Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Análise na Reta (2017) – Curso de Verão

Lista L1 — Preliminares

Observações:

- Esta lista corresponde a um conjunto de exercícios selecionados pelo professor, que servirão de complemento às aulas.
- Apenas alguns dos exercícios serão eventualmente resolvidos em sala de aula. Eventuais dúvidas que surjam na resolução dos restantes deverão ser sanadas *a posteriori*.
- Ao resolver os exercícios desta lista tente justificar todos os passos que realizou até chegar à solução final.

I. Conjuntos e Funções

1. Para quaisquer conjuntos A, B e C mostre que:
   (a) Se A^c é o complementar de A, então A é o complementar de A^c (i.e. $(A^c)^c = A$).
   (b) Se $A \subseteq B$, então $B^c \subseteq A^c$.
   (c) São válidas as leis de Morgan
   $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ \& } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$
   (d) São válidas as propriedades distributivas
   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ \& } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
   (e) $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são conjuntos disjuntos. Adicionalmente, são válidas as seguintes partições de conjuntos:
   $$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \text{ \& } A \cup B = B \cup (A \cap B^c).$$
2. Para três conjuntos A, B e C, suponha que $A \cap B \neq \emptyset$ e $A \cap C \neq \emptyset$.
   (a) Mostre que se A é um conjunto com um único elemento, então $B \cap C \neq \emptyset$.
   (b) Para o caso de A ser um conjunto de dois elementos, encontre um exemplo de três conjuntos A, B e C, nas condições do enunciado, para os quais a condição $B \cap C = \emptyset$ se verifica.
3. Para dois conjuntos A e B, mostre que $A \times B = B \times A$ se e só se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$.

4. Mostre que para os conjuntos A, B, C e D não vazios, valem as seguintes propriedades:
   (a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
   (b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
   (c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
   (d) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \times C) \cup (B \times D)$.

5. Para os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, diga justificando se podemos definir um função $f : A \to B$ partir dos seguintes subconjuntos de $A \times B$. Em caso afirmativo, determine todas as possibilidades para conjunto imagem $f(X)$ ($X \in \mathcal{P}(A)$) e conjunto pré-imagem $f^{-1}(Y)$ ($Y \in \mathcal{P}(B)$).
   (a) $G = \{(1, 5), (2, 4), (3, 5)\}$.
   (b) $H = \{(1, 5), (2, 4), (1, 6)\}$.

6. Sabendo que o conjunto $F = \{(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \ : \ n \leq x < n + 1\}$, define uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$:
   (a) Determine o valor de $f(x)$ nos pontos $x = -0.4$, $x = -0.5$, $x = 1.1$, $x = 2$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = e$ (e denota o número de Neper).
   (b) Calcule os conjuntos pré-imagem $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{0, 1\})$ e $f^{-1}(\{0, 2\})$.
   (c) Determine, caso exista, um subconjunto $A \times \mathbb{Z}$ de F para o qual se pode definir uma função $g : A \to \mathbb{Z}$ com a propriedade $g(A) = A$.
   (d) Dê um exemplo um subconjunto $\mathbb{R} \times B$ de F para o qual se pode definir uma função $g : \mathbb{R} \to B$ que satisfaça a propriedade $g^{-1}(B) \subseteq B$.

7. Para as funções $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definidas pontualmente por $g(x) = 2x - 3$ e $f(n) = n^2 - 4n + 1$.
   (a) Determine a composição $gof : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.
   (b) Determine o conjunto pré-imagem $(gof)^{-1}(\{-1\}) = \{n \in \mathbb{Z} \ : \ (gof)(n) = -1\}$.
   (c) Dê um exemplo de $k \in \mathbb{Z}$ para o qual se verifica a igualdade $(gof)^{-1}(\{k\}) = \emptyset$.

8. Diga, justificando, se as expressões algébricas $\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ e $\frac{x}{x+2}$ definem a mesma função
   $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$.

9. Demonstre as seguintes propriedades de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras:
   (a) Uma função $f : X \to Y$ é injetora se e só se existe uma função $g : Y \to X$ tal que $gof : X \to X$ é igual à função identidade em X
   (i.e. $g(f(x)) = x$, para todo o $x \in X$).
   (b) Uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora se e só se existe uma função $g : Y \to X$ tal que $fog : Y \to Y$ é igual à função identidade em Y
   (i.e. $f(g(y)) = y$, para todo o $y \in Y$).
   (c) Uma função $f : X \to Y$ admite inversa $f^{-1} : Y \to X$ se e só se $f : X \to Y$ for uma função bijetora (i.e. injetora e sobrejetora).

10. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ definida pontualmente por $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$.

   (a) Mostre que $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ é injetora.

   (b) Mostre que $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetora.

   (c) Determine o conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ para o qual a função $g : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to B$ definida pontualmente por $g(x) = f(x)$.

II. **Conjuntos Indutivos**

11. Suponha que as igualdades abaixo são verdadeiras[1]:

$$1 + 5 = 6, \quad 2 + 6 = 14 \quad \& \; 3 + 7 = 24.$$

   (a) Calcule de forma indutiva o valor das seguintes somas: $5 + 9$, $6 + 10$ e $7 + 11$.

   (b) Use o *princípio de indução matemática* para determinar uma fórmula geral que nos permita calcular indutivamente o valor da soma $n + (n + 4)$, para qualquer n natural.

12. Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $s(n) = n + 1$.

   (a) Calcule as seguintes funções compostas: $sos : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $sosos : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $sososos : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

   (b) Use o *princípio de indução matemática* para determinar, para todo o m natural, uma fórmula geral para calcular a função composta s^m:

$$s^m(n) := \underbrace{(soso\ldots os)}_{m \text{ vezes}}(n).$$

13. De acordo com a *axiomática de Peano*, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pode ser construído indutivamente, com base nos axiomas **A1**,**A2** e **A3**:

   A1: Se n é um número natural, então o *sucessor de* n, definido por $s : n \mapsto n + 1$, também é um número natural.

   A2: O conjunto $\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$ tem um único elemento, i.e. existe um único número natural n_1 que não é sucessor de nenhum outro.

   A3: Se $M \subseteq \mathbb{N}$ é um conjunto tal que $n_1 \in (\mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})) \cap M$, e para todo o $n \in M$ se tem que $s(n) \in M$, então $M = \mathbb{N}$.

[1] Adaptação de uma pergunta de um teste de QI, nível 2.

Assumindo que os axiomas **A1**,**A2** e **A3** são verdadeiros, resolva os seguintes items:

(a) Supondo que a igualdade $0+0=0$ é verdadeira, mostre que a igualdade $n+0=n$ se verifica para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Diga, justificando, se também podemos demonstrar a igualdade $0+n=n$.

(b) Use o *princípio de indução matemática* para demonstrar que para quaisquer dois elementos m e n de $\mathbb{N}$, se verifica a igualdade $m+n=n+m$.

(c) Mostre que se $0.5 \in \mathbb{N} \setminus s(\mathbb{N})$, então o conjunto numérico $M = \{0.5, 1.5, 2.5, \ldots\}$ coincide com o conjunto $\mathbb{N}$. Mostre ainda que 5.5 é um elemento de $\mathbb{N}$.

(d) Diga justificando porque de acordo com a construção indutiva considerada em c), o número 6 não pode ser considerado um número natural.

14. Faça uso dos os axiomas **A1**,**A2** e **A3**, mencionados no exercício 13. para demonstrar que a propriedade (*associatividade da soma*)

$$m + (n+p) = (m+n) + p$$

é verdadeira para todos os $m, n, p \in \mathbb{N}$.

15. Use o *princípio de indução matemática* para resolver os seguintes itens:

(a) Se a função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pontualmente por $s(n) = n+1$ denota a *função sucessor*, mostre que o conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N} \ : \ s(n) \neq n\}$$

é igual a $\mathbb{N}$.

(b) Mostre que os conjuntos numéricos $A = \{2n+1 \ : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ e $B = \{2n-1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ são iguais.

(c) Para quaisquer n conjuntos da forma $A_1, A_2, \ldots, A_n$, vale a seguinte generalização das *leis de Morgan*:

$$\begin{aligned} (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c &= A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c \\ (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c &= A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c. \end{aligned}$$

(d) Para quaisquer $n+1$ conjuntos da forma $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, vale a seguinte generalização das *leis de distributividade*:

$$\begin{aligned} B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) &= (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \ldots (B \cup A_n) \\ B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n). \end{aligned}$$

(e) Use a propriedades $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ &
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ para mostrar que as igualdades

$$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \& \quad \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^{n+1}$$

são verdadeiras para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(f) Use a propriedade $2^{ab} = (2^a)^b$ para mostrar que a igualdade

$$1 + 2^x + 2^{2x} + \ldots + 2^{(n-1)x} = \frac{2^{nx} - 1}{2^x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(g) Use as propriedades $\log_3(ab) = \log_3(a) + \log_3(b)$ e $\log_3(a^b) = b\log_3(a)$ para mostrar que a igualdade

$$\log_3(x) + \log_3(x^2) + \ldots + \log_3(x^n) = \frac{n(n+1)}{2}\log_3(x) \quad (x > 0)$$

é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(h) Para o caso do soma dos n primeiros números naturais de uma sequência numérica ser determinada pelas relações
$S_1 = 1$, $S_2 = 3$ e $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n$ $(n \in \mathbb{N})$, mostre que a fórmula

$$S_n = 2^n - 1$$

é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(i) Mostre que os *números de Fibonacci*[2], definidos recursivamente por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$, satisfazem para todo o $n \in \mathbb{N}$ as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \ldots + F_n &= F_{n+2} + 1 \\ F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

16. A formulação elementar do *Princípio da Casa dos Pombos* (en: *Pigeonhole Principle*) corresponde ao seguinte enunciado[3]:

"Se tivermos 3 pombos para colocar em 2 casas, então uma das casas irá ter pelo menos 2 pombos."

Represente por A o conjunto dos pombos e por B o conjunto das casas.

(a) Use a representação em diagrama sagital para mostrar que o *Princípio da Casa dos Pombos* é equivalente a provar que é impossível construir uma função injetora de domínio A e contradomínio B.

(b) Mostre que para todo o n natural, é impossível construir uma função injetora de domínio A e contradomínio B, onde A representa um conjunto de $n + 1$ pombos e B o conjunto de n casas i.e. que pelo menos uma das casas irá ter pelo menos 2 pombos.

(c) Formule e demonstre o *Princípio da Casa dos Pombos* para um conjunto A de k elementos, e um B de n elementos.

---

[2]CURIOSIDADE: *números de Fibonacci* F_n podem ser calculados como a soma dos elementos da diagonal do triângulo de Pascal. A ilustração desta relação encontra-se ilustrada no *gif animado* http://professor.ufabc.edu.br/ nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2016/NumerosFibonacci.gif

[3]No *Exercise 3.6.10* (página 72), do livro *Analysis I, Second Edition* de Terrence Tao, pode encontrar uma formulação equivalente do *Princípio da Casa dos Pombos* (en: *Pigeonhole Principle*).

17. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ a função definida pontualmente por $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, e $f^n = fofo\ldots of$ composição da função f por ela própria, n vezes ($n \in \mathbb{N}$).

    (a) Determine $f^2 = fof$. O que pode concluir quanto a f? E quanto a f^n?

    (b) Mostre que a propriedade $f^n\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n f(x)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. O que pode concluir quanto à inversa da função definida pontualmente pela fórmula $f^n\left(\frac{1}{x}\right)$?

18. A função *sinal* é uma função real de variável real, denotada por $x \mapsto \mathrm{s}gn(x)$, que a cada número real faz corresponder os valores -1 (se $x < 0$), 0 (se $x = 0$) e 1 (se $x > 0$). No caso de considerarmos um subconjunto M de $\mathbb{R}$ com m elementos:

    (a) Dê um exemplo de um conjunto M para o qual a função $sgn : M \to \{-1, 0, 1\}$ é injetora.

    (b) Dê um exemplo de um conjunto M para o qual $sgn : M \to \{-1, 0, 1\}$ não é injetora.

    (c) Diga, justificando, se $sgn : M \to \{-1, 0, 1\}$ é sempre uma função sobrejetora.

    (d) Dê um exemplo de conjunto $M \neq \{-1, 0, 1\}$ para o qual $sgn : M \to \{-1, 0, 1\}$ é uma função bijetora.

    (e) Use o *princípio de indução matemática* para mostrar que existem $3^m - 1$ possibilidades de construir uma função $f : M \to \{-1, 0, 1\}$, que seja diferente da função $sgn : M \to \{-1, 0, 1\}$.

Última atualização: 15 de janeiro de 2017