Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Algoritmos e Estruturas de Dados I

Árvores AVL

Mirtha Lina Fernández Venero
Sala 529-2, Bloco A
mirtha.lina@ufabc.edu.br
http://professor.ufabc.edu.br/~mirtha.lina/aedi.html

5 de abril de 2019

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

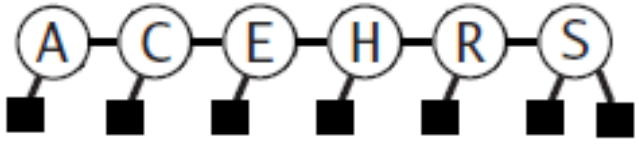
Referências Bibliográficas

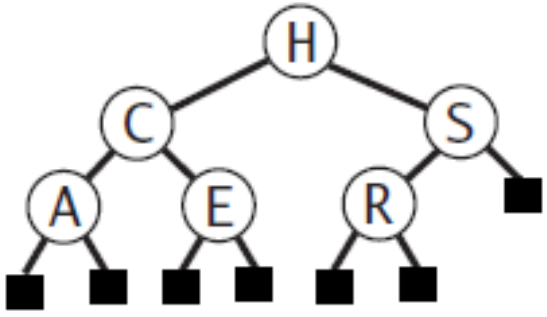
Apêndice

Aulas anteriores - Estratégias de Busca - Caso Pior

Técnica	Ordem	Busca	Inserção	Remoção
Busca Sequencial	Não	N	N	N
Busca Binária	Sim	log(N)	N	N
ABB	Sim	h	h	h
???	Sim	log(N)	log(N)	log(N)

- As operações nas ABBs têm custo entre $O(\log N)$ e $O(N)$
- O caso melhor acontece e.g. quando elas são completas
- Por que não "completar" a árvore após inserir/remover?

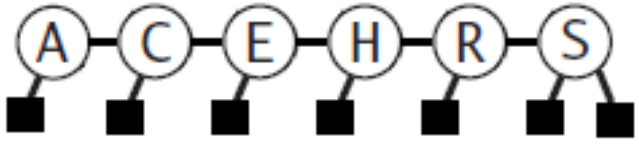


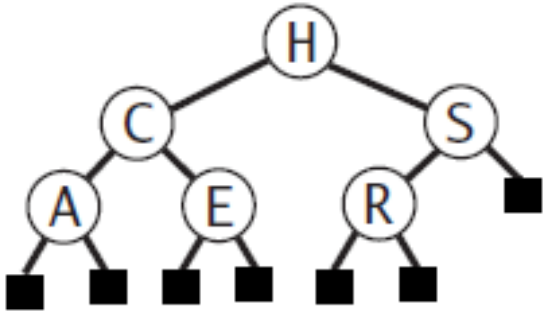


Aulas anteriores - Estratégias de Busca - Caso Pior

Técnica	Ordem	Busca	Inserção	Remoção
Busca Sequencial	Não	N	N	N
Busca Binária	Sim	log(N)	N	N
ABB	Sim	h	h	h
???	Sim	log(N)	log(N)	log(N)

- As operações nas ABBs têm custo entre $O(\log N)$ e $O(N)$
- O caso melhor acontece e.g. quando elas são completas
- Por que não "completar" a árvore após inserir/remover? Custo elevado $O(N)$

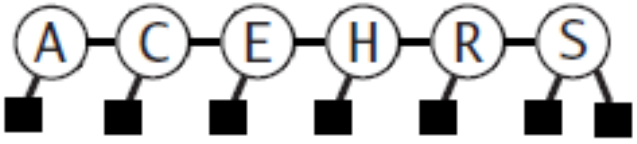


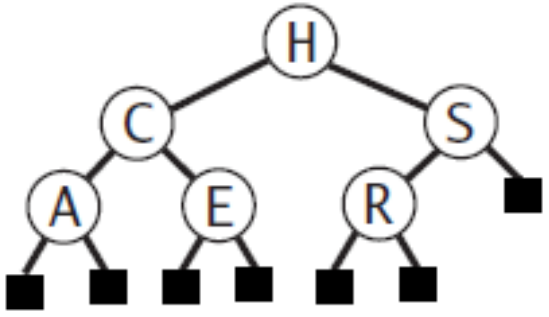


Aulas anteriores - Estratégias de Busca - Caso Pior

Técnica	Ordem	Busca	Inserção	Remoção
Busca Sequencial	Não	N	N	N
Busca Binária	Sim	log(N)	N	N
ABB	Sim	h	h	h
???	Sim	log(N)	log(N)	log(N)

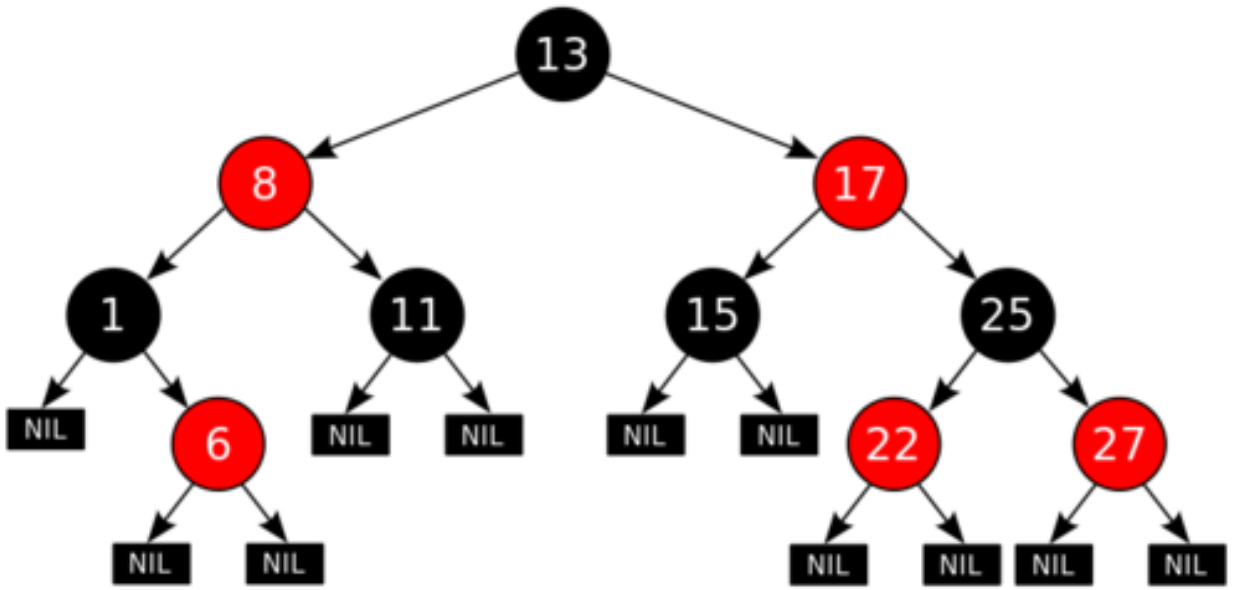
- Na verdade uma ABB não precisa ser completa para ter custo $O(\log N)$; basta serem **balanceadas**
- Que tipo de **balanceamento**?
- Como balancear de forma eficiente e ao mesmo tempo preservar a ordem simétrica após inserir/remover?





Tipos de Árvores Balanceadas

- Balanceamento pela altura (*height balance*): AVL trees, red-black trees

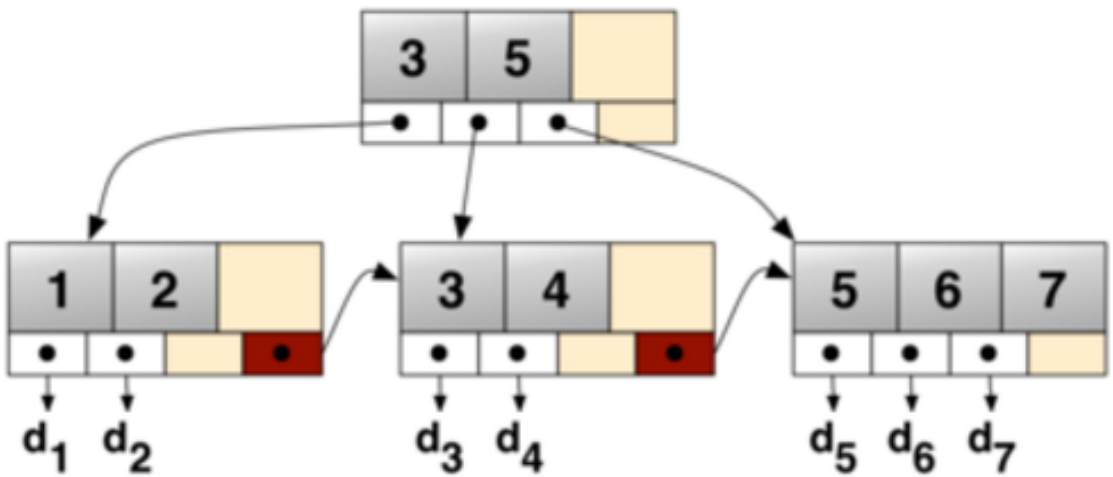


https://en.wikipedia.org/wiki/Red-black_tree

Tipos de Árvores Balanceadas

- Balanceamento pela altura (*height balance*): AVL trees, red-black trees

- Balanceamento perfeito pela altura (*perfect height balance*): 2-3 trees, 2-3-4 trees, B trees (B+, B*)



https://en.wikipedia.org/wiki/B+tree

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Tipos de Árvores Balanceadas

- Balanceamento pela altura (*height balance*): AVL trees, red-black trees
- Balanceamento perfeito pela altura (*perfect height balance*): 2-3 trees, 2-3-4 trees, B trees (B+, B*)
- Balanceamento pela "classe" (*rank balance*): WAVL trees [1]

[1] Rank-balanced trees: Haeupler B., Sen, S., Tarjan, R. E., ACM Transactions on Algorithms, 2015

Tipos de Árvores Balanceadas

- Balanceamento pela altura (*height balance*): AVL trees, red-black trees
- Balanceamento perfeito pela altura (*perfect height balance*): 2-3 trees, 2-3-4 trees, B trees (B+, B*)
- Balanceamento pela "classe" (*rank balance*): WAVL trees [1]
- Balanceamento pela frequência de acesso: splay trees [2]

[2] Self-Adjusting Binary Search Trees: Sleator, Daniel D., Tarjan, Robert E. Journal of the ACM, 1985

Tipos de Árvores Balanceadas

- Balanceamento pela altura (*height balance*): AVL trees, red-black trees
- Balanceamento perfeito pela altura (*perfect height balance*): 2-3 trees, 2-3-4 trees, B trees (B+, B*)
- Balanceamento pela "classe" (*rank balance*): WAVL trees [1]
- Balanceamento pela frequência de acesso: splay trees [2]
- Balanceamento pelo número de nós: weight-balanced binary trees [3]

[3] Binary Search Trees of Bounded Balance: Nievergelt, J., Reingold, E. M. SIAM Journal on Computing, 1973

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

Referências Bibliográficas

Apêndice

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

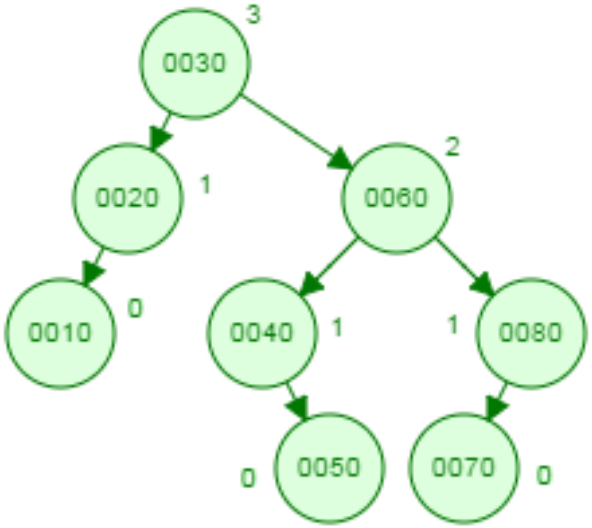
Referências Bibliográficas

Apêndice

Árvores Binárias Balanceadas pela Altura

Altura de um nó: número de passos do mais longo caminho até uma folha

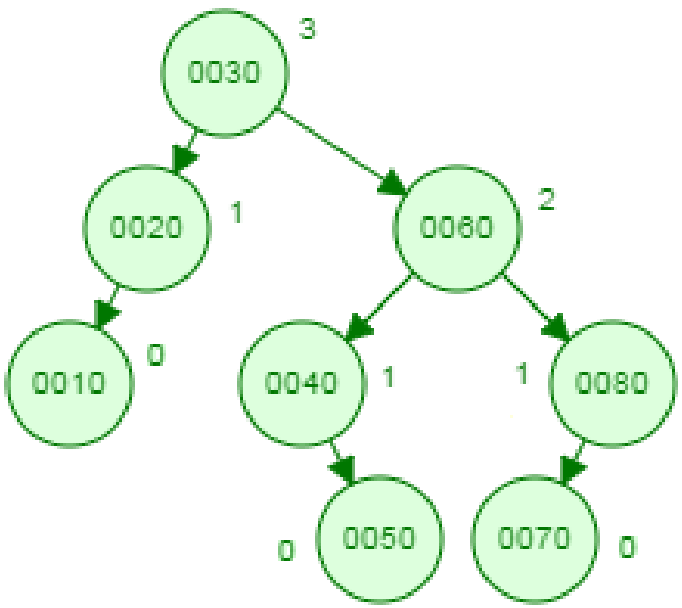
$$h(n) = \begin{cases} -1 & \text{se } n\text{=NULL} \\ max(h(n \to esq), h(n \to dir)) + 1 & \text{se } n\neq\text{NULL} \end{cases}$$

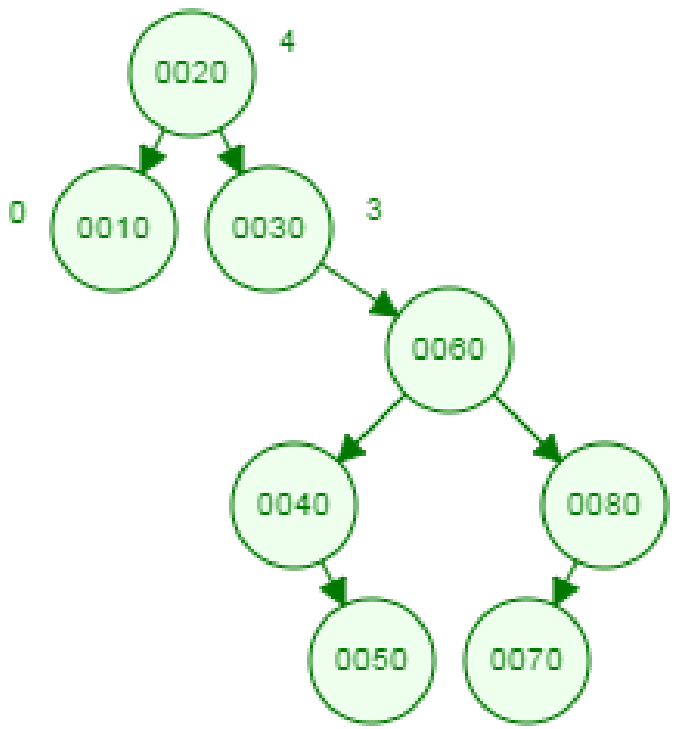


Árvores Binárias **AVL**

Primeiras árvores balanceadas, propostas em 1962 pelos cientistas rusos **Georgy Adelson-Velsky** e **Evgenii Landis** [4]

- para cada nó na árvore, a diferença de altura de suas duas subárvores é no máximo 1

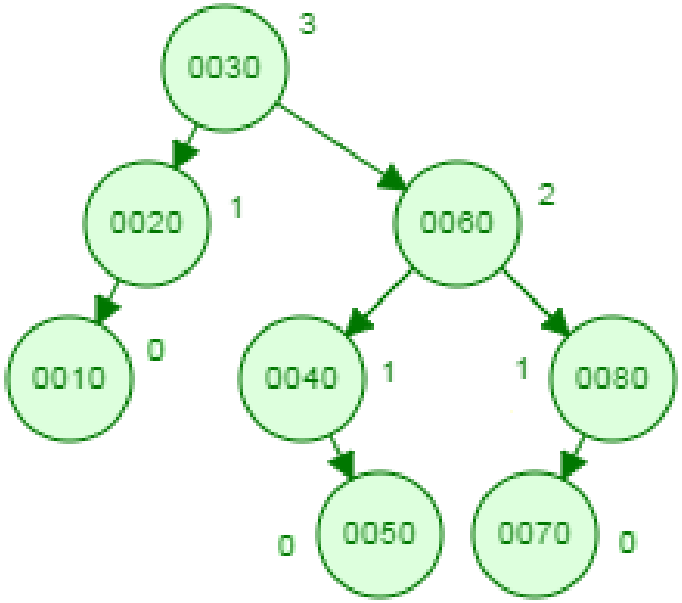


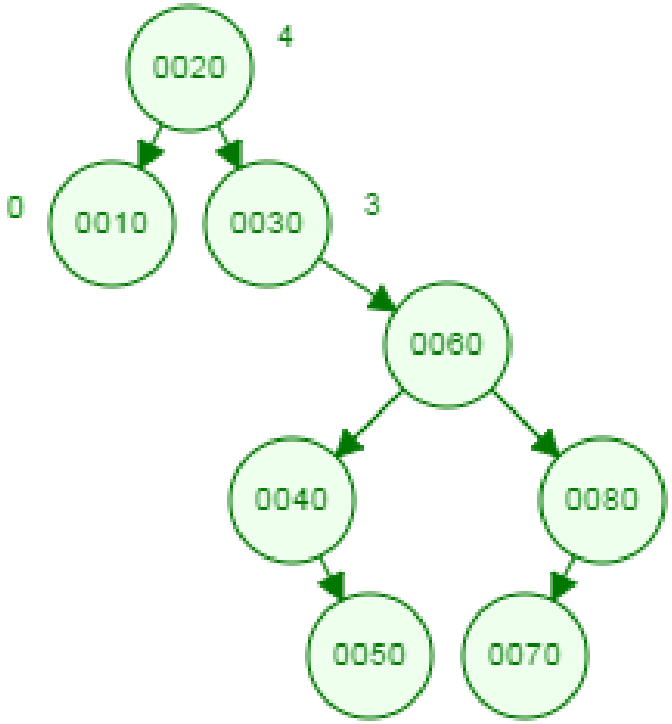


[4] An algorithm for the organization of information. Proc. USSR Academy of Sciences, 146: 263-266, 1962

Árvore AVL e Fator de Balanceamento de um nó n

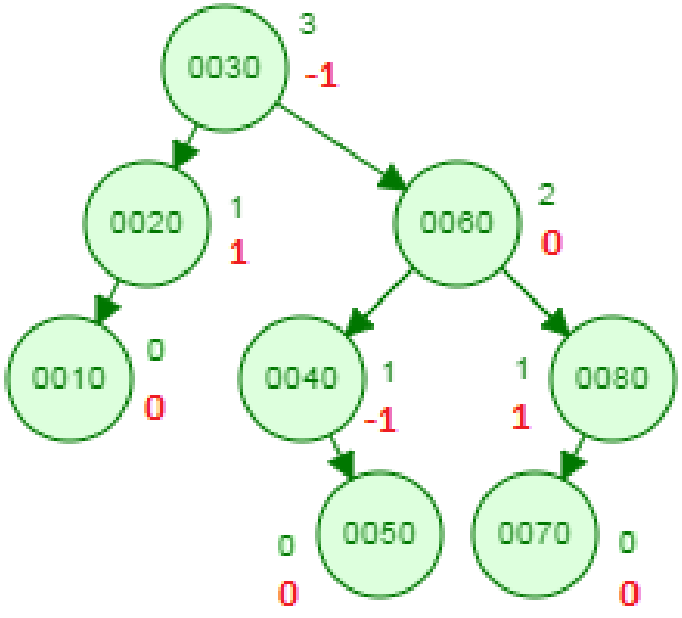
$$FB(n) = h(n \rightarrow esq) - h(n \rightarrow dir)$$

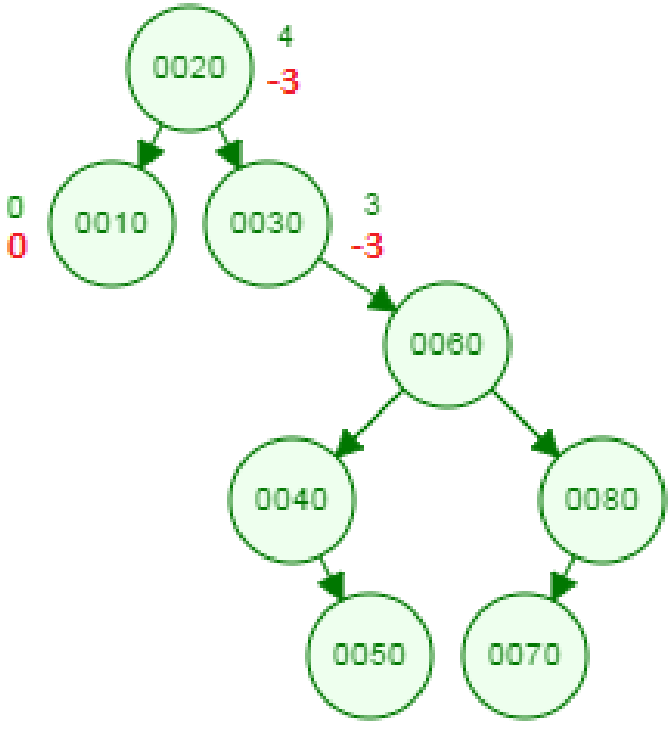




Árvore AVL e Fator de Balanceamento de um nó n

$$FB(n) = h(n \rightarrow esq) - h(n \rightarrow dir)$$

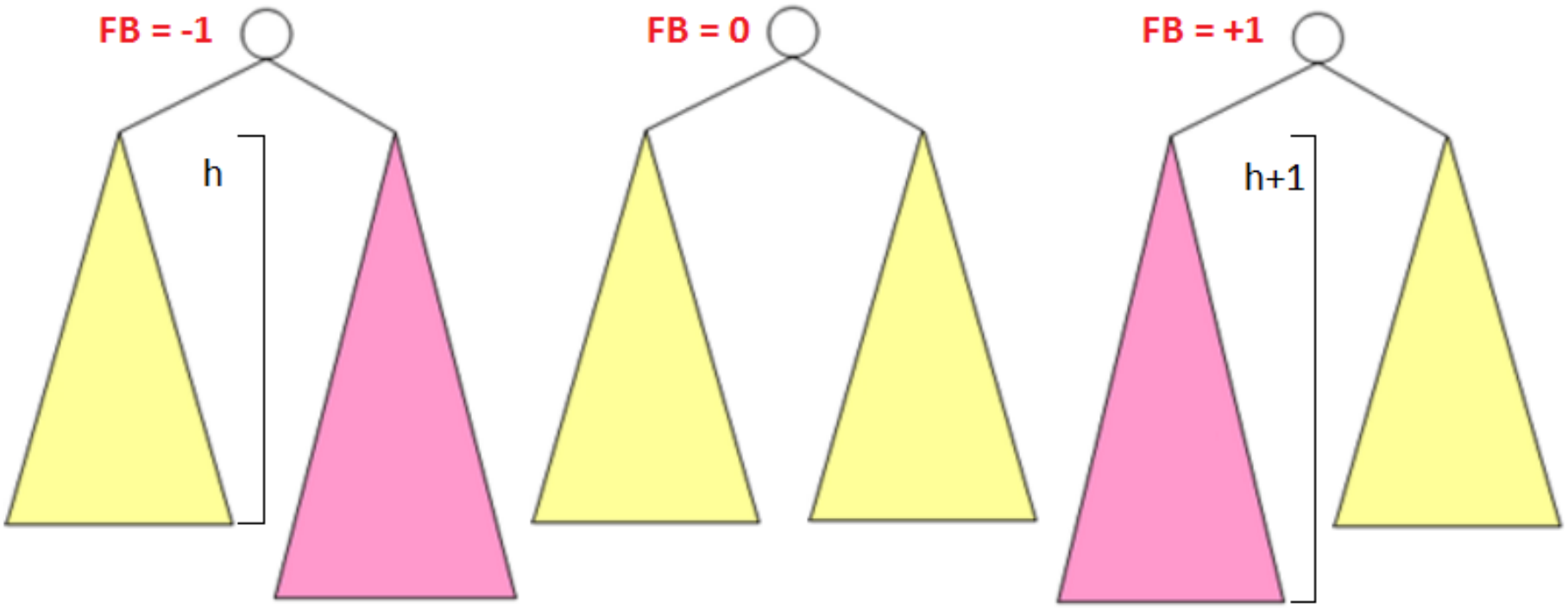




Árvore AVL e Fator de Balanceamento de um nó n

$$FB(n) = h(n \rightarrow esq) - h(n \rightarrow dir)$$

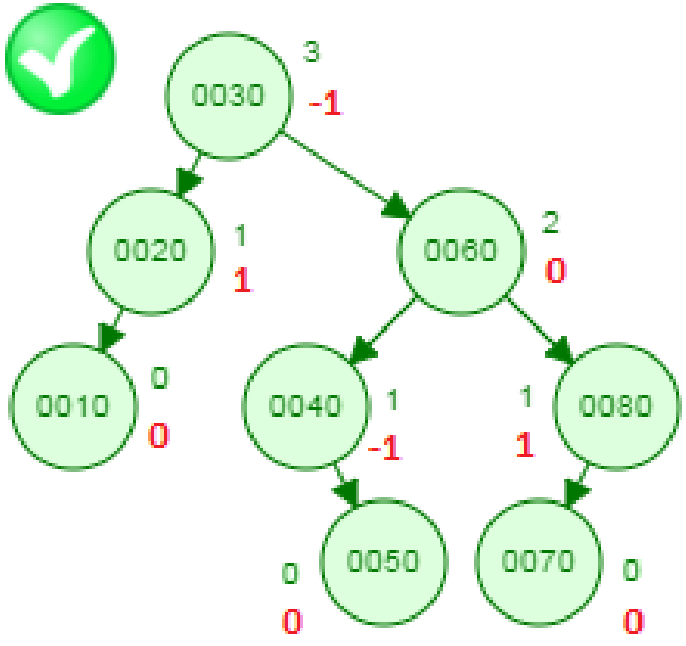
- Uma ABB é **AVL** se para cada nó n, $| FB(n) | \leq 1$

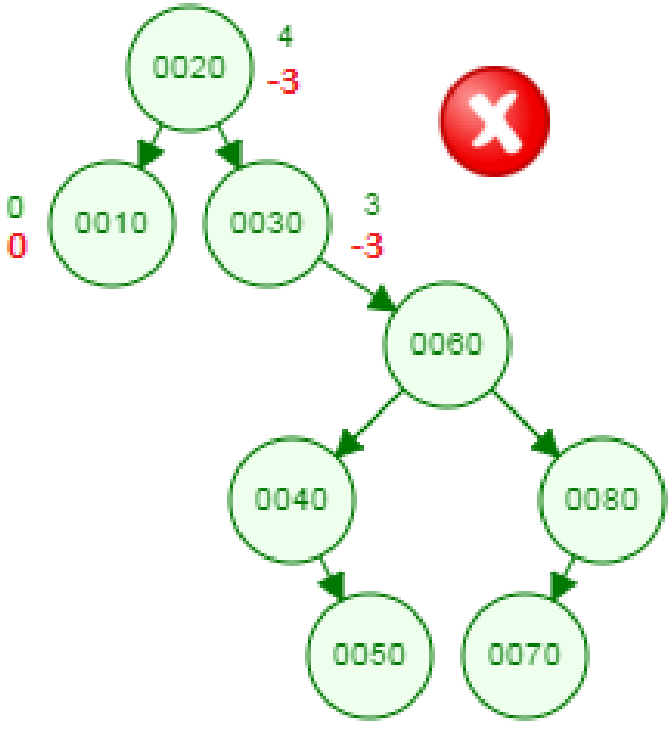


Árvore AVL e Fator de Balanceamento de um nó n

$$FB(n) = h(n \rightarrow esq) - h(n \rightarrow dir)$$

- Uma ABB é **AVL** se para cada nó n, $| FB(n) | \leq 1$



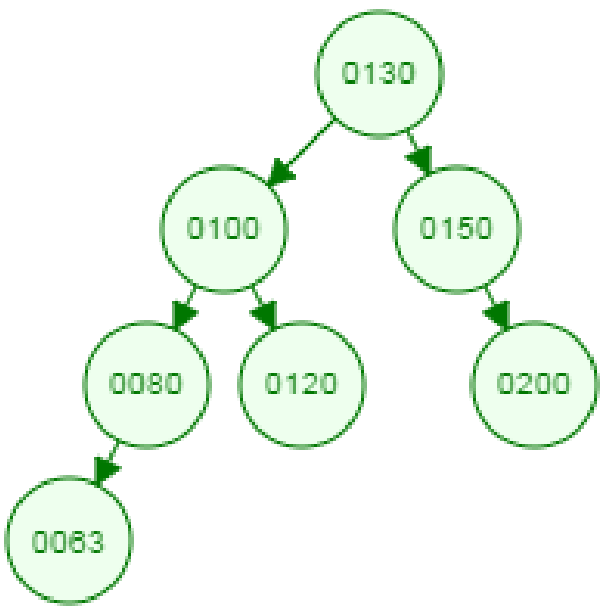


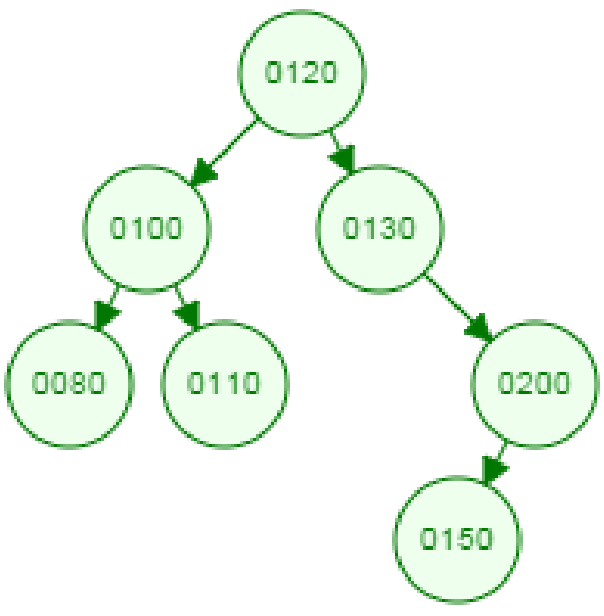
Árvore AVL e Fator de Balanceamento de um nó **n**

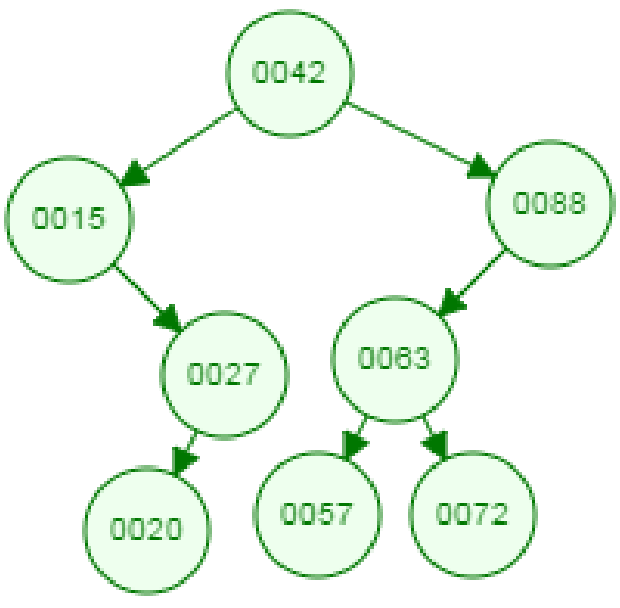
$$FB(n) = h(n \rightarrow esq) - h(n \rightarrow dir)$$

- Uma ABB é **AVL** se para cada nó n, $| FB(n) | \leq 1$

Exercício: Quais das ABBs abaixo são AVL?







Exemplo de Implementação - Árvore AVL

Pode ser implementada armazenando a altura ou o FB

```
typedef struct avlTreeNode avlTreeNode;
struct avlTreeNode {
  int key;
  int height;
  avlTreeNode *left, *right;
};

const int leftheavy = -1, balanced = 0, rightheavy = 1;

int balanceFactor(avlTreeNode *n) {
  if (!n)
    return 0;
  int hl = (n->left)  ? n->left->height  : -1,
      hr = (n->right) ? n->right->height : -1;
  return hl - hr;
}
```

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

Referências Bibliográficas

Apêndice

Análise das Árvores AVL

Qual a altura máxima h duma árvore AVL com n nós?

Prova: Usar pergunta equivalente: fixando h, qual é a menor árvore AVL (# nós) que pode ser construída com altura h? Seja $N(h)$ o menor número de nós de uma árvore AVL de altura h.

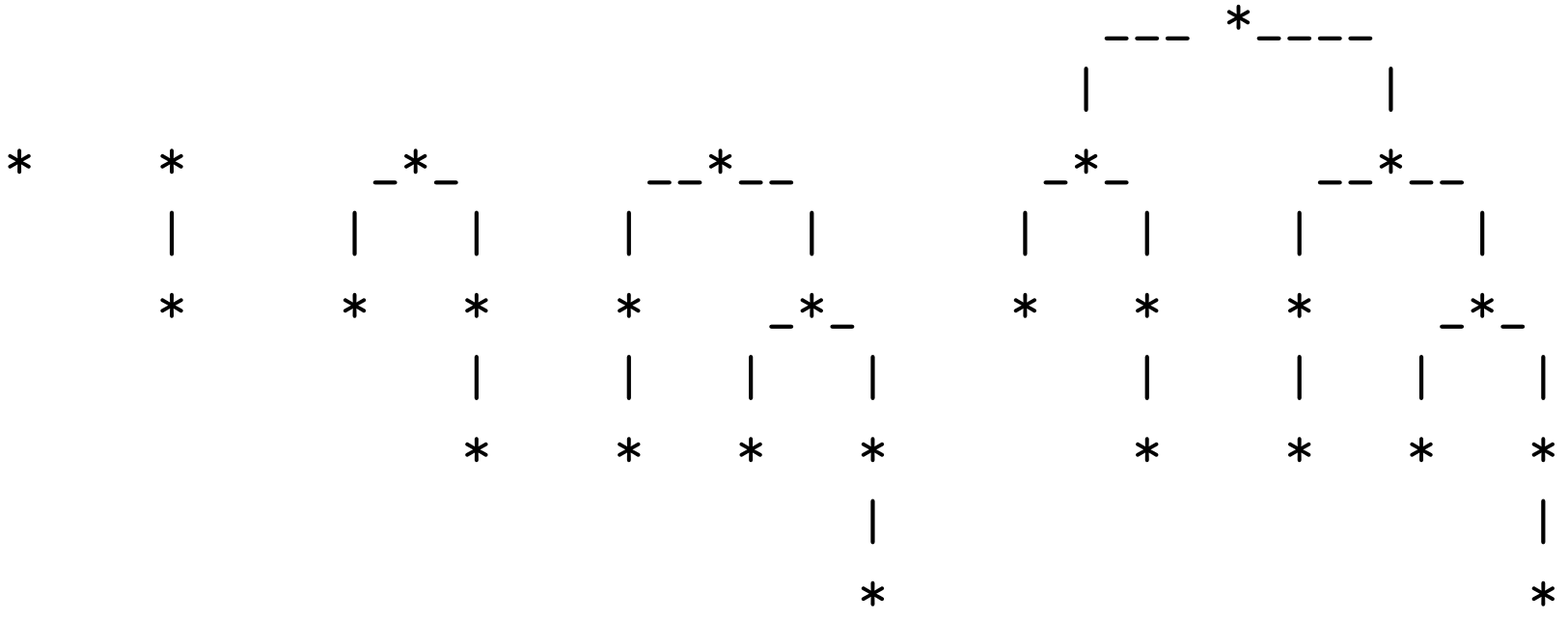
- $N(0) = 1$ e $N(1) = 2$
- Se $h > 1$ as sub-árvores esquerda e direita terão no máximo altura $h - 1$. Na verdade, para fazer com que a árvore tenha o menor número de nós possível (sem violar a condição de AVL) então uma sub-árvore terão altura $h - 1$ e a outra altura $h - 2$. Isto leva à recorrência

$$N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1 \qquad se \;\; h > 1$$

Análise das Árvores AVL - Menor árvore AVL de altura h

$$N(0) = 1; \;\; N(1) = 2$$

$$N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1 \;\; se \; h > 1$$



$N(2) = 4$ $N(3) = 7$ $N(2) = 12$

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Análise das Árvores AVL - Menor árvore AVL de altura h

$$N(0) = 1;\ \ N(1) = 2$$

$$N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1 \ \ se\ h > 1$$

Para $h-1$ temos $N(h-1) = N(h-2) + N(h-3) + 1$, logo

$$N(h) = (\ N(h-2) + N(h-3) + 1\ ) + N(h-2) + 1 \qquad \Rightarrow$$

$$N(h) > 2 * N(h-2) \qquad \Rightarrow$$

$$N(h) > 2 * N(h-2) > 2 * 2 * N(h-4) > \ldots > 2^{h/2}$$

Análise das Árvores AVL - Menor árvore AVL de altura h

$$N(h) > 2^{h/2} \Rightarrow \log_2 N(h) > log_2 2^{h/2} \Rightarrow$$

$$h < 2 * \log_2 N(h) \quad \square$$

Desta forma, para qualquer outra árvore con n nós e altura h

$$n \geq N(h) > 2^{h/2} \Rightarrow \log_2 n > log_2 2^{h/2} \Rightarrow h < 2 * \log_2 n$$

Qual a altura máxima h duma árvore AVL com n nós?

Resposta: $h = O(\log_2 n)$

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Análise das Árvores AVL - Menor árvore AVL de altura h

Resolvendo melhor a recorrência (notar que é parecida com a recorrência dos números de Fibonacci)

$$N(0) = 1;\ \ N(1) = 2$$

$$N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1\ \ se\ h > 1$$

é obtido que

$$N(h) = \varphi^h, \varphi = \frac{1+\sqrt{(5)}}{2} \approx 1.618\ (the\ golden\ ratio)$$

Calculando $\log_2(\varphi) = 1.44$; portanto, a altura de uma árvore AVL é $\approx 1.44 * \log_2 n$ onde n é o número de nós da árvore.

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

Referências Bibliográficas

Apêndice

Árvore AVL e Fator de Balanceamento de um nó **n**

- Como manter as árvores AVL balanceadas após uma inserção ou remoção?
- Como preservar a ordem simétrica das ABS?
- Como manter o custo logarítmico das operações?

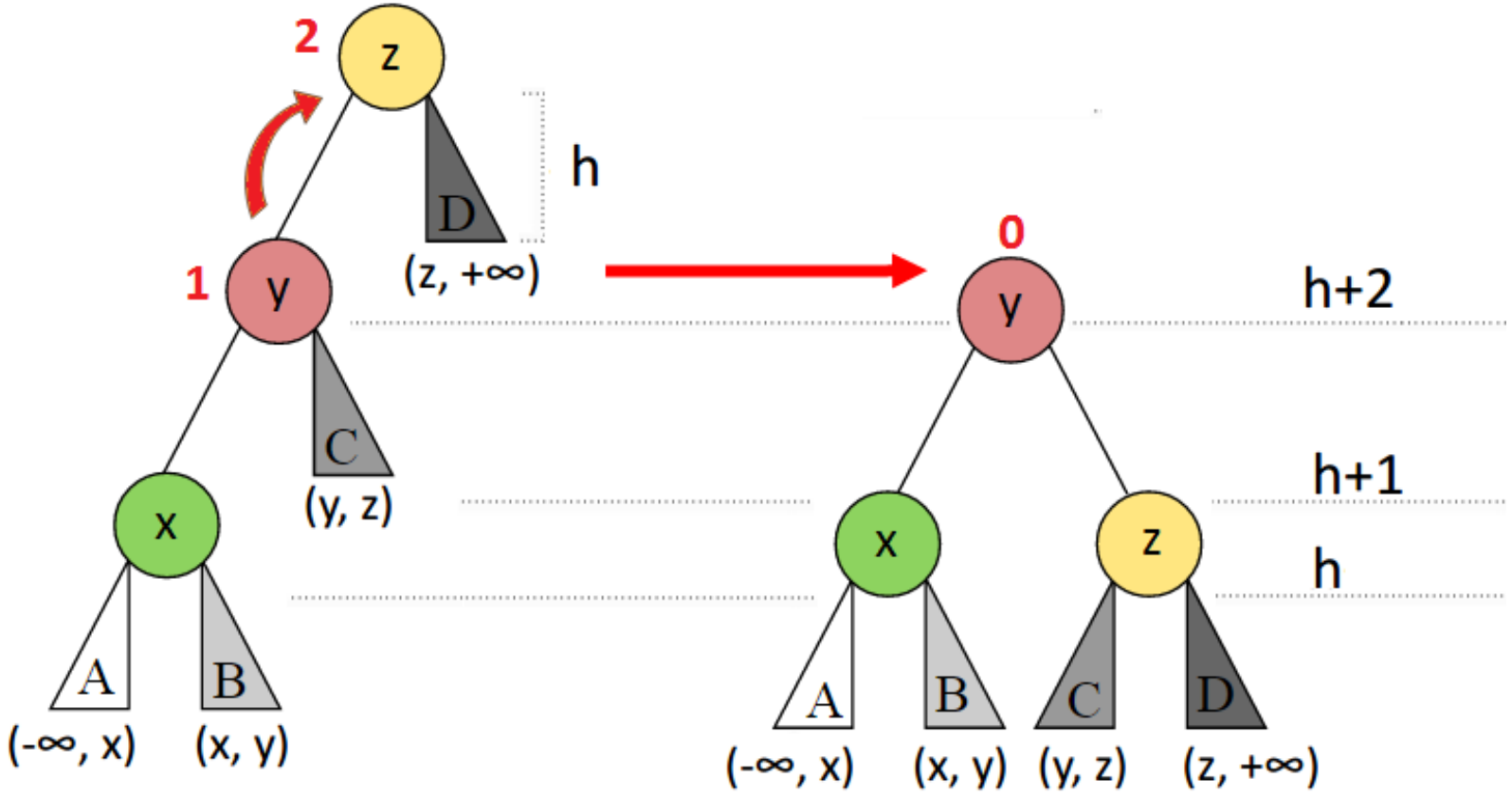
Resposta: usar transformações locais (de baixo custo - $O(1)$) que somente sejam efetuadas no caminho da operação

Rotações: Permitem intercambiar o papel da raiz (nó com FB igual a -2 ou 2) e um dos filhos, preservando a ordem das chaves

- **Simples**: Esquerda ou Direita
- **Dupla**: (Direita-) Esquerda ou (Esquerda-) Direita

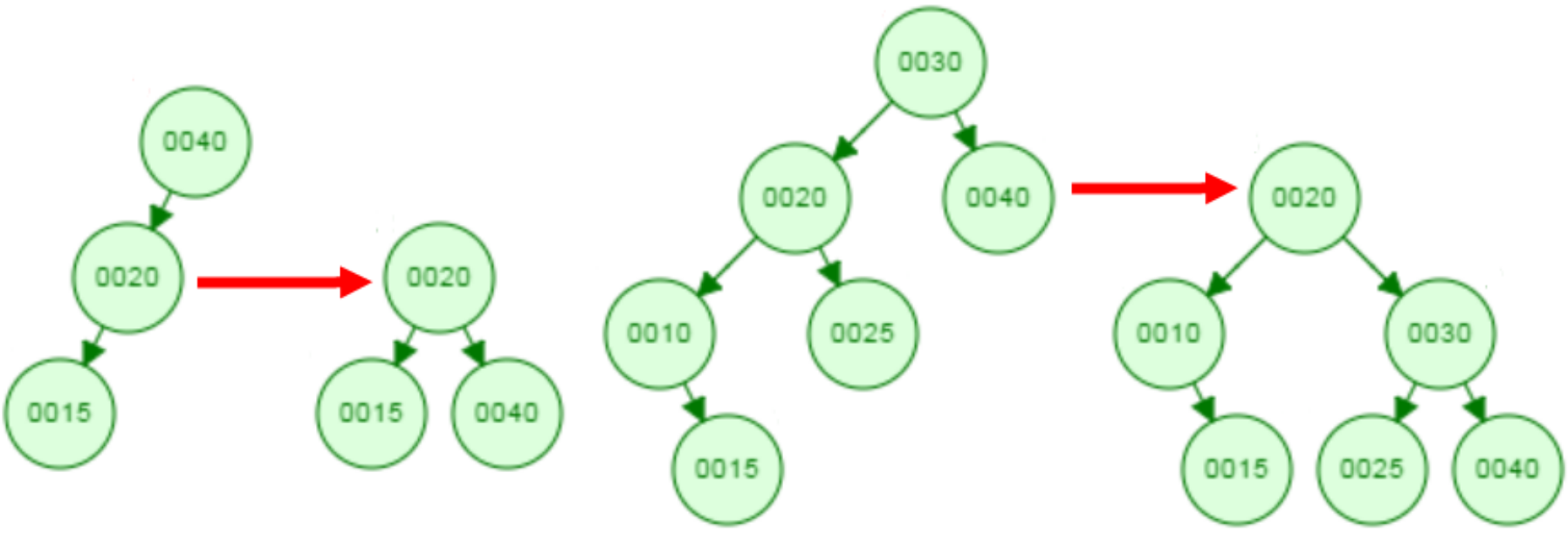
Rotação Simples à Direita - Caso LL

- O desbalanceamento está à esquerda-esquerda
- Troca o papel da raiz e o filho esquerdo preservando a ordem



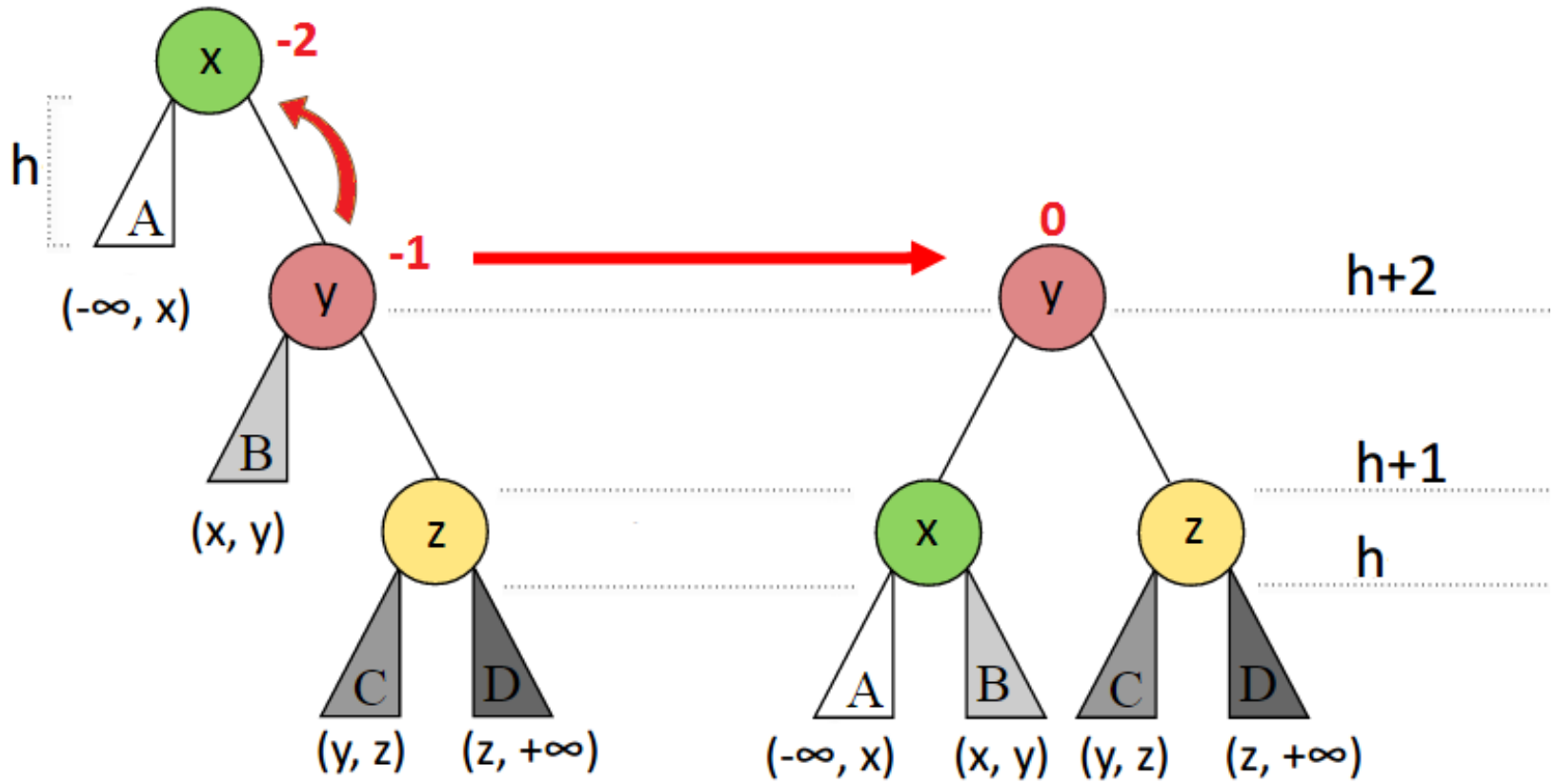
Exemplos Rotação Simples à Direita - Caso LL

- O desbalanceamento está à esquerda-esquerda: o nó desbalanceado tem FB=2 e o filho esquerdo FB=1 (note que é o mesmo sinal do pai!)
- Rotaciona a raiz e o filho esquerdo em sentido horário



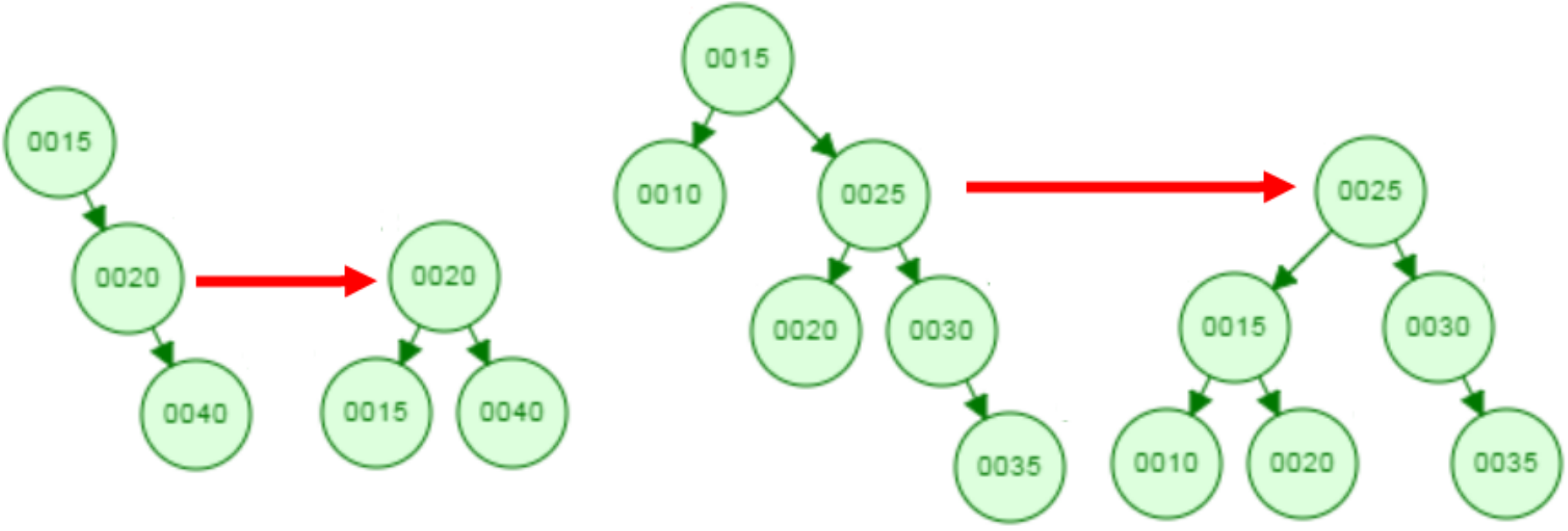
Rotação Simples à Esquerda - Caso RR

- O desbalanceamento está à direita-direita
- Troca o papel da raiz e o filho direito preservando a ordem



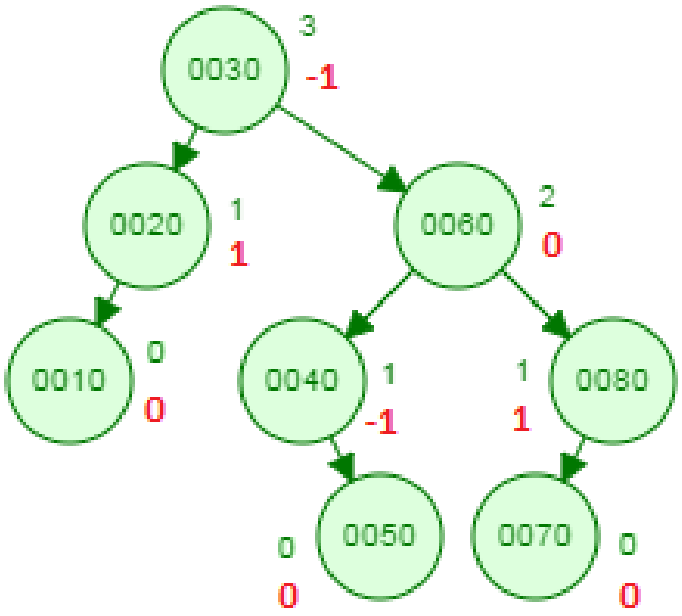
Exemplos Rotação Simples à Esquerda - Caso RR

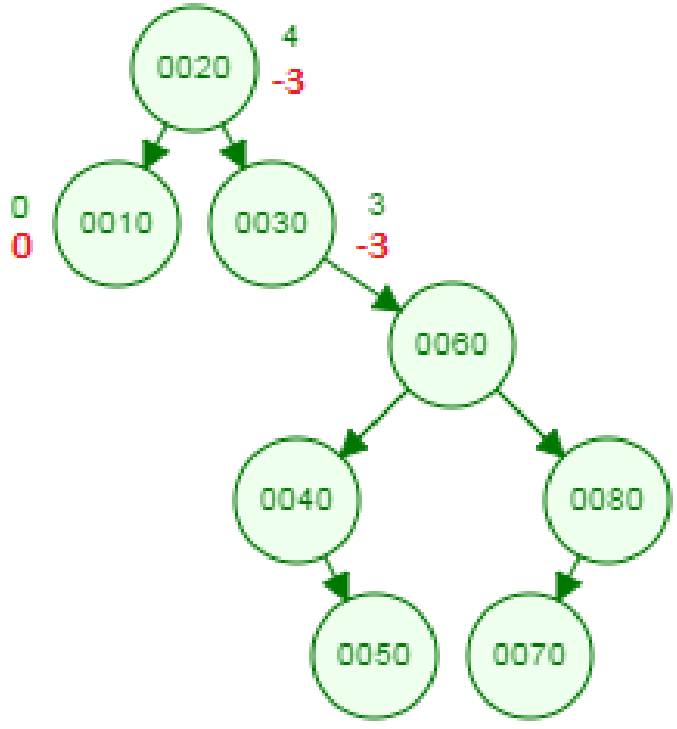
- O desbalanceamento está à direita-direita: o nó desbalanceado tem FB=-2 e o filho direito FB=-1 (note-se que é o mesmo sinal do pai!)
- Rotaciona a raiz e o filho direito em sentido anti-horário



Exercício de Rotação Simples

- Desenhe as árvores resultantes de aplicar a rotação simples à esquerda no nó **0030** nas árvores abaixo.

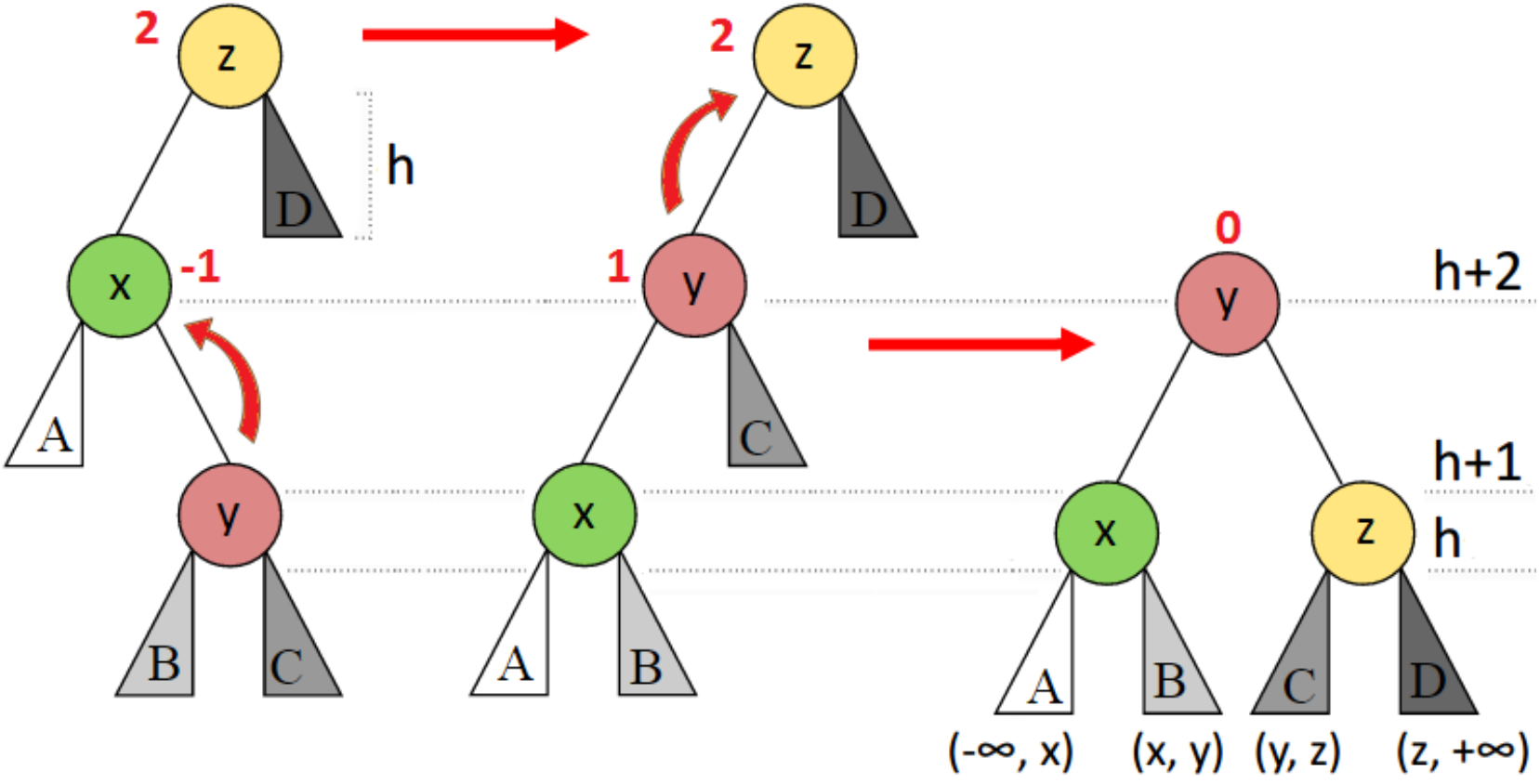




- Escreva uma função `void rotateLeft(avlTreeNode **n)` que implemente a rotação simples à esquerda em um nó `n`.

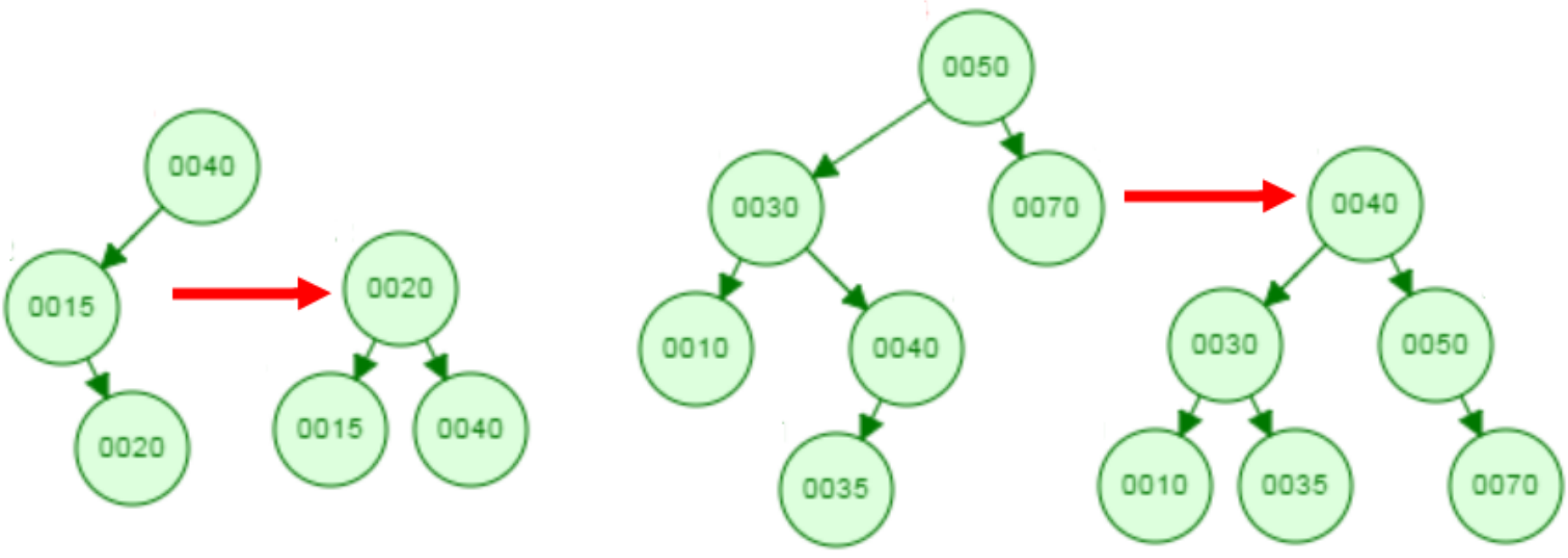
Rotação Dupla à Direita - Caso LR

- O desbalanceamento está à esquerda-direita
- Duas rotações simples: 1ra à esquerda; 2da à direita



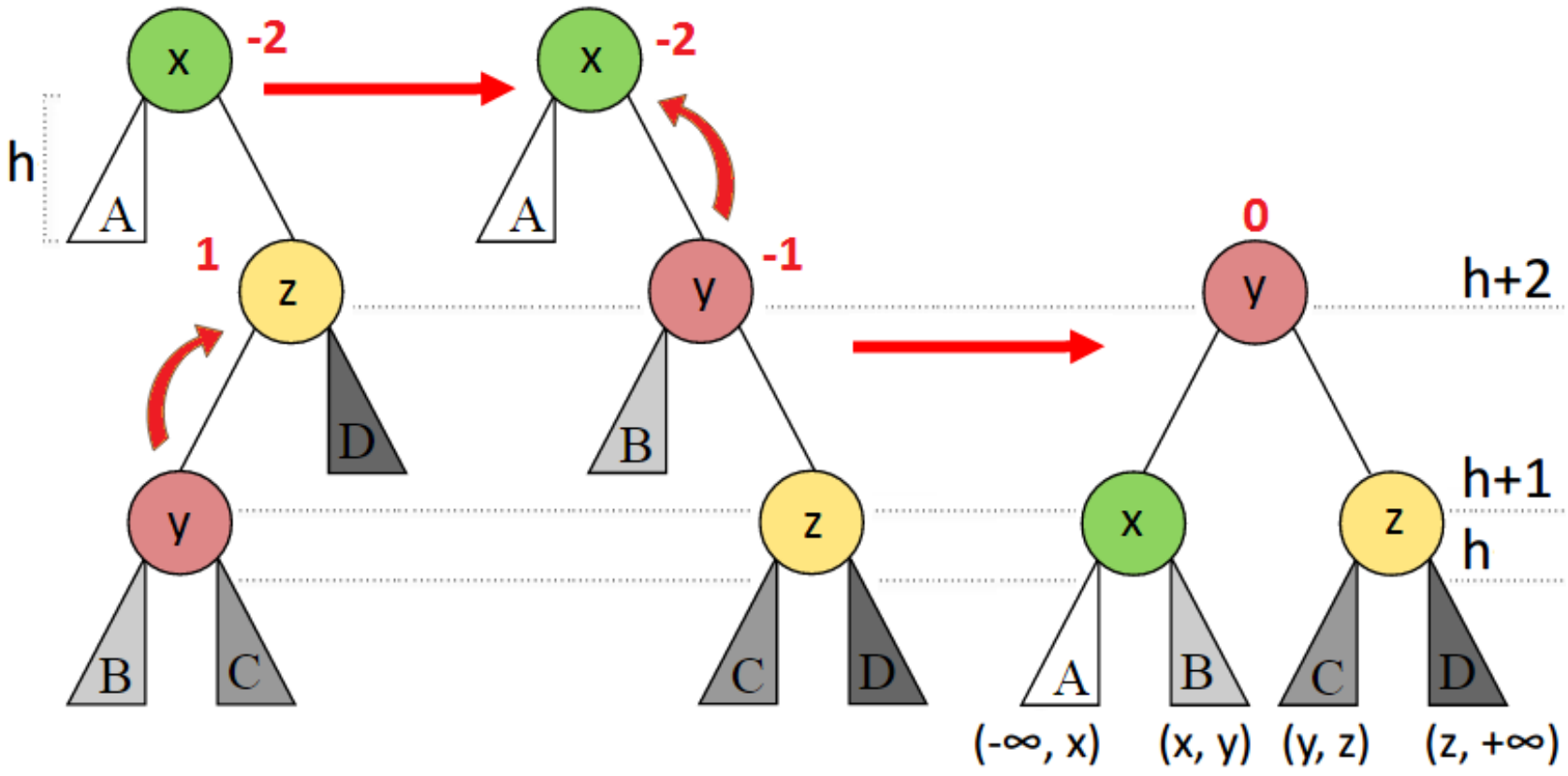
Exemplos Rotação Dupla à Direita - Caso LR

- O desbalanceamento está à esquerda-direita: o nó desbalanceado tem FB=2 e o filho esquerdo FB=-1 (sinal inverso ao do pai!)
- O neto que está à esquerda-direita é "movimentado" duas vezes: primeiro à esquerda e depois à direita



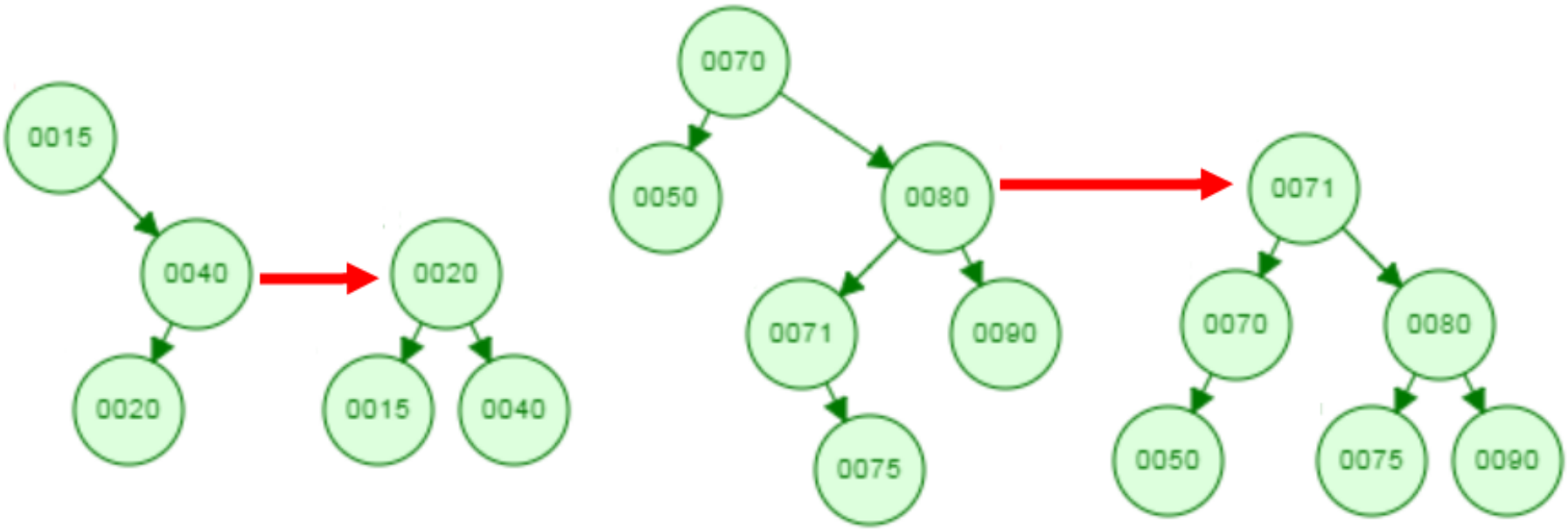
Rotação Dupla à Esquerda - Caso RL

- O desbalanceamento está à direita-esquerda
- Duas rotações simples: 1ra à direita; 2da à esquerda



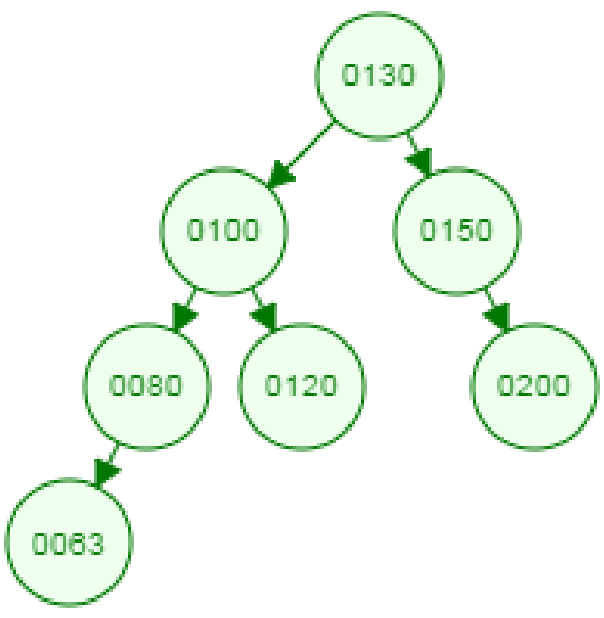
Exemplos Rotação Dupla à Esquerda - Caso RL

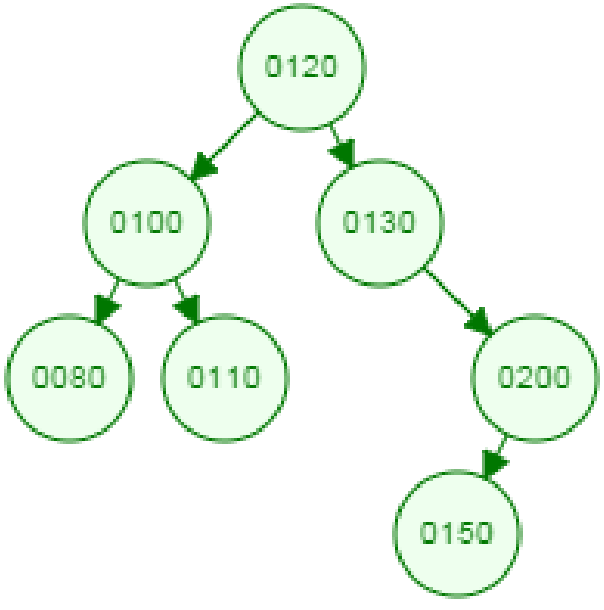
- O desbalanceamento está à direita-esquerda: o nó desbalanceado tem FB=-2 e o filho direito FB=1 (sinal inverso ao do pai!)
- O neto que está à direita-esquerda é "movimentado" duas vezes: primeiro à direita e depois à esquerda

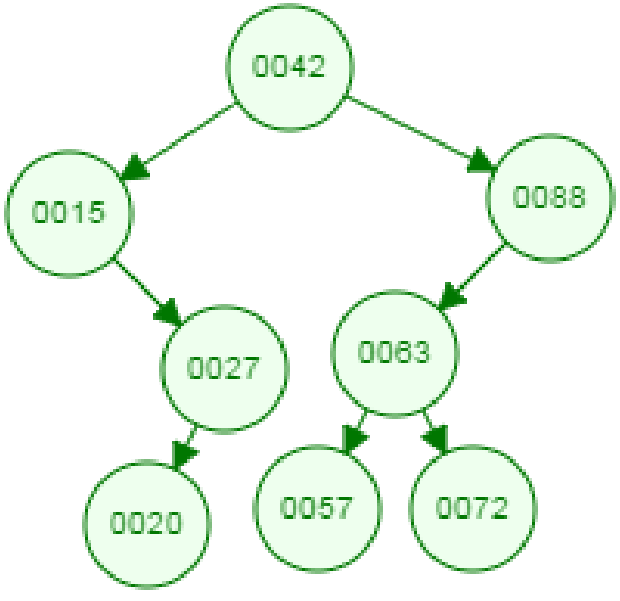


Exercício: Rotações

Balanceie as ABBs não AVL abaixo usando rotações apropriadas

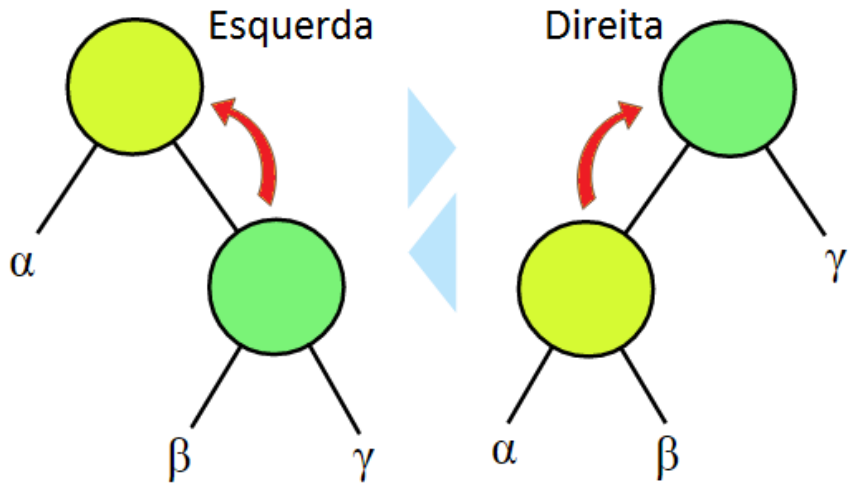






Resumo Rotações

- São simétricas



- Nas simples, o nó não balanceado tem FB com o mesmo sinal do filho mais alto ("simétrico" à rotação). São aplicadas no sentido inverso à maior altura
- Nas duplas, o nó não balanceado tem FB o sinal inverso do filho mais alto ("simétrico" à rotação). São compostas por uma rotação simples e a simétrica.

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

Referências Bibliográficas

Apêndice

Inserção nas Árvores AVL

Caso 1 A nova chave foi inserida na subárvore de menor altura $\Rightarrow$ a altura **não** muda e a árvore fica balanceada

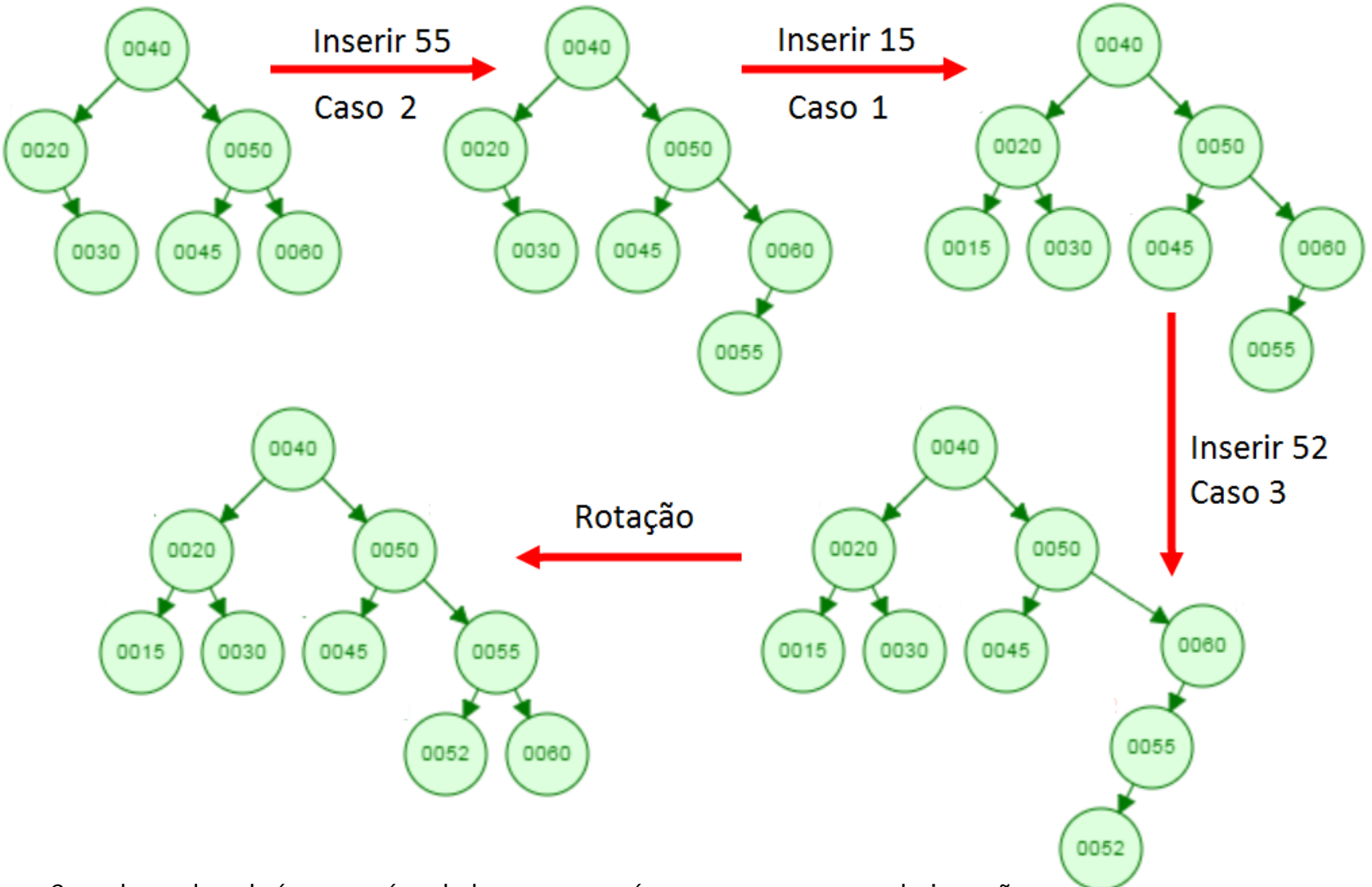
Caso 2 O nó tinha FB $= 0$ antes da inserção $\Rightarrow$ atualizar a altura. É preciso conferir a condição AVL dos antecessores

Caso 3 A nova chave foi inserida na subárvore de maior altura (direita ou esquerda resp) $\Rightarrow$ efetuar a rotação. Não é preciso conferir o balanceamento dos antecessores

Exemplo: Inserir as seguintes chaves numa árvore AVL:
40, 20, 50, 30, 45, 60, 55, 15, 52

Ver animação em AVL Tree Visualization

Exemplo de Inserções nas Árvores AVL



No caso 3, a altura da sub-árvore após o balanceamento é a mesma que antes da inserção

Algoritmo de Inserção nas Árvores AVL

1. Inserir o nó da mesma forma que nas ABBs
2. No caminho de volta até a raíz
   - 2.1 atualizar a altura de cada nó **n**,
   - 2.2 checar se não cumpre a condição AVL
   - 2.3 rotacionar de forma apropriada

Exemplo de Implementação - Inserção AVL

```
Node* inserirElemento(int valor, Node *raiz) {
    // insercao na ABB -- versao recursiva
    if (raiz==NULL) {
        Node *novo   = (Node *) malloc(sizeof(Node));
        novo->data   = valor;
        novo->left   = novo->right  = NULL;
        novo->height = 0;
        return novo;
    }

    if (valor == raiz->data)
        return raiz;
    else {
        if (valor < raiz->data)
            raiz->left  = inserirElemento(valor, raiz->left);
        else
            raiz->right = inserirElemento(valor, raiz->right);
    }
```

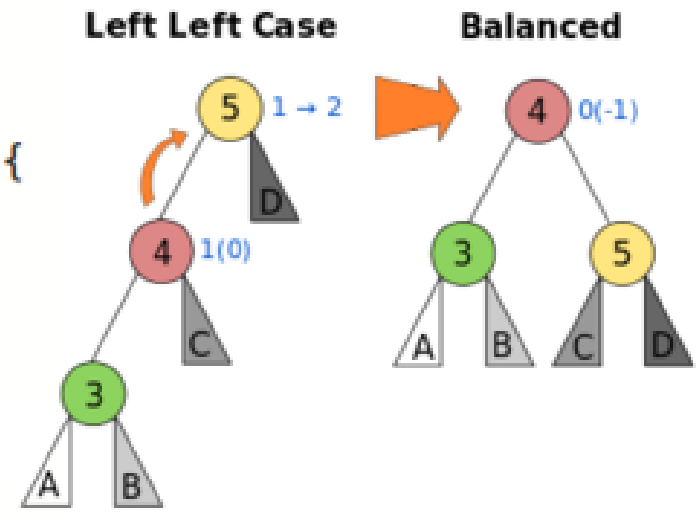
Código do Prof. Jesús.

Exemplo de Implementação - Inserção AVL

```
// atualizacao da altura do Node antecessor
raiz->height = 1 + max( altura(raiz->left), altura(raiz->right) );

// fator de balanceamento
int fb = fatorDeBalanceamento(raiz);

// Caso LL:
if ( fb>1  && valor < raiz->left->data) {
    printf("\n* Rotacao LL");
    return rotacaoADireita(raiz);
}
```




```
// Caso RR:
if ( fb<-1 && valor > raiz->right->data) {
    printf("\n* Rotacao RR");
    return rotacaoAEsquerda(raiz);
}
```

Código do Prof. Jesús.

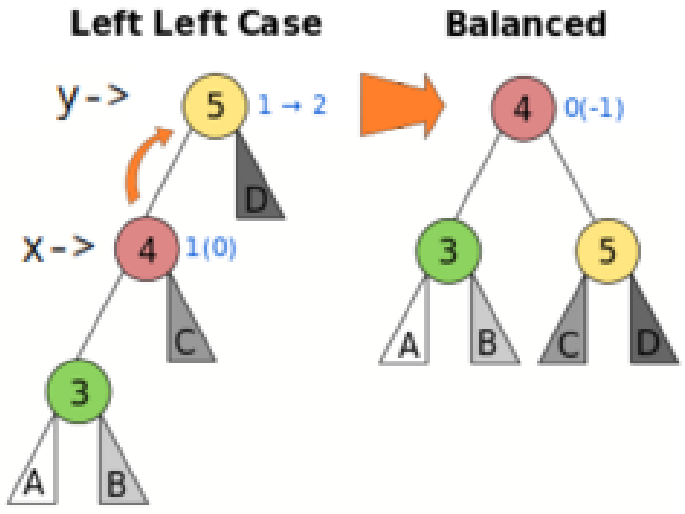
Exemplo de Implementação - Inserção AVL - Rotação SD

```
Node* rotacaoADireita(Node* y) {
    Node* x  = y->left;
    Node* T2 = x->right;

    // rotacao
    x->right = y;
    y->left  = T2;

    // atualizacao de altura
    y->height = 1 + max( altura(y->left) , altura(y->right) );
    x->height = 1 + max( altura(x->left) , altura(x->right) );

    return x;
}
```



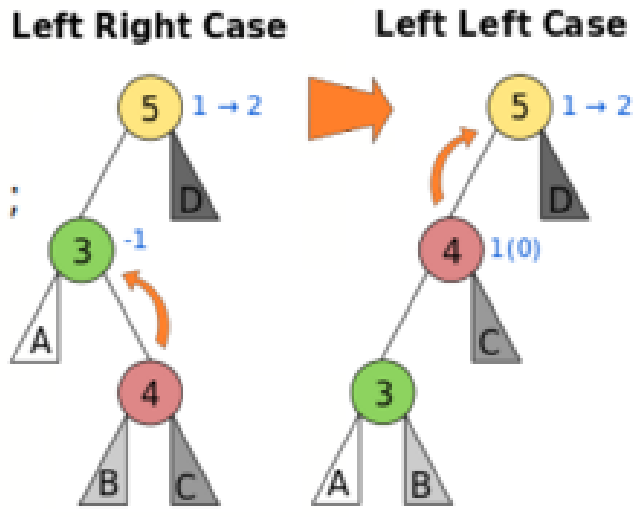
Código do Prof. Jesús.

Exemplo de Implementação - Inserção AVL

```
    // Caso LR:
    if ( fb>1  && valor > raiz->left->data) {
        printf("\n* Rotacao LR");
        raiz->left = rotacaoAEsquerda(raiz->left);
        return rotacaoADireita(raiz);
    }

    // Caso RL:
    if ( fb<-1 && valor < raiz->right->data) {
        printf("\n* Rotacao RL");
        raiz->right = rotacaoADireita(raiz->right);
        return rotacaoAEsquerda(raiz);
    }

    return raiz;
}
```



Código do Prof. Jesús.

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

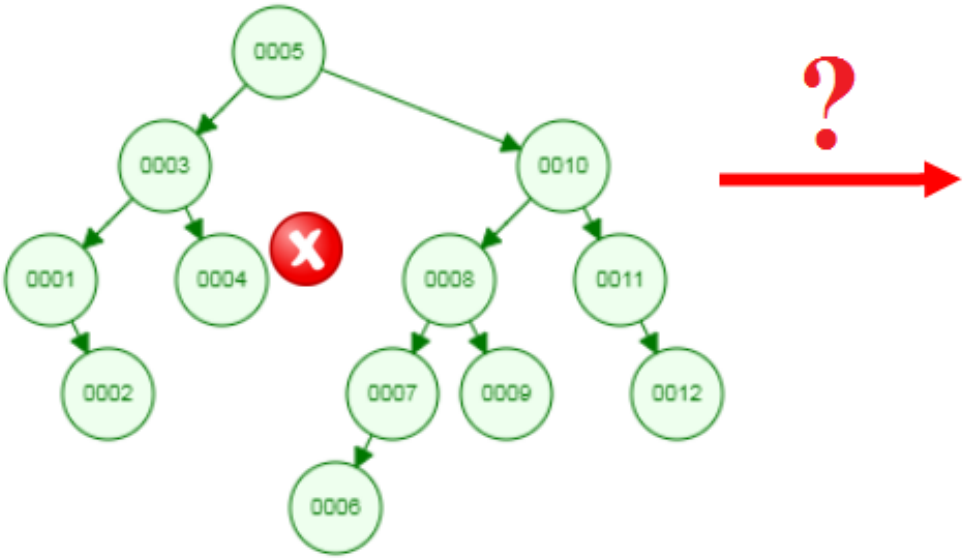
Referências Bibliográficas

Apêndice

Remoção nas Árvores AVL

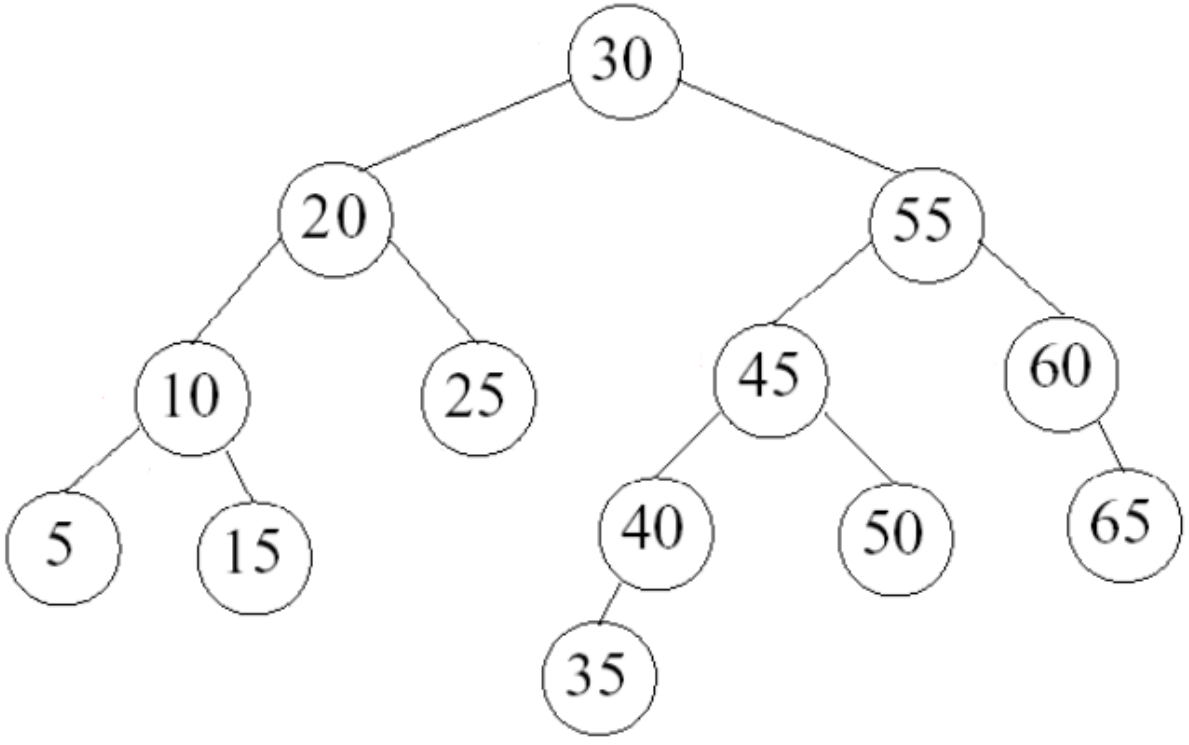
Remover o nó da mesma forma que nas ABBs. No caminho de volta desde o pai da **folha removida** até a raiz, atualizar a altura de cada nó **n**, checar se não cumpre a condição AVL e rotacionar

- O fator de balanceamento pode mudar
- A árvore pode diminuir sua altura
- Pode ser necessário rotacionar todos os nós no caminho de volta!



Exercícios: Remoção nas Árvores AVL

1. Remova da árvore AVL abaixo as seguintes chaves: 5, 20, 50 nesta ordem.



2. Escreva uma função para remover uma chave de uma árvore AVL.

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

Referências Bibliográficas

Apêndice

Conclusões - Árvores AVL

- A altura de uma árvore AVL é aproximadamente igual a $1.44 * \log_2 n$ onde n é o número de nós da árvore.
- O balanceamento usa transformações simples, locais, simétricas, de custo constante
- As operações de busca e inserção tem custo $O(\log_2 n)$ no caso médio e também no caso pior

Técnica	Ordem	Busca	Inserção	Remoção
Busca Sequencial	Não	N	N	N
Busca Binária	Sim	log(N)	N	N
ABB	Sim	h	h	h
AVL	Sim	log(N)	log(N)	log(N)

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Conclusões - Árvores AVL

Técnica	Ordem	Busca	Inserção	Remoção
Busca Sequencial	Não	N	N	N
Busca Binária	Sim	log(N)	N	N
ABB	Sim	h	h	h
AVL	Sim	log(N)	log(N)	log(N)

- Inserção simples, após inserir **basta uma rotação para tornar a árvore AVL**
- A remoção **pode precisar** $\log n$ **rotações**
- Precisa armazenar a altura ou o fator de balanceamento (no mínimo mais dois bits por nó)

Conclusões - Árvores AVL

Técnica	Ordem	Busca	Inserção	Remoção
Busca Sequencial	Não	N	N	N
Busca Binária	Sim	log(N)	N	N
ABB	Sim	h	h	h
AVL	Sim	log(N)	log(N)	log(N)

- Inserção simples, após inserir **basta uma rotação para tornar a árvore AVL**
- A remoção **pode precisar** $\log n$ **rotações**
- Precisa armazenar a altura ou o fator de balanceamento (no mínimo mais dois bits por nó)

Dá para melhorar? Sim, árvores preto-vermelho

Agenda

Introdução
Árvores AVL
Análise das Árvores AVL
Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações
Inserção nas Árvores AVL
Remoção nas Árvores AVL
Conclusões
Complexidade das Estruturas de Dados
Referências Bibliográficas
Apêndice

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Complexidade de algumas Estruturas de Dados

Data Structure	Time								Space
	Average				Worst				Worst
	Access	Search	Insertion	Deletion	Access	Search	Insertion	Deletion	
Array	Θ(1)	Θ(n)	Θ(n)	Θ(n)	O(1)	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)
Stack	Θ(n)	Θ(n)	Θ(1)	Θ(1)	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
Queue	Θ(n)	Θ(n)	Θ(1)	Θ(1)	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
Singly-Linked List	Θ(n)	Θ(n)	Θ(1)	Θ(1)	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
Doubly-Linked List	Θ(n)	Θ(n)	Θ(1)	Θ(1)	O(n)	O(n)	O(1)	O(1)	O(n)
Skip List	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)	O(n log(n))
Hash Table	N/A	Θ(1)	Θ(1)	Θ(1)	N/A	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)
Binary Search Tree	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)
Cartesian Tree	N/A	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	N/A	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)
B-Tree	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(n)
Red-Black Tree	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(n)
Splay Tree	N/A	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	N/A	O(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(n)
AVL Tree	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(log(n))	O(n)
KD Tree	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	Θ(log(n))	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)	O(n)

http://bigocheatsheet.com/

Agenda

Introdução
Árvores AVL
Análise das Árvores AVL
Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações
Inserção nas Árvores AVL
Remoção nas Árvores AVL
Conclusões
Complexidade das Estruturas de Dados
Referências Bibliográficas
Apêndice

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Referências Bibliográficas

- Donald Knuth. The Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching, 3rd Ed., Addison-Wesley, 1997, pages 458-475, section 6.2.3: Balanced Trees.
- Jayme L. Szwarcfiter and Lilian Markezon, Estruturas de Dados e seus Algoritmos, 3ra edição, 2010
- Don Spickler, Tutorial AVL TREES
- Wikipedia: AVL tree, Red-black tree, B tree
- AVL Tree Visualization

  https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html

Universidade Federal do ABC

CMCC Centro de Matemática, Computação e Cognição

Agenda

Introdução

Árvores AVL

Análise das Árvores AVL

Balanceamento nas Árvores AVL - Rotações

Inserção nas Árvores AVL

Remoção nas Árvores AVL

Conclusões

Complexidade das Estruturas de Dados

Referências Bibliográficas

Apêndice

Outro Exemplo de Implementação - Inserção AVL

```
void avlInsert(avlTreeNode **treeRoot,  int key) {
  if (*treeRoot == NULL) {

    // update the root to point at a new Node
    avlTreeNode *newNode = malloc(sizeof(avlTreeNode));
    *treeRoot = newNode;

    if (!newNode)
        return;

    newNode->key = key;
    newNode->left = newNode->right = NULL;
    newNode->height = 0;
    return;
  }

  if (key == (*treeRoot)->key)
    return;
```

Ver código aqui.

Outro Exemplo de Implementação - Inserção AVL

```
avlTreeNode *tree = *treeRoot;

if (key < tree->key) { // recursively move to the left
  avlInsert(&tree->left, key);

  // check if the tree must be updated
  if (balanceFactor(tree) == 2) {
    // inserted in the left from node was already heavy on the left

    if (key < tree->left->key)
      caseLLrotateRight(&tree);
    else caseLRrotateLeftRight(&tree);
  }
  else updateHeight(tree);
}
```

Ver código aqui.

Outro Exemplo de Implementação - Inserção AVL

```
else { // otherwise recursively move right
  avlInsert(&tree->right, key);

  if (balanceFactor(tree) == -2) {

    if (key > tree->right->key)
      caseRRrotateLeft(&tree);
    else caseRLrotateRightLeft(&tree);
  }
  else updateHeight(tree);
}

*treeRoot = tree;
}
```

Ver código aqui.