**Universidade Federal do ABC**
**Centro de Matemática, Computação e Cognição**
**Análise na Reta (2017) – Curso de Verão**

# Lista L2 — Números Reais

**Observações:**

- Esta lista corresponde a um conjunto de exercícios selecionados pelo professor, que servirão de complemento às aulas.
- Apenas alguns dos exercícios serão eventualmente resolvidos em sala de aula. Eventuais dúvidas que surjam na resolução dos restantes deverão ser sanadas *a posteriori*.
- Ao resolver os exercícios desta lista tente justificar todos os passos que realizou até chegar à solução final.

## I. Revisão

1. Para quaisquer dois números $m$ e $n$, suponha que a igualdade $n^2 - m^2 = n + m$ é verdadeira.
   (a) Mostre que se $m$ e $n$ são números naturais, então $n = m + 1$.
   (b) Nas condições do enunciado, encontre um exemplo de dois números inteiros $m$ e $n$ para os quais a igualdade $n = m + 1$ não se verifica.

2. Use a *axiomática de Peano* para demonstrar que os conjuntos abaixo são iguais:
$$A = \{\cos((n+1)\pi) \ : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \quad \& \quad R = \{(-1)^n \ : n \in \mathbb{N}\}.$$

## II. Números Racionais e Irracionais

3. Seja $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $p < q$. Faça uso do *princípio de indução matemática* para demonstrar que
   (a) $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}$, para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
   (b) $\left(\frac{p}{q}\right)^n < 1$, para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

4. Seja $a \in \mathbb{R}^+$. Dizemos que $\sqrt[n]{a}$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) é um número irracional se a equação $x^n = a$ não admitir solução da forma $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ i.e.
$$\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^n = a\} = \emptyset.$$
   (a) Mostre que $\sqrt{3}$ é um número irracional
   **DICA:** Reformule a demonstração do *Lema de Pitágoras*, que se encontra demonstrado no livro *Curso de Análise, vol. 1* de Elon Lages Lima (veja Capítulo III, a partir da página 62)[1].

[1] A demonstração do *Lema de Pitágoras* corresponde à **Proposition 4.4.4.** do livro *Analysis I (Second Edition)* de Terrence Tao. A demonstração deste encontra-se nas páginas 90 & 91.

(b) O que podemos concluir acerca de $\sqrt[n]{p}$, para o caso de $p \in \mathbb{N}$ ser um número primo? Justifique a sua resposta, reformulando a demonstração obtida no item anterior.

(c) Reformule e demonstre o item anterior, para o caso de termos o produto entre dois números primos $p$ e $q$ (i.e. $pq$).

(d) Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é também um número irracional.

DICA: Assuma, por redução ao absurdo, que $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ é um número racional. Tente chegar a uma contradição, com base na irracionalidade de $\sqrt{6}$.

(e) Reformule e demonstre o item anterior para o caso de termos um número real da forma $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ são números primos.

5. Em termos de teoria de conjuntos, podemos definir o conjunto dos números irracionais como sendo o subconjunto $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ da forma $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

   (a) Diga, justificando, se $0$ (elemento neutro da adição) é um número racional ou irracional.

   (b) Se $a$ for um número irracional, será que $a$ admite inverso $a^{-1}$? Em caso afirmativo, o que podemos concluir acerca da (ir)racionalidade de $a^{-1}$?

   (c) Mostre que para todo o número primo $p$, se tem $\{x\sqrt{p} \ : \ x \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{I}$. O que pode concluir acerca da interseção $\{x\sqrt{p} \ : \ x \in \mathbb{Q}\} \cap \mathbb{Z}$?

## III. Desigualdades

6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Mostre que para todo o $0 < t < 1$ se tem

$$a < ta + (1-t)b < b.$$

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, e $\varepsilon > 0$. Mostre que $|a - b| < \varepsilon$ é equivalente a $b - \varepsilon < b < a + \varepsilon$.

8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, e $\varepsilon > 0$. Mostre que $|a - b| < \varepsilon$ implica $|b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon$.

   **DICA:** Use a desigualdade triangular $|x + y| \leq |x| + |y|$ para os casos **i)** $x = a$ e $y = b - a$; **ii)** $x = b$ e $y = a - b$.

9. Mostre que para todos os $x, y \in \mathbb{R}$ se tem a desigualdade $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.

   **DICA:** Use o binômio $(x - y)^2$.

10. Mostre que para todos os $x, y \in \mathbb{R}^+$, a seguinte desigualdade envolvendo a média aritmética de $x$ com $y$ $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, e a média geométrica de $x$ com $y$ $\left(\sqrt{xy}\right)$:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

   **DICA:** Use a equivalência $0 < a < 1 \Leftrightarrow (a^2 < 1 \text{ e } a \in \mathbb{R}^+)$ e a desigualdade demonstrada no exercício 9.

11. Considere o conjunto solução do sistema de inequações $x^2 < 7$ e $x > 0$.

    (a) Mostre que para todo o $\varepsilon > 0$ se tem a desigualdade $(x+\varepsilon)^2 \le x^2 + 7\varepsilon$.

    (b) Mostre que para todo o $\varepsilon > 0$ se tem a desigualdade $(x-\varepsilon)^2 \ge x^2 - 6\varepsilon$.

    **DICA:** Para resolver os dois items anteriores, reformule e demonstre as desigualdades que aparecem na prova da **Proposition 5.5.12** do livro *Analysis I (Second Edition)* de Terrence Tao[2] (página 119).

## IV. Supremo e Ínfimo de Conjuntos

12. Seja $X$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio, e $Y = \{2 - 3x \ : \ x \in X\}$.

    (a) Mostre que se $X$ é limitado superiormente, então $Y$ é limitado inferiormente. Adicionalmente, $\inf Y = 2 - 3\sup X$.

    (b) Mostre que se $X$ é limitado inferiormente, então $Y$ é limitado superiormente. Adicionalmente, $\sup Y = 2 - 3\inf X$.

13. Seja $X$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. Assuma que $\inf X > 0$.

    (a) Mostre que o conjunto $Y = \{x^2 \ : \ x \in X\}$ é limitado inferiormente. Adicionalmente, $\inf Y = (\inf X)^2$.

    (b) Enuncie e demonstre o resultado análogo para o conjunto $Z = \{-x^2 \ : \ x \in X\}$.

14. Sejam $X$ e $Y$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios.

    (a) Mostre que se $X$ e $Y$ são limitados superiormente, então o conjunto $X \cup Y$ também é limitado superiormente. Adicionalmente, $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

    (b) Mostre que se $X$ e $Y$ são limitados inferiormente, então o conjunto $X \cup Y$ também é limitado inferiormente. Adicionalmente, $\inf(X \cup Y) = \min\{\inf X, \inf Y\}$.

    **DICA:** Use as igualdades $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$ e $\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

15. Seja $\varepsilon > 0$, e $X$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio que satisfaz a seguinte propriedade

    $$\textbf{P:} \quad \forall_{x,y \in X} \ : \ |x - y| < \varepsilon.$$

    Mostre que nas condições do enunciado, se tem $\sup X - \inf X \le \varepsilon$.

16. Para dois subconjuntos $X$ e $Y$ de $\mathbb{R}$ não vazios, assuma que as seguintes hipóteses são satisfeitas:

    **H1.** $X$ é limitado superiormente.

    **H2.** $Y$ é limitado inferiormente.

    **H3.** $\forall\, x \in X, \forall y \in Y\ x \le y$.

[2] Terrence Tao, medalhista Fields em 2006, é conhecido na comunidade científica como o *Mozart da Matemática*. Para além de já ter escrito diversos livros, escreve regularmente no blog https://terrytao.wordpress.com/.

(a) Mostre que $\sup X \leq \inf Y$.

(b) Mostre que $\sup X = \inf Y$ é equivalente à propriedade **P**:

$$\textbf{P:} \quad \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{x\in X}\, \exists_{y\in Y} \;:\; y - x < \epsilon.$$

17. Suponhamos que $Y \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente e inferiormente, e que $X \subseteq Y$. Mostre que a sequência de desigualdades abaixo se verifica:

$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y.$$

18. Verifique se os conjuntos dados são limitados ou ilimitados. Determine, caso exista, o supremo e ínfimo de cada um dos conjuntos.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \;:\; -5 < x < \frac{2}{5}\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \;:\; -3 \leq x < 7\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \;:\; 25 \leq x^3 < 27\}$.

(d) $D = \{\frac{3}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$.

(e) $E = \left\{\sin(\frac{n\pi}{2}) \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$.

(f) $F = \left\{\frac{\sin(x)}{x} \;:\; x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right\}$.

**DICA:** Use a desigualdade[3] $\sin(x) \leq x \leq \tan(x), \forall_{0\leq x<\frac{\pi}{2}}$.

(g) $G = \left\{(-1)^n \frac{7n^2+2}{n^2+1} \;:\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$.

19. Encontre exemplos para os seguintes enunciados:

(a) Um conjunto $X$ limitado inferiormente, com $\inf X < 0$, tal que conjunto

$$Y = \{x^2 : x \in X\}$$

seja limitado superiormente.

(b) Um subconjunto de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ que não admita supremo, tampouco ínfimo em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(c) Dois conjuntos $X$ e $Y$, que satisfazem as hipóteses **H1.** e **H2.** do exercício 16., a desigualdade $\sup X \leq \inf Y$, mas $x \neq y$.

(d) Dois conjuntos $X$ e $Y$ não vazios, limitados inferiormente, tal que $\inf(X \cap Y) \neq \inf(X)$ e $\inf(X \cap Y) \neq \inf(Y)$.

[3] **EXERCÍCIO I** da figura http://professor.ufabc.edu.br/ nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2016/TeoremaConfrontoTrigonometricas.png.

20. Prove que:

    *"Para todo o $x \in \mathbb{R}$, existe um e um só $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$.*

    *Em particular, $n = \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função truncatura".*[4]

    **DICAS:** Proceda à demonstração para as seguintes situações:

    - Para o caso de $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, comece por provar, com recurso ao algoritmo de Euclides, que $n \in \mathbb{Z}$ é o cociente da divisão de $p$ por $q$.
    - Para o caso mais genérico (incluindo racionais e irracionais), considere prove que o conjunto $X = \{n \in \mathbb{Z} :\}$ é não vazio e limitado, para poder usar o argumento de completude. Posteriormente, prove que $n \in X$ implica que
      **i)** $n+1 > x$ (pela segunda condição de supremo de um conjunto)
      **ii)** Se existir um outro $m \in X$, então $m = n$.

21. Mostre que para todo o número racional positivo $\varepsilon$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$), existe um número racional não negativo $x$ ($x \in \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$) tal que $x^2 < 6 < (x+\varepsilon)^2$.

    **DICA:** Reformule a **Proposition 4.4.5** do livro *Analysis I (Second Edition)* de Terrence Tao[5] (página 91), tomando em linha de conta o resultado demonstrado no exercício 20.

22. A *propriedade Arquimediana*[6] sobre o corpo dos números reais tem a seguinte formulação:

    *"Para todos os $x, y \in \mathbb{R}^+$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$".*

    Use a *propriedade Arquimediana* para demonstrar o seguinte teorema por redução ao absurdo:

    *"Se existem três números reais $a, b$ e $c$ tal que $a \leq b \leq a + \frac{c}{n}$ se verifica para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $a = b$."*

23. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências[7] de números reais, limitadas superiormente e inferiormente.

    (a) Diga, justificando, porque razão os conjuntos $A_n = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B_n = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ são limitados superiormente e inferiormente.

    (b) Mostre que o conjunto $A_n - B_n := \{a_n - b_n : n \in \mathbb{N}\}$ é também limitado superiormente e inferiormente. Adicionalmente, mostre que

    $$\sup(A_n - B_n) \leq \sup(A_n) - \inf(B_n) \quad \inf(A_n - B_n) \geq \inf(A_n) - \sup(B_n).$$

24. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não negativos e $X_n = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^+$.

---

[4](Re)veja também o exercício 6. da **Lista L1-Preliminares**.

[5]Para saber um pouco mais sobre o autor, leia o artigo *The Singular Mind of Terry Tao*, publicado no *The New York Times Magazine* a 24 de julho de 2015.

[6]Este resultado é também conhecido na literatura por *Princípio de Arquimedes*.

[7]As notações $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são utilizadas para denotar as funções $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, respetivamente.

(a) Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente, então $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ forma a seguinte sequência de intervalos encaixados:

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \ldots$$

O que poderá concluir em relação à existência das quantidades $\sup X_n$ e $\inf X_n$?

(b) De modo análogo, mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente, então $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ forma a seguinte sequência de intervalos encaixados:

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$$

O que poderá concluir em relação à existência das quantidades $\sup X_n$ e $\inf X_n$?

**Última atualização:** 06 de janeiro de 2017