# Lista 3 - FIS 404 - Relatividade Geral

Tensores, dinâmica relativística, e métrica

**1° quadrimestre de 2019 - Professor Maurício Richartz**

**Leitura sugerida:** Caroll (1.6-1.9, 2.3-2.5), Wald (2.1-2.4, 4.1-2.2).
**Data de entrega: 02/04.**

0. **(Não precisa entregar) Manipulação de tensores:** seja $p \in M$ um ponto em um espaço-tempo $M$. Assuma que $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\partial/\partial x^0, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3\}$ é uma base de $T_pM$ e que $\{\hat{e}^0, \hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3\} = \{dx^0, dx^1, dx^2, dx^3\}$ é a base dual correpondente para $T_p^*M$. Seja $\mathbf{X} = X^{\mu\nu}\hat{e}_\mu \otimes \hat{e}_\nu$ um tensor do tipo $(2,0)$, $\mathbf{V} = V^\mu \hat{e}_\mu$ um vetor, e $\boldsymbol{\omega} = \omega_\mu \hat{e}^\mu$ um covetor. Assumindo que a métrica $g$ do espaço-tempo é $\mathbf{g} = -2\,\hat{e}^0 \otimes \hat{e}^0 + \hat{e}^1 \otimes \hat{e}^1 + 2\,\hat{e}^2 \otimes \hat{e}^2 + \hat{e}^3 \otimes \hat{e}^3$, e sabendo que as componentes $X^{\mu\nu}$, $V^\mu$ e $\omega_\mu$ são dadas por

$$X^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad V^\mu = (-1, 2, 0, -2), \qquad \omega_\mu = (-2, 0, 0, 3), \tag{1}$$

determine:

a) $V_\mu$, d) $X_\mu{}^\nu$, g) $X^\lambda{}_\lambda$, j) $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{V})$,
b) $\omega_\mu$, e) $X^{(\mu\nu)}$, h) $V^\mu V_\mu$, k) $\boldsymbol{g}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$,
c) $X^\mu{}_\nu$, f) $X_{[\mu\nu]}$, i) $V_\mu X^{\mu\nu}$, l) $\mathbf{X}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})$,

1. **Manipulação de tensores:** Considere um espaço-tempo 4-dimensional munido de uma métrica $g_{\mu\nu}$. Diga quais das igualdades abaixo estão corretas e corrija as que estiverem erradas:

   a) $\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu{}^\nu$,
   b) $\partial_\mu x^\mu = 1$,
   c) $\partial^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}$,
   d) $T_\alpha{}^\beta{}_\gamma = g^{\beta\mu} T_{\alpha\mu\gamma} = g^{\mu\beta} T_{\alpha\mu\gamma}$,
   e) $T_\alpha{}^\beta{}_\beta = g_{\alpha\mu} g^{\beta\alpha} T^\mu{}_{\alpha\beta}$.

2. **Coordenadas parabólicas:** Em um espaço euclidiano 3-dimensional definimos coordenadas parabólicas $(u, v, \phi)$ a partir das coordenadas cartesianas usuais $(x, y, z)$ através de

$$\begin{cases} x = uv\cos\phi, \\ y = uv\sin\phi, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \end{cases}$$

   sendo $u \in [0, \infty)$, $v \in [0, \infty)$ e $\phi \in [0, 2\pi)$.

   a) Encontre as matrizes de mudança de coordenadas entre coordenadas parabólicas e coordenadas cartesianas $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}$ e $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}$.

b) Encontre a base coordenada de vetores e a base coordenada de covetores para as coordenadas parabólicas em termos da base correspondente em coordenadas cartesianas.

c) A métrica do espaço euclidiano em coordenadas cartesianas é $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$. Encontre a métrica ($g_{\mu'\nu'}$) e a métrica inversa ($g^{\mu'\nu'}$) do espaço euclidiano em coordenadas parabólicas.

3. **Símbolos de Christoffel:** Seja $M$ uma variedade e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Usando as propriedades da derivada parcial e a regra da cadeia, mostre que:

   a) $\partial_\alpha f$ são componentes de um tensor do tipo $(0,1)$ [ou seja, $(\partial_\alpha f)\, dx^\alpha$é um tensor do tipo $(0,1)$];

   b) $\partial_\alpha \partial_\beta f$ não são componentes de um tensor do tipo $(0,2)$ [ou seja, $(\partial_\alpha \partial_\beta f)\, dx^\alpha \otimes dx^\beta$ não é um tensor do tipo $(0,2)$];

   c) Se $g_{\alpha\beta}$ é uma métrica em $M$, defina os símbolos de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ através de

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left( \partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \right).$$

   Mostre que $w_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha \partial_\beta) f - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} (\partial_\lambda f)$ são componentes de um tensor do tipo $(0,2)$.

4. **Referencial localmente inercial:** Considere o espaço-tempo bidimensional $M$ dado pela superfície de uma esfera. Um possível sistema de coordenadas para $M$ são os ângulos $(\theta, \phi)$ que aparecem nas coordenadas esféricas usuais. Suponha que $M$ tem uma métrica dada por $g = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu = d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\phi \otimes d\phi$.

   a) Calcule $g_{\mu\nu}$ e $\partial_\gamma g_{\mu\nu}$ no ponto $p = (\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ (ou seja, em um ponto no equador).

   b) Encontre um novo sistema de coordenadas $(v, w)$ para o qual $g_{\mu'\nu'} = \mathrm{diag}(1,1)$ no ponto $p$ e $\partial_{\gamma'} g_{\mu'\nu'} = 0$ no ponto $p$. O referencial associado a essas coordenadas é um referencial localmente inercial em p.

5. **Efeito doppler relativístico:** É impossível associar um tempo próprio a uma partícula sem massa, que se move à velocidade da luz, como o fóton. Por isso, é impossível definir uma quadrivelocidade para o fóton. Apesar disso, se a trajetória do fóton é dada por $x^\mu(\alpha)$ em um referencial $\mathcal{O}$, onde $\alpha$ é uma parametrização da curva, podemos construir um quadrivetor tangente à trajetória do fóton através de $dx^\mu(\alpha)/d\alpha$. É conveniente escolher o parâmetro $\alpha$ de tal maneira que o vetor tangente à trajetória do fóton seja seu quadrimomento, isto é, $p^\mu = dx^\mu(\alpha)/d\alpha = (E, \vec{p})$, onde $E$ é a energia do fóton no referencial $\mathcal{O}$ e $\vec{p}$ é seu trimomento nesse mesmo referencial $\mathcal{O}$. Da Mecânica Quântica sabemos que $E = hf$, onde $h$ é a constante de Planck e $f$ é a frequência associada ao fóton no referencial $\mathcal{O}$. Sabe-se que um observador com quadrivelocidade $u^\mu_{\text{obs}}$ mede a energia do fóton como sendo $E_{\text{obs}} = -p^\mu_{\text{foton}} (u_{\text{obs}})_\mu = -g_{\mu\nu} p^\mu_{\text{foton}} u^\nu_{\text{obs}}$. Seja $\mathcal{O}'$ um referencial que se move com velocidade $V$ na direção $x$ em relação ao referencial $\mathcal{O}$ no qual a frequência do fóton é $f$. Seja $E' = hf'$ a frequência do fóton medida por um observador em repouso no referencial $\mathcal{O}'$. Assuma que o espaço-tempo é Minkowski e lembre-se que, para um fóton, $p^\mu p_\mu = 0$.

   a) Determine a razão entre as frequências $f'$ e $f$ se o fóton se move paralelamente ao eixo x (i.e., $\vec{p} = p\hat{x}$ no referencial $\mathcal{O}$).

   b) Determine a razão entre as frequências $f'$ e $f$ se a trajetória do fóton faz um ângulo $\theta$ com o eixo x.

c) Existe algum ângulo $\theta$ para o qual a frequência $f'$ é nula?

6. **Variáveis de Mandelstam:** Um fenômeno comum em física de partículas é a colisão entre duas partículas, A e B, formando duas novas partíulas, C e D. Nesses casos, assumindo o espaço-tempo de Minkowski, é conveniente definir as variáveis de Mandelstam $s$, $t$ e $u$:

$$s = -\eta_{\mu\nu}(p_A^\mu + p_B^\mu)(p_A^\nu + p_B^\nu),$$

$$t = -\eta_{\mu\nu}(p_A^\mu - p_C^\mu)(p_A^\nu - p_C^\nu),$$

$$u = -\eta_{\mu\nu}(p_A^\mu - p_D^\mu)(p_A^\nu - p_D^\nu),$$

onde $p_A^\mu$, $p_B^\mu$, $p_C^\mu$, e $p_D^\mu$ são, respectivamente, os quadrimomentos de A, B, C e D. Uma grande vantagem de se usar essas variáveis é que elas são todas invariantes de Lorentz.

a) Usando o fato de que o momento total é conservado, i.e. $p_{\text{total}}^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$, mostre que $s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$.

b) O referencial do centro de massa (CM) é definido como sendo o referencial no qual as componentes espaciais do momento total são nulas, i.e. $p_{\text{total}}^\mu = (E_{\text{total}}^{\text{CM}}, 0, 0, 0)$. Expresse a energia de A no referencial do CM em termos das massas e das variáveis de Mandelstam.

c) Suponha que no referencial do laboratório a partícula B está em repouso, i.e. $p_B^\mu = (E_B^{\text{lab}}, 0, 0, 0)$. Expresse a energia de A no referencial do laboratório em termos das massas e das variáveis de Mandelstam.

d) Expresse a energia total do sistema no referencial do CM, $E_{\text{total}}^{\text{CM}}$, em termos das massas e das variáveis de Mandelstam.

e) Para a colisão de partículas idênticas, i.e. $A + A \to A + A$, mostre que no referencial do CM vale

$$s = 4(|\vec{p}|^2 + m_A^2),$$

$$t = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta),$$

$$u = -2|\vec{p}|^2(1 + \cos\theta),$$

onde $\vec{p}$ é o trimomento de uma das partículas incidentes e $\theta$ é o ângulo de espalhamento.

7. **Relógios terrestres:** Uma boa aproximação para a métrica na superfície da Terra é

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

onde $\Phi = -GM/r$ é o potencial gravitacional newtoniano ($G$ é a constante da gravitação universal, $M$ é a massa da Terra e $r$ é a distância até o centro da Terra). Quando necessário, substitua os valores para $G$, $M$ e $R_T$ (raio da Terra), sem esquecer de recuperar os fatores $c$, para encontrar os valores numéricos.

a) Mostre que, para fenômenos que ocorrem na superfície da Terra ou próximo a ela, $\Phi$ é pequeno a ponto da métrica acima poder ser considerada uma perturbação na métrica de Minkowski.

b) Imagine um relógio na superfície da Terra, na linha do equador, a uma distância $R_1$ do centro da Terra e um outro relógio no topo de um prédio alto, também na linha do equador, a uma distância $R_2$ do centro da Terra. Calcule o tempo marcado por cada relógio em função do tempo coordenado $t$. Qual relógio é mais rápido? Não se esqueça que, por estarem na superfície da Terra, esses relógios tem uma velocidade angular $\omega = \frac{d\phi}{dt} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{dia}}$. [Dica: parametrize a trajetória do relógio, determine sua quadrivelocidade e use $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$.]

c) Considere um satélite em movimento circular de órbita em torno do equador da Terra, ou seja, o movimento do satélite está restrito à superfície $\theta = \pi/2$ e $r = R_{\text{sat}} =$ constante. Assuma que a órbita do satélite é baixa, ou seja, $R_{\text{sat}} \approx R_T$. Sabendo que o movimento do satélite obedece à terceira Lei de Kepler, i.e. $\omega^2 = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{GM_T}{R_{\text{sat}}^3}$, determine quanto tempo demora, de acordo com um observador dentro do satélite, para que o satélite complete uma órbita. Compare o valor com o tempo medido por um relógio estacionário na superfície da Terra. A diferença entre os tempos medidos pelos relógios pode ser detectada se forem utilizados relógios atômicos modernos?

8. **Eletromagnetismo no formalismo relativístico:** Considere o espaço-tempo de Minkowski. Lembre-se que o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, nas coordenadas cartesianas usuais, satisfaz

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ e $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ são, respectivamente, os trivetores campo magnético e campo elétrico.

a) Aplicando a regra de mudança de coordenadas para o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, deduza como os trivetores $\vec{B}$ e $\vec{E}$ se transformam em um boost de Lorentz ao longo do eixo $x$.

b) Considere um campo elétrico uniforme $\vec{E} = E\hat{z} = (0, 0, E)$ produzido por uma placa plana infinita estacionária no plano xy. Seja $\mathcal{O}$ um observador que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{x} = (v, 0, 0)$ em relação à placa. Quais são os campos elétrico e magnético no referencial de $\mathcal{O}$?

c) Partículas de massa $m$ e carga elétrica $q$ que se movem em campos eletromagnéticos são descritas pela equação

$$m\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = \frac{dp^\mu(\tau)}{d\tau} = qU^\lambda F_\lambda{}^\mu,$$

onde $\tau$ é o tempo próprio da partícula, $x^\mu$ é a posição da particula e $U^\mu$ é a quadrivelocidade da partícula. A equação acima é a versão relativística da equação $\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, ou seja, é segunda lei de Newton para a força eletromagnética na Relatividade Especial. Considere uma partícula de massa $m$ e carga $q$ inicialmente em repouso no referencial de $\mathcal{O}$. Utilizando a equação acima, determine a trajetória da partícula no referencial em que a placa que gera o campo eletromagnético está em repouso.

9. **Hidrodinâmica relativística:** No espaço-tempo de Minkowski, o tensor energia-momento para um fluido relativístico com quadrivelocidade $u^\alpha$, densidade $\rho$ e pressão $P$ é

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + P\eta^{\mu\nu},$$

e a lei de conservação do quadrimomento é $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. A lei de conservação do número de partículas, por sua vez, é $\partial_\mu(nu^\mu) = 0$, onde $n$ é a densidade de número de partículas.

a) Mostre que
$$\frac{d\rho}{d\tau} - \frac{\rho + P}{n}\frac{dn}{d\tau} = 0,$$
onde $d/d\tau = u^\mu \partial_\mu$ é a derivada com respeito ao tempo próprio ao longo da linha de mundo de um elemento do fluido. [Dica: contraia a quadrivelocidade com a lei de conservação do quadrimomento e, então, use a conservação do número de partículas.]

b) Mostre que
$$(\rho + P)a_\mu + \partial_\mu P + u_\mu \frac{dP}{d\tau} = 0,$$
onde $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$ é a quadriaceleração do fluido. [Dica: contraia a lei de conservação do quadrimomento com o tensor de projeção $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$.]

c) Considere um fluido estático na ausência da gravidade. Portanto, existe uma referencial de Lorentz $(t, x^i)$ no qual todas as variáveis hidrodinâmicas são independentes de $t$. Mostre que, nesse referencial,
$$\frac{d}{d\tau}\left[u^t\left(\frac{\rho + P}{n}\right)\right] = 0,$$
onde $u^t$ é a componente temporal da quadrivelocidade $u^\mu = (u^t, u^i)$. Essa é a lei de Bernoulli para um fluido relativístico. [Dica: calcule a componente temporal da equação deduzida em (b) e utilize a equação deduzida em (a).]

10. **Projeção e métrica induzida:** Seja $M$ um espaço-tempo qualquer munido de uma métrica $g_{\mu\nu}$. Seja $n^\mu$ um quadrivetor tipo-tempo ou tipo-espaço que está normalizado. Portanto, $n^\mu n_\mu = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \sigma$, onde $\sigma = +1$ se o vetor é tipo-espaço e $\sigma = -1$ se o vetor é tipo-tempo. O tensor $P^\mu{}_\nu$ definido por
$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \sigma n^\mu n_\nu$$
é denominado "primeira forma fundamental na subvariedade ortogonal a $n^\mu$". Apesar do nome complicado, com o qual não precisamos nos preocupar, vamos ver que esse é um importante tensor na Relatividade que é utilizado para fazer projeções (por esse razão, podemos chamar o tensor $P^\mu{}_\nu$ simplesmente de tensor de projeção associado a $n^\mu$).

a) Mostre que $P^\mu{}_\nu$ projeta um vetor qualquer $A^\mu$ em um novo vetor que é ortogonal a $n^\mu$. Isto é, mostre que o vetor $A^\mu_\perp$ definido por $A^\mu_\perp = P^\mu{}_\nu A^\nu$, é:

a.1) ortogonal a $n^\mu$, ou seja, $A^\mu_\perp n_\mu = 0$;

a.2) inafetado pela projeção, ou seja, $A^\mu_{\perp\perp} = P^\mu{}_\nu A^\nu_\perp = A^\mu_\perp$.

b) Mostre que o tensor $P_{\mu\nu}$ atua em vetores ortogonais a $n^\mu$ como se fosse a métrica, isto é, dados dois vetores $A^\mu$ e $B^\mu$ tais que $A^\mu n_\mu = 0$ e $B^\mu n_\mu = 0$, mostre que
$$P_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu.$$
Por esse motivo o tensor $P_{\mu\nu}$, que costuma ser denotado por $h_{\mu\nu}$, é muitas vezes chamado de métrica induzida na hiper-superfície ortogonal a $n^\mu$.

c) Considere o espaço tempo de Schwarzschild cuja métrica é, em coordenadas esféricas $(t, r, \theta, \phi)$, dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

O parâmetro $M$ pode ser associado à massa de uma estrela ou de um buraco negro. Estudaremos essa métrica com mais detalhes ao longo curso, mas por enquanto vamos estudar apenas algumas de suas projeções. Podemos definir os cones de luz em Schwarzschild como sendo as superfícies 2-dimensionais formadas pela intereseção das superfícies 3-dimensionais $\theta =$ constante e $\phi =$ constante. Em particular, considere a superfície formada pela intereseção de $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$. Os quadrivetores (não-normalizados) que definem $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$ são, respectivamente, $n^\mu = (0, 0, 1, 0)$ e $m^\mu = (0, 0, 0, 1)$. Sabendo disso:

c.1) normalize o vetor $n^\mu$ e encontre a métrica $h_{\mu\nu}$ induzida na superfície $\theta = \pi/2$;

c.2) normalize o vetor $m^\mu$ e encontre a métrica $\ell_{\mu\nu}$ induzida na superfície $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$.