Lista 5 - FIS 404 - Relatividade Geral

Tensor de Riemann e equações de Einstein

1° quadrimestre de 2019 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Caroll (3.6-3.7,4.1-4.2), Wald (3.2,4.1-4.3).
Data de entrega: 26/04.

1. **Riemann em coordenadas localmente inerciais:** Considere um sistema de coordenadas localmente inercial em um ponto P, de modo que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ em P e $\partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ em P.

   a) Escreva o tensor de Riemmann em P em termos de segundas derivadas da métrica em P.

   b) A partir da expressão encontrada em (a), demonstre as quatro simetrias do tensor de Riemann, isto é: (b.1) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$, (b.2) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$, (b.3) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$, (b.4) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0$.

2. **Transformações de Gauge e equação de Einstein linearizada:** Suponha que a métrica do espaço-tempo é uma perturbação de Minkowski, i.e. $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}(x)$, com $\epsilon \ll 1$. Considere a mudança infinitesimal de coordenadas dada por $x'^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$, onde $\xi^\mu(x)$ são funções arbitrárias.

   a) No exercício 3 da lista 4, mostramos que $g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \epsilon\left(g_{\alpha\mu}\partial_\beta\xi^\mu + g_{\mu\beta}\partial_\alpha\xi^\mu + \xi^\mu\partial_\mu g_{\alpha\beta}\right)$. Partindo desse resultado, mostre que $h_{\mu\nu}$ se transforma da seguinte maneira:

   $$h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu\xi_\nu(x) - \partial_\nu\xi_\mu(x)$$

   b) Mostre que, em termos de $h_{\mu\nu}$, as componentes do tensor de Riemann são

   $$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{\epsilon}{2}\left(h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}\right), \text{ com } h_{\alpha\nu,\mu\beta} = \partial_\mu\partial_\beta h_{\alpha\nu}$$

   .

   c) Mostre que $R'_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\alpha\mu\beta\nu}$, ou seja, o tensor de Riemann é invariante sob a transformação $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$.

   d) As perturbações da métrica com traço trocado são definidas por $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h_\sigma{}^\sigma$. Assumindo uma mudança de coordenadas do tipo $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$, qual a equação que ξ^μ deve satisfazer para que $\partial^\beta\bar{h}'_{\alpha\beta} = 0$? Quando essa condição é satisfeita, dizemos que estamos no gauge de Lorentz.

   e) Mostre que, no gauge de Lorentz, as equações linearizadas de Einstein (i.e. desprezando-se termos quadráticos em ϵ) podem ser escritas como

   $$\epsilon\partial^\mu\partial_\mu\bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}.$$

3. **Cosmologia:** Assumindo que o Universo é homogêneo e isotrópico, sua métrica (no caso espacialmente plano) possui a forma

   $$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

   onde $a = a(\tau)$ é uma função do tempo próprio τ medido por qualquer observador isotrópico.

a) Considerando um fluido perfeito (densidade ρ e pressão P), mostre que as equações de Einstein são equivalentes às seguintes equações para $a(\tau)$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}, \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P).$$

Essa equações são conhecidas como equações de Friedmann. Note que, em geral, ρ e P são funções de τ.

b) Mostre que as equações de Friedmann implicam que $\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} = 0$.

c) Alternativamente, obtenha a equação $\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} = 0$ a partir da conservação de energia-momento: $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

d) Além das equações de Friedmann, precisamos de um equação de estado que relaciona P com ρ para determinar a evolução do Universo. A maioria dos fluidos de interesse para a cosmologia obedece a equação de estado $P = w\rho$, onde w é uma constante. Quando $w = 0$, dizemos que o universo é dominado por matéria; quando $w = 1/3$, dizemos que o universo é dominado por radiação; quando $w = -1/3$, dizemos que o universo é dominado por curvatura; quando $w = -1$, dizemos que o universo é dominado por vácuo. Encontre uma fórmula explicita para $a = a(\tau)$ nesses quatro casos. Faça um esboço do gráfico de $a(\tau)$ considerando uma condição inicial $a(0)$ arbitrária. O que acontece com $a(\tau)$ em cada caso a medida em que τ cresce?