Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Análise na Reta (2017) – Curso de Verão

Lista L3 — Topologia da Reta

Observações:

- Esta lista corresponde a um conjunto de exercícios selecionados pelo professor, que servirão de complemento às aulas.
- Apenas alguns dos exercícios serão eventualmente resolvidos em sala de aula. Eventuais dúvidas que surjam na resolução dos restantes deverão ser sanadas *a posteriori*.
- Ao resolver os exercícios desta lista tente justificar todos os passos que realizou até chegar à solução final.

I. Sequências de Números Reais

ALGUMAS DEFINIÇÕES:

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais e* $X_n = \{x_m \ : \ m \in \mathbb{N} \text{ e } m \geq n\}$.
Definimos as quantidades $\liminf x_n$ *e* $\limsup x_n$ *como sendo*

$$\limsup x_n := \inf\{\sup X_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \quad \& \quad \liminf x_n := \sup\{\inf X_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Para a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consideremos adicionalmente as seguintes definições:

D1: Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b$. Adicionalmente $\limsup x_n \in \mathbb{R}$.

D2: Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq a$. Adicionalmente $\liminf x_n \in \mathbb{R}$.

D3: Dizemos que $\limsup x_n = +\infty$ se o conjunto X_n não é limitado superiormente.

D4: Dizemos que $\liminf x_n = -\infty$ se o conjunto X_n não é limitado inferiormente.

D5: Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $x \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, se e somente se

$$\forall_{\epsilon>0} \, \exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}} \ : \ \forall_{n\in\mathbb{N}} \, n > n_\varepsilon \implies |x_n - x| < \varepsilon$$

D6: Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se e somente se

$$\forall_{\epsilon>0} \, \exists_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}} \ : \ \forall_{m,n\in\mathbb{N}} \ : \ m, n > n_\varepsilon \implies |x_m - x_n| < \varepsilon$$

1. Reformule e demonstre o **exercício 22.** da **Lista L2-Números Reais** em termos das noções de $\liminf$ & $\limsup$.

2. No caso de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazer a definição $\mathbf{D5}$ diga, justificando, qual a relação entre $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} |x_n - x|$.

3. Determine $\limsup x_n$ e $\liminf x_n$ para as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por[1].

   (a) $x_n = \frac{2^n}{3^n}$

   (b) $x_n = \frac{(-2)^n}{3^n}$

   (c) $x_n = \frac{3}{n}$

   (d) $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

   (e) [2] $x_n = (-1)^n \frac{7n^2+1}{n^2+1}$

   (f) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

   (g) [3]$x_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

   DICAS:

   - Para os casos em que $x_n > 0$, procure via o teste do cociente $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ averiguar se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente ou decrescente.
   - Para os casos em que aparecem termos de forma $(-1)^n$, faça uso da igualdade de conjuntos
   $$X_n = X_{2n-1} \cup X_{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$$
   e do resultado enunciado no **exercício 14.** da **Lista L2-Números Reais**.

4. Prove que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se e somente se $\liminf x_n = \limsup x_n = x$ i.e.[4]
$$\mathbf{D5} \iff \liminf x_n = \limsup x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

5. Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se e somente se é uma sequência de Cauchy i.e.
$$\mathbf{D6} \Longleftrightarrow \mathbf{D5}.$$

   DICA: Faça uso da desigualdade triangular $|a+b| \leq |a| + |b|$ para $a = x_m - x$ e $b = x - x_n$.

[1] **DICA EXTRA:** Resolva em paralelo o **exercício 16.** da **Lista L2-Números Reais**

[2] **DICA EXTRA:** Procure, via divisão de polinômios, obter uma simplificação de $\frac{7n^2+1}{n^2+1}$.

[3] **DICA EXTRA:** Faça uso da desigualdade $x > \ln(1+x)$, $\forall_{x>-1}$.

[4] A técnica de prova a utilizar neste tipo de exercício é, em muito, semelhante à técnica de prova necessária para a resolução do **item 16.(b)** da **Lista L2-Números Reais**.

6. Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então o conjunto $X_n = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado i.e.

$$\mathbf{D6} \implies X_n \text{ é majorado e minorado.}$$

DICA: Procure fazer dois tipos de demonstração distintos. No primeiro caso, faça uso da desigualdade triangular $|a| \leq |a-b|+|b|$ para $a = x_n$ e $b = x_{n_\epsilon}$ ($m = n_\epsilon$). No segundo caso, procure fazer uso do que aprendeu com a resolução do **exercício 15** da **Lista L2-Números Reais**.

II. Intervalos

DEFINIÇÃO:

Dizemos que um conjunto I é um intervalo de $\mathbb{R}$ se satisfaz a seguinte propriedade:

$$\mathbf{P} :\forall_{a,b\in I} \ \exists_{c\in\mathbb{R}} \ : \ (a < c < b \implies c \in I)$$

7. Averigue se os conjuntos dados são intervalos de $\mathbb{R}$.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 6\}$

   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 6\}$

   (c) $C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 > 6\}$

   (d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \left|x - \frac{p}{q}\right| < \varepsilon\right\}$ ($\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$ elementos fixos).

   (e) $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (números irracionais).

8. Determine o conjunto solução para as inequações dadas. Averigue se para cada um dos casos, o conjunto solução forma um intervalo.

   (a) $|x+1| < |x-1|$

   (b) $|x| + |x-1| < 2$

   (c) $\frac{x+1}{x-1} < 1$

   (d) $\frac{x+1}{x-1} < 2$

   (e) $\text{arcos}(x) > \frac{\pi}{4}$

III. **Conjuntos Abertos e Fechados**[5]

DEFINIÇÕES:

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio.

Ponto aderente: Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um ponto aderente de X se existir um conjunto $X_n = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, formado pela sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Ponto de acumulação: Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X se satisfaz a a propriedade $\mathbf{Ac}$

$$\mathbf{Ac}: \ \ \forall_{\varepsilon>0} \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Conjunto Aberto: Dizemos que X é aberto se satisfaz a propriedade $\mathbf{Ab}$

$$\mathbf{Ab}: \ \ \forall_{x\in X} \ \ \exists_{\delta>0} \ \ ]x-\delta, x+\delta[\ \subseteq X.$$

Conjunto Fechado: Dizemos que X é fechado se o conjunto de todos os pontos aderentes de X, $\overline{X}$, é um ponto de X i.e.

$$X = \overline{X}.$$

9. Demonstre as seguintes afirmações:
   (a) Conjuntos da forma $\{x\}$ são sempre conjuntos fechados.
   (b) Conjuntos da forma $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ são sempre conjuntos abertos.
   (c) Os intervalos da forma $]a, b[$ ($a < b$) são abertos.
   (d) Os intervalos da forma $[a, b]$ ($a < b$) são fechados.
   (e) Os intervalos da forma $]a, b]$ e $[a, b[$ não são abertos nem fechados.

10. Determine o fecho de cada um dos conjuntos dados no **exercício 7.**

11. Para dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, X e Y, respetivamente:
   (a) Prove[6] que $\text{int}(X \cup Y) \supseteq \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$
   (b) Prove[7] que $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$
   (c) Prove[8] que $\mathbb{R} \setminus \text{int}(X) = \overline{\mathbb{R} \setminus X}$ e que $\mathbb{R} \setminus \overline{X} = \text{int}(\mathbb{R} \setminus X)$.
   (d) Enuncie e demonstre um resultado análogo para os conjuntos $\text{int}(Y) \setminus \text{int}(X)$, $\text{int}(Y \setminus X)$, $\overline{Y \setminus X}$ e $\overline{Y} \setminus \overline{X}$.
   (e) Prove que se $X \subseteq Y$ e Y é um conjunto fechado, então $\overline{X} \subseteq Y$.

[5] Os exercícios desta seção são muito semelhantes aos exercícios que pode encontrar no **Capítulo 5** do livro *Análise Real, volume 1- Funções de uma variável*, de Elon Lages Lima.

[6] Esta inclusão é imediata por definição, e pelas inclusões $X \subseteq X \cup Y$ & $Y \subseteq X \cup Y$.

[7] A inclusão $\text{int}(X \cap Y) \supseteq \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$é imediata por definição, e pelas inclusões $X \cap Y \subseteq X$ & $X \cap Y \subseteq Y$.

[8] Procure demonstrar este resultado sem recorrer à seguinte propriedade:
'Um conjunto é aberto se e somente se o seu complementar é um conjunto fechado'.

DICA: Para realizar grande parte das demonstrações do **exercício 11.**, use os dois primeiros itens do **exercício 1.** da **Lista L1 – Preliminares**).

12. Construa exemplos para os seguintes enunciados:

    (a) Dois conjuntos X e Y para os quais se verifica $\text{int}(X \cup Y) \neq \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$.

    (b) Um conjunto limitado de números reais com três pontos de acumulação.

    (c) Uma sequência de conjuntos fechados, não vazios, para os quais se verifica

    $$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq \ldots$$

    mas $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

13. Seja Z um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Dizemos que Z é uma *cisão*[9] se existirem dois subconjuntos $X, Y \subseteq Z$ tais[10] que $Z = X \cup Y$ e $X \cap \overline{Y} = \overline{X} \cap Y = \emptyset$.

    (a) Mostre que se Z é aberto, então X e Y são também abertos.

    (b) Enuncie e demonstre um resultado análogo para o caso de Z ser fechado.

14. Se X' denotar o conjunto de todos os *pontos de acumulação* de X:

    (a) Mostre[11] que $X' = \emptyset$ para o caso de X ser um conjunto finito ou numerável[12].

    (b) Mostre[13] que $\mathbb{Z}' = \emptyset$ e que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

    (c) Para o caso de $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o que pode concluir acerca de X'?

    DICA: Para alguns dos casos, justifique as suas respostas invocando *argumentos de densidade*.

III. Conjuntos Compactos

15. Averigue se os intervalos dados são compactos:

    (a) $\mathbb{N}$

    (b) $\mathbb{Z}$

    (c) $\{x\}$ $(x \in \mathbb{R})$

    (d) $]a, b[$ $(a < b)$

    (e) $]a, b]$ $(a < b)$

    (f) $[a, b]$ $(a < b)$.

[9] Veja página 51 do livro *Análise Real, volume 1 - Funções de uma variável*, de Elon Lages Lima.

[10] A condição $X \cap \overline{Y} = \overline{X} \cap Y = \emptyset$ é equivalente a termos $X^c = \overline{Y}$ e $Y^c = \overline{X}$.

[11] Mostrar que $X' = \emptyset$ é equivalente a mostrar que para todos os pontos de $x \in X$ é possível encontrar um $\varepsilon > 0$ tal que a interseção $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (X \setminus \{x\})$ dá vazio, ou equivalentemente, que $\{x\} =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

[12] Dizemos que um conjunto X é numerável se existir função bijetora $f : X \to \mathbb{N}$ entre X e $\mathbb{N}$.

[13] Mostrar que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ consiste em provar que todo o ponto aderente de $\mathbb{Q} \setminus \{x\}$ está em $\mathbb{R}$ (racionais e irracionais).

16. Para as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas pelo **exercício 3**, considere os conjuntos da forma

$$Y_n = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -|x_n| < x < |x_n| + 1\}.$$

 (a) Determine $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$ para cada um dos casos.
 (b) Averigue se os conjuntos determinados no item anterior são compactos.

17. Demonstre o *Teorema de Interseção de Cantor*[14]:
'*Seja X é um conjunto compacto*[15]. *Se existir uma sequência de intervalos encaixados*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \ldots$$

tais que $X_1 = X$ e $X_n \neq \emptyset$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$ '.

18. Sejam X, Y dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios, e $f : X \to Y$ uma função.
 (a) Prove[16] que $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.
 (b) Dê um exemplo de uma função f para a qual se verifica $\overline{f(X)} \neq f(\overline{X})$.
 (c) Enuncie e demonstre um resultado que garanta que $f(\overline{X})$ é um conjunto compacto.

 DICA: Use as seguintes propriedades[17]: $f(\emptyset)$ & $f(A\cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, para dois[18] conjuntos A e B não vazios. Os dois primeiros itens do **exercício 1.** da **Lista L1 – Preliminares**) podem vir a ser úteis.

Última atualização: 15 de janeiro de 2017

[14] Demonstração deste teorema pode ser encontrado no livro *Curso de Análise Real, vol. 1*, de Elon Lages Lima (página 145 em diante).

[15] A condição do conjunto ser limitado (uma das condições para garantirmos que o conjunto é compacto) desempenha um papel fundamental na demonstração, pois permite-nos aplicar o teorema de *Teorema de Bolzano-Weierstrass* (*en: Bolzano-Weierstrass Theorem*). O **exercício 12. (c)** consiste portanto em construir um exemplo para o qual não podemos aplicar diretamente este teorema.)

[16] Este resultado pode ser interpretado como uma versão fraca do TEOREMA 17 do CAPÍTULO VII do livro *Curso de Análise, vol. 1*, de Elon Lages Lima (página 161 em diantes), onde nada é dito sobre a função: Consideramos apenas a aderência de X e do conjunto imagem $f(X)$, que são conjuntos fechados mas não necessariamente limitado.

[17] Estas propriedades encontram-se demonstradas no CAPÍTULO I do livro CURSO DE ANÁLISE, VOL. 1, de Elon Lages Lima.

[18] Esta propriedade corresponde ao *Exercise 3.4.2* da página 61 do livro *Analysis I, Second Edition*, de Terrence Tao.