^2 + y^2 == 1], x, y)`

Raízes: `(x^3 + 2*x + 1).roots(x)`

Raízes reais: `(x^3+2*x + 1).roots(x, ring=RR)`

Fatorização

Forma fatorada: `(x^3 - y^3).factor()`

Lista de fatores: `(x^3 - y^3).factor_list()`

Limites

$\lim_{x \to a} f(x)$ = `limit(f(x), x = a)`

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ = `limit(f(x), x = a, dir='+')`

$\lim_{x \to a^-} f(x)$ = `limit(f(x), x = a, dir='-')`

Derivadas

$\frac{d}{dx}(f(x))$ = `diff(f(x), x)` ou `f.diff(x)`

$\frac{\partial}{dx}(f(x))$ = `diff(f(x), x)` ou `f.diff(x)`

Integral

$\int f(x)dx$ = `integral(f, x)` ou `f.integrate(x)`

$\int_a^b f(x)dx$ = `integral(f, x, a, b)`

$\int_a^b f(x)dx \approx$ `numerical_integral(f, x, a, b)`

Raízes numéricas e otimização

Raiz numérica: `f.find_root(a, b, x)`

Encontra (m, x_0) tal que $f(x_0) = m$ é máximo:
`f.find_maximum_on_interval(a, b, x)`

Encontra (m, x_0) tal que $f(x_0) = m$ é mínimo:
`f.find_minimum_on_interval(a, b, x)`