Lista 4 - FIS 404 - Relatividade Geral

Derivada covariante, transporte paralelo e geodésicas

1° quadrimestre de 2019 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Caroll (3.1-3.4,3.6), Wald (3.1-3.3).
Data de entrega: 18/04.

1. **Definição da derivada covariante:**

   a) Mostre que o fato da derivada covariante comutar com a operação de contração é equivalente ao fato da derivada covariante do tensor delta de Kronecker ser nulo (i.e. $\nabla_\mu \delta^\alpha_\beta = 0$).

   b) Mostre que a compatibilidade da derivada covariante com métrica implica a compatibilidade da derivada covariante com a métrica inversa, i.e. mostre que $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \nabla_\mu g^{\alpha\beta} = 0$.

2. **Transporte paralelo e geodésicas na esfera:** Considere uma 2-esfera com coordenadas (θ, ϕ) e métrica $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

   a) Determine (sem usar o computador) os símbolos de Christoffel para a 2-esfera.

   b) Mostre que as curvas de longitude constante ($\phi =$ constante) são geodésicas e que a única curva de latidude constante ($\theta =$ constante) que é geodésica é o equador ($\theta = \pi/2$).

   c) Transporte paralelamente o vetor $V^\mu = a\partial_\theta + b\partial_\phi$ uma vez em torno de um círculo de latitude constante θ_0. Quais são as componentes do vetor obtido em função de θ_0?

3. **Vetores de Killing:** Considere uma mudança infinitesimal de coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \epsilon v^\mu(x)$, onde $v^\mu(x)$ são as componentes de um campo de vetores e ϵ é uma quantidade escalar pequena.

   a) Usando a regra de transformação de tensores, mostre que, em primeira ordem para ϵ vale a relaçao
   $$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) - \epsilon(g_{\mu\lambda}\partial_\nu v^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu v^\lambda)$$

   b) Se $g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x)$ dizemos que a mudança de coordenadas é uma isometria (repare que o argumento no lado esquerdo da equação é x e não x'). Mostre que a mudança de coordenadas infinitesimal é uma isometria, em primeira ordem para ϵ, se as componentes v^μ satisfazem
   $$g_{\alpha\mu}\partial_\beta v^\mu + g_{\mu\beta}\partial_\alpha v^\mu + v^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} = 0.$$

   c) Mostre que a equação acima é equivalente a $\nabla_\nu v_\mu + \nabla_\mu v_\nu = 0$. Essa equação é denominada equação de Killing e qualquer campo de voetores que satisfaz essa equação é denominado vetor de Killing para a métrica em questão.

   d) Mostre que se p^μ é o quadrimomento de uma partícula (com ou sem massa) livre, e V^μ é um vetor de Killing, então o escalar $p^\mu V_\mu$ é uma constante ao longo da trajetória da partícula, i.e. $\frac{d(p^\mu V_\mu)}{d\lambda} = p^\nu \nabla_\nu (p^\mu V_\mu) = 0$, onde λ representa um parâmetro afim ao longo da trajetória da partícula. A interpretação física desse resultado é que cada vetor de Killing pode ser associado a uma constante de movimento da partícula.

   e) Encontre três vetores de Killing R^μ, S^μ, T^μ da esfera ($ds^2 = d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2$), que não comutam entre si (i.e. tais que $[R^\mu\partial_\mu, S^\nu\partial_\nu] \neq 0$, $[S^\mu\partial_\mu, T^\nu\partial_\nu] \neq 0$, $[T^\mu\partial_\mu, R^\nu\partial_\nu] \neq 0$).

4. **Geodésicas no espaço-tempo de Rindler:** Considere o espaço-tempo de Rindler 2-dimensional, que possui métrica $ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2$ nas coordenadas (t, x), com $t \in \mathbb{R}$ e com $0 < x$.

   a) Determine (sem usar o computador) os símbolos de Christoffel para o espaço-tempo de Rindler.

   b) Usando os coeficientes encontrados em (a), escreva explicitamente as quatro componentes da equação geodésica: $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$.

   c) Resolva as equações da geodésica com a condição inicial $x^\mu(0) = (1, 1)$ e $\frac{dx^\mu}{d\lambda}(0) = (1, 0)$. A geodésica encontrada é tipo-tempo, tipo-espaço, ou tipo-luz?

   d) Mostre que a geodésica atinge $x = 0$ para um valor de parâmetro afim finito. Quando isso ocorre, dizemos que o espaço-tempo não é geodesicamente completo.

   e) No caso específico do espaço-tempo de Rindler, $x = 0$ não é uma singularidade física, mas sim uma região na qual as coordenadas escolhidas são inadequadas. Mostre isso explicitamente fazendo a transformação para novas coordenadas (T, X) definidas por $T = x \sinh t$, $X = x \cosh t$.

5. **Terceira lei de Kepler:** Uma boa aproximação para a métrica nas proximidades do Sol é

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

   onde $\Phi = -GM/r$ é o potencial gravitacional newtoniano (G é a constante da gravitação universal, M é a massa do Sol e r é a distância até o centro do Sol). Considere um planeta, de massa m, que orbita o Sol. Como $m \ll M$, podemos pensar no planeta como sendo uma partícula que descreve uma geodésica tipo-tempo no espaço-tempo da métrica acima.

   a) Determine (sem usar o computador) os símbolos de Christoffel para a métrica acima.

   b) Usando os coeficientes encontrados em (a), escreva explicitamente as quatro componentes da equação geodésica: $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$.

   c) Mostre que existem geodésicas circulares no plano equatorial, i.e. geodésicas do tipo $x^\mu(\lambda) = (t(\lambda), R, \pi/2, \phi(\lambda))$, onde R é constante.

   d) Determine $d\phi/dt$ para as geodésicas circulares encontradas em (c). Como esse resultado pode ser interpretado como a terceira Lei de Kepler?

6. **(Não precisa entregar) Espaço-tempo esfericamente simétrico:** o espaço-tempo quadridimensional esfericamente simétrico mais geral possível é dado pela métrica

$$ds^2 = -e^{2\nu(t,r)}dt^2 + e^{2\lambda(t,r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

   onde $\nu(t, r)$ e $\lambda(t, r)$ são funções arbitrárias de t e r. O objetivo desse exercício é que você aprenda a calcular os símbolos de Christoffel e o tensor de Riemann usando o computador.

   a) Determine todos os símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ que são não-nulos;

   b) Determine todas as componentes não-nulas do tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.