Prova - FIS 404 - Relatividade Geral

1° quadrimestre de 2019 - Professor Maurício Richartz

1. Assuma que M é o espaço-tempo de Minkowski 2-dimensional. Portanto, um evento qualquer do espaço-tempo é descrito por coordenadas cartesianas $x^\mu = (t, x)$, e a métrica de M é dada por $ds^2 = -dt^2 + dx^2$. Assuma que A e B são dois irmãos gêmeos que estão, em $t = 0$, no ponto $x = 0$. Em outras palavras, o ponto $P = (0, 0)$ faz parte da linha de mundo dos dois irmãos. Assuma que A permanece em repouso em $x = 0$ no sistema de coordenadas (t, x). Assuma que B se move para a direita, na direção x, com uma velocidade V.

   (a) Quais curvas $x^\mu(t)$ descrevem as linhas de mundo de A e B no referencial (t, x)? Use o tempo coordenado t para parametrizar cada uma delas.

   (b) No espaço-tempo M, as linhas de mundo de A e B só se cruzam quando $t = 0$. No entanto, se a topologia do espaço-tempo M for modificada, de modo que a coordenada $x = 0$ seja identificada com a coordenada $x = L$, depois de um tempo-coordenado $t = L/V$, as duas linhas de mundo voltarão a se encontrar no evento $Q = (L/V, 0)$. Chamaremos esse novo espaço-tempo de N. Em outras palavras, em N o evento (t, x) é idêntico ao evento $(t, x + L)$, ou seja, $(t, x) = (t, x + L)$ para qualquer x. (Intuitivamente, o que estamos fazendo é "enrolar" o eixo x de forma a ter uma circunferência de comprimento L.) A métrica de N continua sendo $ds^2 = -dt^2 + dx^2$.

      i. Sabendo que a relação entre o tempo próprio e o tempo coordenado é $d\tau = dt\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$, determine as relações entre os tempos-próprios de A e de B durante suas viagens entre os eventos P e Q.

      ii. Tanto o referencial em que A está em repouso como o referencial em que B está em repouso são referênciais inerciais. Conhecendo a dilatação do tempo na Relatividade Especial, e considerando a simetria entre os dois referenciais, podemos dizer que de acordo com o referencial do irmão A, quem envelheceu menos no processo foi o irmão B, mas de acordo com o referencial de B quem envelheceu menos foi A. Quem, de fato, envelhece mais nesse "novo" paradoxo dos gêmeos já foi determinado no item A. O que você precisa fazer é explicar esse aparente paradoxo. [Dica: pense no que acontece com as linhas $x = 0$ e $x = L$, que foram usadas para identificar pontos do espaço-tempo, quando mudamos de referencial.]

2. Coordenadas esferoidais prolatas são utilizadas para simplificar o problema de Kepler na Mecânica Celestial. Essas coordenadas, denotadas por (χ, θ, η) se relacionam com as coordenadas cartesianas usuais (x, y, z) através de

$$\begin{cases} x = \mathrm{senh}\chi\, \mathrm{sen}\,\theta \cos\phi, \\ y = \mathrm{senh}\chi\, \mathrm{sen}\,\theta\, \mathrm{sen}\,\phi, \\ z = \cosh\chi \cos\theta, \end{cases}$$

   sendo $\chi \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Considere o plano $y = 0$, que corresponde a $\phi = 0$ em coordenadas esferoidas prolatas.

   (a) Qual é a matriz mudança de coordenadas $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu\prime}}\right)$ que relaciona as coordenadas (x, z) com as coordenadas (χ, θ)?

(b) No plano $y = 0$, a métrica euclidiana é dada por $ds^2 = dx^2 + dz^2$. Determine essa métrica nas coordenadas esferoidais prolatas.

3. Uma partícula de massa m descreve uma trajetória $x^\mu(t) = (t, \vec{x}(t)) = (t, x(t), y(t), z(t))$ no espaço de Minkowski. A quadrivelocidade U^μ da partícula é definida como $U^\mu = dx^\mu/d\tau$. O quadrimomento P^μ da partícula é definido como $P^\mu = mU^\mu := (E, \vec{p})$.

   (a) Sabendo que $U^\mu U_\mu = -1$, mostre que $U^\mu = \gamma(1, \vec{v})$, onde $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ é a trivelocidade, $v = |\vec{v}|$ e $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Como consequência disso, temos que $E = \gamma m$ e $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$.

   (b) Determine as componentes do vetor quadriaceleração, $A^\mu = dU^\mu/d\tau = (A^0, \vec{A})$ em termos da trivelocidade $\vec{v}$ e da triaceleração $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

   (c) Mostre que U^μ e A^μ são ortogonais, i.e. $U^\mu A_\mu = 0$.

   (d) Mostre que a triforça $\vec{f} = d\vec{p}/dt$ satisfaz $\vec{f} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v}$.

   (e) Na Mecânica Newtoniana, $\vec{f}$ e $\vec{a}$ tem sempre a mesma direção (i.e. são paralelos) já que $\vec{f} = m\vec{a}$. Os vetores $\vec{f}$ e $\vec{a}$ são também sempre paralelos na Mecânica Relativística? Em caso negativo, em que situações específicas eles são paralelos?

   (f) Mostre que a definição clássica de potência, isto é $dE/dt = \vec{f} \cdot \vec{v}$, continua valendo na Relatividade Especial se identificarmos E com a componente zero do quadrimomento.