Lista 6 - FIS 404 - Relatividade Geral

Métrica de Schwarzschild

1° quadrimestre de 2019 - Professor Maurício Richartz

Leitura sugerida: Caroll (5.1-5.6), Wald (6.1, 6.3).
Data de entrega: 03/05.

1. **Singularidades e horizonte de eventos:** um ponto singular na métrica de um espaço-tempo pode corresponder a uma singularidade física, representando um ponto no qual geodésicas não podem ser estendidas de uma maneira suave. Mas, por outro lado, pode também não ser uma singularidade física, ocorrendo devido a uma má escolha do sistema de coordenadas. Nesse caso, com uma mudança adequada de coordenadas, a singularidade é removida.

   a) Mostre que se mudarmos as coordenadas (t, r, θ, ϕ) para (v, r, θ, ϕ), onde a relação entre as coordenadas temporais é dada por $t = v - r - 2M \ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|$, a métrica usual de Schwarzschild se torna
   $$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$
   A métrica de Schwarzschild nessa forma é chamada de métrica de Eddington-Finkelstein. A partir dessa métrica, conclua que a coordenada $r = 2M$ não é singularidade física.

   b) Apesar do ponto $r = 2M$ não correponder a uma singularidade, ele corresponde a uma superfície muito importante do espaço-tempo. Para entender isso, basta estudar o comportamento de raios de luz radiais (i.e. geodésicas tipo-luz radiais).

   b.1) Observe que $K = \frac{\partial}{\partial v}$ e $R = \frac{\partial}{\partial \phi}$ são vetores de Killing para a métrica de Eddington-Finkelstein. A simetria esférica implica que cada geodésica está contida em um plano (por simplicidade, vamos assumir que é o plano $\theta = \pi/2$). Se $x^\mu(\lambda) = (v(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$, com $\theta(\lambda) = \pi/2$, descreve uma geodésica nula nas coordenadas de Eddington-Finkelstein, defina as constantes de movimento $E = -\frac{dx^\mu}{d\lambda}K_\mu$ e $L = \frac{dx^\mu}{d\lambda}R_\mu$. A partir da condição de normalização das geodésicas tipo-luz, i.e. $g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$, deduza uma equação para $dv/d\lambda$ em termos de E e de L.

   b.2) Encontre uma equação para dv/dr em termos de E e L. Mostre que as soluções dessa equação no caso de geodésicas radiais (i.e. $L = 0$) são $v(r) =$ constante e $v(r) - 2r - 4M\ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right| =$ constante

   b.3) Defina $\tilde{t} = v - r$. Esboce, no plano $(r, \tilde{t})$, as duas soluções encontradas em b.2 para diferentes valores das constantes. Repare que, por cada ponto do espaço-tempo, passam duas geodésicas tipo-luz, i.e. dois raios de luz. Mostre que se $r < 2M$ os raios de luz inevitavelmente chegam à singularidade em $r = 0$ em algum instante de tempo $\tilde{t}$ futuro. Se por outro lado $r > 2M$, mostre que um dos raios de luz inevitavelmente atinge a singularidade mas o outro escapa para $r =$ infinito.

2. **Geodésicas radiais tipo-tempo na geometria de Schwarzschild:** Considere uma partícula livre, massiva, em trajetória radial no espaço-tempo de Schwarzschild. Assuma que a trajetória da partícula é parametrizada pelo seu tempo próprio τ.

   a) Determine as equações de movimento (i.e. as equações diferenciais envolvendo $dt/d\tau$ e $dr/d\tau$) que regem o movimento da partícula.

b) São dadas três condições iniciais possíveis para a partícula:

  (i) partícula parte do repouso em $r = R$;

  (ii) partícula parte do repouso em $r = \infty$;

  (iii) partícula lançada a partir de $r = \infty$ em direção a $r = 0$ com velocidade inicial v_∞.

  Para cada uma dessas condições iniciais, integre as equações do item anterior para encontrar $t = t(\tau)$ e $r = r(\tau)$. Quando possível, elimine o tempo próprio τ para encontrar uma relação do tipo $r = r(t)$ ou $t = t(r)$.

c) Para o caso (i) acima, mostre que o tempo próprio para que a partícula chegue ao horizonte de eventos ($r = 2M$) é finito. Mostre, no entanto, que o tempo coordenado t que se passa até que a partícula atinja o horizonte de eventos é infinito.

d) Mostre que um foguete que atravessa o horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild irá eventualmente atingir a singularidade em $r = 0$ num tempo próprio $\tau \leq \pi M$, independentemente de como e quando os motores do foguete forem acionados.

3. **Deflexão gravitacional de raios de luz:** Considere geodésicas não-radiais tipo-luz no plano equatorial de um espaço-tempo de Schwarzschild. Mostre que a trajetória de raios de luz na métrica de Schwarzschild obedecem à equação

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2, \qquad u = \frac{M}{r},$$

onde r é a coordenada radial de Schwarzschild. Denote o valor mínimo de r ao longo da trajetória como sendo b (denominado parâmetro de impacto). Se $M \ll b$, qual é a deflexão de um fóton que passa perto de um corpo gravitacional esférico? (Dê uma fórmula para o ângulo de deflexão em primeira ordem em potências de M/b.)

4. **Avanço do periélio de Mercúrio:** Considere geodésicas não-radiais tipo-tempo no plano equatorial de um espaço-tempo de Schwarzschild. Deduza a equação diferencial que determina a trajetória (i.e. r em função de ϕ) de uma partícula de massa m. Assuma que a massa M de Schwarzschild representa a massa do Sol enquanto $m \ll M$ corresponde a massa de Mercúrio. Assumindo uma órbita planetária quase Newtoniana (i.e. $M/r \ll 1$), calcule em primeira ordem em M/r o avanço do periélio, por órbita, causada por efeitos gravitacionais.

5. **Redshift/Blueshift:**

a) Um foguete espacial em órbita circular de raio r em torno de uma estrela de massa M aciona sua arma laser (cuja frequência de repouso é f_0). O disparo ocorre no plano orbital sendo que a arma está apontada a um ângulo α (no referencial do foguete) em relação à direção tangencial de movimento. Qual é a frequência f do laser vista por um observador estacionário no infinito?

b) Um radialista está descrevendo sua queda radial em direção ao interior de um buraco negro de Schwarzschild. Logo antes dele atravessar o horizonte de eventos, sua frequência de transmissão se torna enormemente desviada para o vermelho, com uma dependência temporal do tipo $e^{-t/K}$, onde t mede o tempo próprio de um ouvinte no infinito e K é uma constante. Determine a massa M do buraco negro em termos da constante K.