Lista 2 - FIS 404 - Relatividade Geral

Espaço tangente, vetores e campos de vetores

1° quadrimestre de 2019 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Caroll (1.4, 2.2, e 2.3), Wald (2.1 e 2.2).
Data de entrega: 06/03.

1. Seja X o campo de vetores $y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, e seja $p \in \mathbb{R}^3$ o ponto $(-1, 1, 0)$.
   (a) Calcule $X(f)$ e $X_p(f)$.
   (b) Interprete geometricamente X, X_p e $X_p(f)$.
   (c) Reescreva X, f e p em coordenadas cilíndricas (r, θ, z).
   (d) Calcule $X(f)$ e $X_p(f)$ em coordenadas cilíndricas usando as expressões encontradas em (c). Compare com os resultados obtidos em (a).

2. No espaço euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^3$, seja $p \in \mathbb{R}^3$ o ponto com coordenadas cartesianas $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. Considere as seguintes curvas passando por p:

$$\alpha(\lambda) = (\lambda, (\lambda - 1)^2, -\lambda);$$
$$\beta(\mu) = (\cos\mu, \sin\mu, \mu - 1);$$
$$\gamma(\sigma) = (\sigma^2, \sigma^3 + \sigma^2, \sigma).$$

   (a) Calcule o vetor tangente a cada uma das curvas em p pensando neles como vetores geométricos que moram no próprio $\mathbb{R}^3$.
   (b) Pensando em cada um dos vetores tangentes encontrado em (a) como sendo um operador derivada no ponto p, determine suas componentes na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \right\}$ do espaço tangente em p.
   (c) Determine as derivadas direcionais da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - yz$ no ponto p ao longo das três curvas acima.

3. Sejam (x, y) as coordenadas cartesianas usuais em $\mathbb{R}^2$. Sejam $(\tilde{x}, \tilde{y})$ coordenadas alternativas definidas através de $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y + x^3$. Seja p o ponto $(1, 0)$ (nas coordenadas usuais). Mostre que os vetores $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$ e $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\Big|_p$ são diferentes apesar das coordenadas x e $\tilde{x}$ serem iguais. Como se explica isso?

4. Sejam X e Y dois campos de vetores em uma variedade diferenciável n-dimensional M. Definimos o comutador $[X, Y]$ entre X e Y através da relação $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave qualquer.
   (a) Mostre que $[X, Y]$ é linear e satisfaz a regra de Leibnitz para concluir que $[X, Y]$ é também um campo de vetores.

(b) Dado um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$, podemos construir uma base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ para o espaço tangente em cada ponto coberto por esse sistema de coordenadas. Dessa forma, dado um campo de vetores X, podemos decompô-lo através de $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, sendo cada componente X^μ uma função real das coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$. Sabendo, disso, dados dois campos de vetores v e w, mostre que as componentes do comutador $[X, Y]$ são dadas por

$$[X, Y]^\mu = X^\nu \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu} - Y^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}.$$

(c) Sejam X, Y, Z três campos de vetores. Mostre que a identidade de Jacobi é satisfeita:

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

5. Observe que o comutador entre dois campos de vetores de uma base coordenada qualquer $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ é sempre nulo, i.e. $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ para quaisquer i e j. É possível mostrar que a recíproca também é verdadeira, isto é, se os campos de vetores $Y_1, \dots, Y_n$ formam uma base para os espaços tangentes e satisfazem $[Y_i, Y_j] = 0$ para quaisquer i e j, então existem coordenadas $(y_1, \dots, y_n)$ tais que $Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$. Sabendo disso:

(a) Mostre que os vetores $X_1 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$ e $X_3 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$ comutam dois a dois.

(b) Encontre coordenadas (u, v, w) em torno do ponto $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ para as quais $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial v}$ e $X_3 = \frac{\partial}{\partial w}$.

(c) Dê um exemplo de três campos de vetores que são linearmente independentes em cada ponto $p \in \mathbb{R}^3$ e cujos comutadores (dois a dois) não são todos nulos. A trinca encontrada constitui uma base para o espaço tangente em qualquer ponto p, mas não existem coordenadas que fazem ela ser uma base coordenada.

6. Considere a variedade $M = \mathbb{R}^2$ munida do produto interno euclidiano usual, denotado por $\langle\ ,\ \rangle$. Portanto, se $U = U^x\partial_x + U^y\partial_y$ e $V = V^x\partial_x + V^y\partial_y$ são campo de vetores na base coordenada cartesiana, então $\langle U, V\rangle = U^xV^x + U^yV^y$.

(a) Usando coordenadas polares (r, θ) definidas por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, reescreva a base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$ em termos da base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$.

(b) Mostre que a base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$ é ortogonal mas não é ortonormal. Sabendo disso, defina uma base ortonormal $\{e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}\}$ normalizando a base coordenada $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$.

(c) Mostre que o comutador $[e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}] \neq 0$. Portanto, de acordo com o ex. 5 a base $\{e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}\}$ não é uma base coordenada. Mostre isso explicitamente, assumindo que existe um sistema de coordenadas (ξ, η) tal que $\frac{\partial}{\partial \xi} = e_{\hat{1}}$ e $\frac{\partial}{\partial \eta} = e_{\hat{2}}$, at'e chegar a alguma conclusão absurda.