Prova 2 - FIS 404 - Relatividade Geral

1° quadrimestre de 2019 - Professor Maurício Richartz

1. A equação de Einstein é dada por $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Mostre que no vácuo (i.e. quando $T_{\mu\nu} = 0$), a equação de Einstein é equivalente a $R_{\mu\nu} = 0$.

2. Considere uma 2-esfera com coordenadas (θ, ϕ) e métrica $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

   a) Determine as equações da geodésica e os símbolos de Christoffel para a 2-esfera.

   b) Mostre que as curvas de longitude constante ($\phi =$ constante) são geodésicas e que a única curva de latidude constante ($\theta =$ constante) que é geodésica é o equador ($\theta = \pi/2$).

3. Considere o espaço-tempo cuja métrica é dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right),$$

   onde M é uma constante. Suponha que $x^\mu(\lambda) = (t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$ é uma geodésica tipo-luz desse espaço-tempo, onde λ é um parâmetro afim.

   (a) Explique porque podemos, sem perda de generalidade, assumir que a geodésica está contida no plano $\theta = \pi/2$. (Assuma isso no restante do exercício).

   (b) O espaço-tempo dado é invariante por translações temporais e invariante por rotações do ângulo ϕ. Quais são os vetores de Killing associados a essas simetrias? Quais são as constantes de movimento associadas a esses vetores de Killing?

   (c) Determine uma equação para $dr/d\lambda$ em termos das constantes de movimento encontradas no item anterior.

   (d) Raios de luz radiais seguem geodésicas tipo-luz para as quais ϕ é constante. Encontre uma equação para dt/dr ao longo do caminho de um raio de luz radial. Faça um diagrama dos cones de luz (i.e. raios de luz radiais) no plano r-t. O que acontece com os cones de luz em $r = M$?

   (e) Suponha que ao invés de coordenadas (t, r, θ, ϕ) queremos usar coordenadas (v, r, θ, ϕ), onde $v = v(t, r)$ é uma função qualquer de t e r. Encontre $v(t, r)$ que faz com que a métrica, nas novas coordenadas, não seja singular em $r = M$ e tenha componente $g_{rr} = 0$. Defina $\tilde{t} = v - r$. Faça um diagrama dos cones de luz no plano r-$\tilde{t}$ e determine se $r = M$ representa um horizonte de eventos ou não.