Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Análise na Reta (2017) – Curso de Verão

Lista L4 — Limites e Continuidade

Observações:

- Esta lista corresponde a um conjunto de exercícios selecionados pelo professor, que servirão de complemento às aulas.
- Esta lista contém também um conjunto de exercícios resolvidos pelo professor. Estes podem ser encontrados na seção **VI. Exemplos e Contra-Exemplos**.
- Para complementar a compreensão de alguns dos exercícios, foram também criados alguns exemplos interativos com recurso ao GeoGebra[1], disponíveis na livraria de ficheiros do professor.
- Apenas alguns dos exercícios serão eventualmente resolvidos em sala de aula. Eventuais dúvidas que surjam na resolução dos restantes deverão ser sanadas *a posteriori*.
- Ao resolver os exercícios desta lista tente justificar todos os passos que realizou até chegar à solução final.

I. Definição de Limite

1. Determine o valor $\delta > 0$ para os qual se verifica a condição

$$0 < \left| x - \frac{1}{5} \right| < \delta \implies \left| 0.66 - \frac{1-x}{1+x} \right| < 0.01$$

Uma interpretação geométrica do exercício pode ser visualizada a partir do *gif animado*[2]
http://professor.ufabc.edu.br/∼nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio1_L4.gif

2. Use a definição de limite para provar as seguintes identidades.
   (a) $\lim\limits_{x\to a} |x| = |a|$
   (b) $\lim\limits_{x\to a} \left(x^2 - 2x\right) = a^2 - 2a$
   (c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$.

[1]bf **Livraria de ficheiros do professor:** http://professor.ufabc.edu.br/∼nelson.faustino/Ensino/Geogebra/FicheirosGeogebra.htm
[2]**Ficheiro GeoGebra:** `Exercicio1_L4.ggb`.

3. Diga[3], justificando, se as afirmações abaixo são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**). No caso de **V**, faça a respetiva demonstração. No caso de **F**, dê um contra-exemplo.

   (a) Se não existem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, então os limites $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ e $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$ também não existem.

   (b) Se existem os limites $\lim_{x\to a} g(x)$ e $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$, então o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ também existe.

   (c) Se os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ também não existe.

   (d) Se existem os limites $\lim_{x\to a} g(x)$ e $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$ então o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ também existe.

4. Use o *Teorema do Sanduíche*[4] para calcular o limite $\lim_{x\to 0} g(x)$ para os itens abaixo:

   (a) g satisfaz a condição $|g(x)| \leq |x|^n \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).

   (b) g satisfaz a condição $|g(x) - \cosh(x)| \leq |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (c) g satisfaz a condição $|xg(x) - \ln(1+x)| \leq x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Uma ilustração da aplicação do *Teorema do Sanduíche* para o **exercício 4.(a)** pode ser visualizado a partir do *gif animado*[5]

   http://professor.ufabc.edu.br/∼nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio4a_L4.gif

   OBSERVAÇÃO: Em nenhum dos itens do **exercício 4.**, a função g aparece no formato usual do enunciado do teorema[6]. Por outro lado, irá também deparar-se com o problema de as funções que limitam superiormente/inferiormente não possuem limites imediatos.

   DICA: Começe por reformular tudo o que aprendeu sobre limites fundamentais, envolvendo funções exponenciais e logarítmicas, em termos do *Teorema do Sanduíche*/*Teorema do Confronto*. Para dois dos itens do **exercício 4.** a *figura png*[7], cujo link segue abaixo, poderá vir a ser útil:

   http://professor.ufabc.edu.br/∼nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2016/TeoremaConfrontoExpLog.png

5. Calcule os limites laterais das funções $\mathrm{sgn}(x)$ (*função sinal*)[8] e $\lfloor x \rfloor$ (*função truncamento*)[9] em todos os pontos do seu domínio.

[3] Veja **Proposition 9.3.14** & **Remark 9.3.15** do livro ANALYSIS I, SECOND EDITION, de Terrence Tao (pp. 222-223). O resultado análogo pode ser livro *Curso de Análise, vol. I* (CAPÍTULO VI, TEOREMA 7.).
[4] Em alguns livros, o *Teorema do Sanduíche* (en:*Sandwich Theorem*) aparece mencionado como *Teorema do Confronto* (en:*Squeezing Theorem*)
[5] **Ficheiro GeoGebra:** `Exercicio4a_L4.ggb`
[6] TEOREMA 4. do CAPÍTULO VI do livro *Curso de Análise, vol. 1*, de Elon Lages Lima.
[7] **Ficheiro GeoGebra:** `TeoremaConfrontoExpLog.ggb` (BASES MATEMÁTICAS 2016)
[8] Veja o **Example 9.3.16** do livro *Analysis I, Second Edition* de Terrence Tao (página 224).
[9] Veja também o **exercício 28.**

II. **Limites de funções vs. Sequências de Números Reais**

6. Reformule e demonstre o *Critério de Cauchy para funções*[10] em termos de intervalos da forma $I_r(c) :=]c - r, c + r[$, e da *oscilação de uma função*[11] $f : X \to \mathbb{R}$:

$$\omega(f, I_c(r)) := \sup_{x,y \in I_c(r)} |f(x) - f(y)|.$$

7. Diga, justificando, por que que as funções abaixo não admitem limite nos pontos do seu domínio.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x \in \mathbb{Q} \\ \\ -1 & \text{, se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{, se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ com } \mathrm{mdc}(p, q) = 1 \\ \\ 0 & \text{, se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \end{cases}$

   (c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{, se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{, se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

   DICA: Numa primeira etapa, procure entender o **Example 9.3.21.** do livro *Analysis I, Volume I* de Terrence Tao (página 227), assim como os exemplos que se encontram na seção 2 EXEMPLOS DE LIMITES do livro *Curso de Análise, vol. 1* de Elon Lages Lima (página 158 em diante). Estes vão-lhe permitir delinear uma primeira estratégia de resolução para os items deste exercício. Numa fase posterior, procure chegar no mesmo tipo de conclusão, com recurso o *Critério de Cauchy para funções* (**exercício 6.**).

8. Diga, justificando, se é possível aplicar *Teorema do Sanduíche* a $xf(x)$, $xg(x)$ e $xh(x)$, onde f, g e h são as funções dadas no **exercício 7.**

9. Mostre que se f não é limitada superiormente em $[a, b]$, então existe uma sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para os quais se verifica a seguinte condição: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$.

[10] Demonstração deste teorema pode ser encontrado no livro *Curso de Análise Real, vol. 1*, de Elon Lages Lima (página 157 em diante)

[11] Por uma questão de simplicidade, a notação $\sup_{x,y \in I_c(r)} |f(x) - f(y)| := \sup\{|f(x) - f(y)| \ : x, y \in I_r(c)\}$ foi adotada.

III. Continuidade Pontual

10. Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em todos os pontos do seu domínio, então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que[12]

$$f(x_m) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \;\&\; f(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

DICA: Reformule a demonstração do *corolário de Weierstrass*[13], que se encontra no livro *Curso de Análise, vol. 1*, de Elon Lages Lima (a partir da página 187).

11. Diga, justificando, se é possível aplicar o *corolário de Weierstrass* (mencionado na dica anterior) à função $\dfrac{1-x}{1+x}$, quando o domínio desta é um intervalo limitado, mas não fechado.

DICA: Note que o gráfico de $\dfrac{1-x}{1+x}$ pode ser construído a partir do gráfico de $\dfrac{1}{x}$ por translações horizontais e verticais. Sabe-se ainda que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$. No **exercício 32.** pode encontrar uma relação interessante entre descontinuidades[14] em gráficos de funções, e continuidade pontual/uniforme.

12. Estude a continuidade das funções abaixo no ponto $x = 0$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{, se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{, se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{, se } x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$

A representação gráfica da função g do **exercício 12.(b)** pode ser visualizada a partir do *gif animado*[15]

http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio12b_L4.gif

13. Use a definição de função contínua para demonstrar que a função definida pontualmente por e $\ln(x) + 1$ $(x > 0)$ é contínua[16] em todos os pontos do seu domínio.

---

[12] Adotámos as notações $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) := \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ e $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ por uma questão de simplicidade.

[13] O nome de *[Karl Theodor Wilhelm] Weierstrass (1815-1897)* aparece associado a muitos teoremas de análise. Entre os quais o *Teorema do Valor Extremo [de Weierstrass]* (en: *Extreme Value Theorem*, e o *Teorema de Bolzano-Weierstrass* (en: *Bolzano-Weierstrass Theorem*), utilizado na resolução do **exercício 17.** da **Lista L3-Topologia da Reta**.

[14] Dizemos que o gráfico de uma função $f$exibe uma descontinuidade em $x = a$ quando o limite de f no ponto a é $\pm\infty$.

[15] **Ficheiro GeoGebra:** `Exercicio12b_L4.ggb`.

[16] Veja **Exercício 27.** para entender quais as diferenças entre o estudo da existência de limite no ponto e o estudo da continuidade no ponto.

14. Sejam f e g duas funções contínuas num ponto $a \in \mathbb{R}$.
    (a) Prove que as funções $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$, definidas pontualmente por $\max\{f(x), g(x)\}$ e $\min\{f(x), g(x)\}$, respetivamente são contínuas.
    (b) Diga, justificando, se a afirmação recíproca também é verdadeira:

    'Se $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são duas funções contínuas em a, então f e g também são funções contínuas em a.'

    OBSERVAÇÃO: Este exercício é muito semelhante ao **exercício 3.**

    DICA: Use a **DICA** do **exercício 14** da **Lista L2 – Números Reais**.

15. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todos os pontos do seu domínio, mas que $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (*módulo da função* f) já seja contínua em todos os pontos do seu domínio.

16. Faça a demonstração para as seguintes afirmações:
    (a) Se f é uma função que verifica $|f(x)| \leq |x|e^{-x}$, então f é contínua em $x = 0$.
    (b) Se g é uma função contínua em $x = 0$, e f uma função que satisfaz a $g(0) = 0$, e a desigualdade $|f(x)| \leq |g(x)|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, então f é contínua em $x = 0$.
    (c) Dê um exemplo[17] de duas funções f e g tais que $|f(x)| \leq |g(x)|$, para todo o x, mas f não é contínua[18] em $x = 0$, e $g(0) \neq 0$.

IV. Continuidade Uniforme

17. Verifique se as funções dadas são uniformemente contínuas em $\mathbb{R}^+$.
    (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
    (b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
    (c) $h(x) = x + \sin(x)$.

    Os gráficos das funções do **exercício 17.** podem ser visualizados a partir do *figura png*[19] http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio17_L4.png

[17] Um possível exemplo são as funções $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^x$.

[18] Outro exemplo pode ser construído, escolhendo $f(x) = e^{\frac{1}{|x|}}$. Consegue dar um exemplo de uma função g que satisfaz a condição $g(0) \neq 0$ e a desigualdade $f(x) < g(x)$?

[19] **Ficheiro GeoGebra:** `Exercicio17_L4.ggb`

18. Verifique se as funções dadas são uniformemente contínuas no intervalo $]0,1[$.

    (a) $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

    (b) $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$

    Os gráficos das funções do **exercício 18.** podem ser visualizados a partir do *figura png*[20] http://professor.ufabc.edu.br/∼nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio18_L4.png

19. Com base na resolução dos **exercícios 17. & 18.** diga, justificando, se toda a função uniformemente contínua é necessariamente uma função limitada.

20. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *Lipschitziana* se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \ \forall_{x,y \in X}.$$

    (a) Mostre que a função módulo é uma função *Lipschitziana*.

    (b) Mostre que toda a função *Lipschitziana* é uma função uniformemente contínua.

    OBSERVAÇÃO:

    Dizer que uma função f é *Lipschitziana* é equivalente a dizer que a constante[21]

$$C := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

    é independente da escolha dos pontos $x, y \in X$. Para entender um pouco este tipo de interpretação, veja o **exercício 29.** da seção **VI. Exemplos e Contra-Exemplos**.

21. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica se existir um número real (mínimo) $T > 0$ para o qual se verifica

$$f(x + T) = f(x), \ \forall_{x \in \mathbb{R}}.$$

    (a) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pontualmente por $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ é uma *função periôdica*. Determine o valor de T.

    (b) Prove que se f é uma função periôdica e contínua em $\mathbb{R}$, então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

    Uma ilustração gráfica do **exercício 21.(a)** pode ser visualizada a partir do *gif animado*[22] http://professor.ufabc.edu.br/∼nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio21a_L4.gif

---

[20] **Ficheiro GeoGebra:** `Exercicio18_L4.ggb`

[21] $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ é uma forma abreviada de escrevermos $\sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \ : \ x, y \in X \ \& \ x \neq y\right\}$.

[22] **Ficheiro GeoGebra:** `Exercicio21a_L4.ggb`

OBSERVAÇÃO: A reta real, representada pelo conjunto $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado. No entanto, $\mathbb{R}$ não é um conjunto limitado, e por conseguinte, *não é compacto*.

Esta é uma obstrução inicial que pode ser contornada se começarmos por demonstrar que f é uniformemente contínua para intervalos da forma $[nT,(n+1)T]$ $(n \in \mathbb{R})$. Para intervalos da forma $[nT,(n+1)T[$, $]nT,(n+1)T]$ & $]nT,(n+1)T[$ $(n \in \mathbb{R})$, o resultado nem sempre é verdade (veja **exercício 28.** & **exercício 31.** da seção **VI. Exemplos e Contra-Exemplos**.).

V. Limites Infinitos e no Infinito

22. Defina[23] formalmente os seguintes conceitos de limite em termos de $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$:
    (a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$
    (b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$
    (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$
    (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$.
23. Usando os conceitos definidos no **exercício 22.**, mostre por definição as seguintes identidades:
    (a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$
    (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{(1-x)^2} = 0.$
24. Usando os conceitos definidos no **exercício 22.**, mostre por definição as seguintes propriedades:
    (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = y$ se e só se $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = y$ $(y \in \mathbb{R})$
    (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = y$ se e só se $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = y$ $(y \in \mathbb{R})$
    (c) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ se e só se $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
    (d) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ se e só se $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
25. Use o **exercício 24.** para verificar as seguintes igualdades:
    (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, onde e denota o *número de Neper*[24].
    (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} (-x)^{-\alpha} = +\infty$ $(0 < \alpha < 1)$
    (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x)^{-\alpha} = 0$ $(0 < \alpha < 1)$

    DICA: Para os três itens anteriores, use a identidade $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ $(f(x) > 0)$.

[23] Veja a seção 4 do CAPÍTULO VI do livro *Curso de Análise, vol I*, de Elon Lages Lima (página 163 em diante).

[24] **CURIOSIDADE:** Uma interpretação deste limite fundamental pode ser visualizada a partir do *gif animado* http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2016/JurosSimplesCompostos.gif (BASES MATEMÁTICAS 2016).

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{, se } m > n \\ \frac{p_m}{q_m} & \text{, se } m = n \\ 0 & \text{, se } m < n \end{cases}$,

onde $p_m, q_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ denotam os coeficientes de maior grau dos polinômios $P_m(x)$ e $Q_n(x)$, respetivamente.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)} = +\infty.$

26. Use o **exercício 24.** para averiguar se as seguintes funções são limitadas em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$

(b) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

VI. Exemplos e Contra-Exemplos

27. Limite no Ponto e Valor da função no ponto são conceitos distintos

EXEMPLO (A): **Exercício 1**. da lista **L4–Limites e Continuidade**.

O **exercício 1.** é um exercício padrão muito útil para entender o conceito de limite como aproximação. Neste caso em concreto, pretendemos procurar um valor de δ suficientemente pequeno que nos permita aproximar o valor de $\frac{2}{3}$ (valor exato da função no ponto $x = \frac{1}{5}$) por uma aproximação por truncamento de apenas dois algarismos significativos. No caso de pretendermos uma aproximação por arredondamento, teríamos de substituir no enunciado do exercício 0.01 por $0.05 = 0.5 \times 10^{-1}$ e 0.66 por 0.67.

Obviamente que neste caso o limite da função no ponto nunca irá coincidir com valor da função no ponto, uma vez que para determinarmos o limite da função no ponto estamos a usar uma representação em base decimal[25], ao par que para calcularmos o valor da função no ponto, estamos a considerar o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$.

Mais detalhes sobre este tipo de abordagem podem ser consultados no **B Appendix: the decimal system** do livro *Analysis I, Second Edition* de Terrence Tao (da página 330 em diante).

[25] Este tipo de representação também é conhecido por representação em ponto flutuante.

EXEMPLO (B): **Exercício 8.** da lista **L1–Preliminares**;
Example 9.3.20. do livro *Analysis I, Second Edition* de Terrence Tao, entre outros.

Em ambos os exemplos são dados duas funções racionais (cociente de dois polinômios) que não coincidem (pois têm domínios diferentes). Num dos casos (verifica-se em ambos os exemplos) o limite da função no ponto coincide com o valor da função no ponto. No outro caso, o limite do ponto dá-nos uma constante real que coincide com o valor da função no ponto do outro caso.

Este tipo de resultado foi possível uma vez que o conceito de limite é um *conceito local*, no sentido em que se basta provarmos que o limite existe numa vizinhança de $x \in \mathbb{R}$, excluíndo o próprio x, para provarmos que este existe em[26]. Mas em geral este pode não coincidir, como pode verificar para o caso das funções f e g definidas pontualmente por

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1} \quad \& \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^3}{x^3+1} & \text{, se } x \neq -1 \\ \\ 1 & \text{, se } x = 1 \end{cases}$$

EM SUMA: Para estudarmos o limite de uma função $f : X \to \mathbb{R}$, consideramos apenas o conjunto dos pontos de acumulação de X:

$$\begin{aligned} X' &:= \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ x \in \overline{X \setminus \{x\}} \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ \forall_{\delta>0} \ : \ ]x-\delta, x+\delta[\cap (\mathbb{R} \setminus \{x\}) \neq \emptyset \} . \end{aligned}$$

Para estudarmos a continuidade do ponto, temos de estudar apenas o se o limite no ponto coincide com o valor da função no ponto, para todos os elementos de X (domínio de f). Uma explicação mais detalhada pode ser encontrada na **Proposition 9.3.18.** do livro *Analysis I, Second Edition* de Terrence Tao (página 224 em diante).

28. A FUNÇÃO TRUNCAMENTO

EXEMPLO (A): *'A função $\lfloor x \rfloor$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.'*

Esta conclusão é imediata pelas desigualdades

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \ \& \ \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Se considerarmos $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrários, temos que

$$\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - 1 < x - y < \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor + 1,$$

ou equivalentemente, que

[26] Veja a explicação dada no **Example 9.3.19.** do livro *Analysis I, Second Edition* de Terrence Tao (página 225).

$$x - y > \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor - 1 \ \& \ y - x > \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - 1.$$

'Jogo' do $\varepsilon > 0$ vs. $\delta > 0$:
As desigualdades anteriores garantem-nos que

$$|x - y| > |\lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor| - 1$$

Se para $\delta > 0$ arbitrário escolhermos os pontos $x = \delta$ e $y = \dfrac{\delta}{2}$, obtemos

$$|x - y| < \delta \quad \& \quad |\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor| \geq \lfloor \delta \rfloor - \frac{\delta}{2},$$

Escolhendo p.e. $\varepsilon = \lfloor \delta \rfloor - \dfrac{\delta}{2}$ concluímos, atendendo à arbitrariedade de $\delta > 0$ que $\lfloor x \rfloor$ não é uniformemente contínua.

EXEMPLO (B)
'A função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ é uniformemente contínua no intervalo $[n, n+1[$ ($n \in \mathbb{Z}$)'.

Do exemplo anterior, facilmente concluímos que $n \leq x < n+1$ e para todo o $n \leq y < n+1$, a função f satisfaz as desigualdade

$$|f(x) - f(y)| < 1.$$

Por outro lado, da definição de $\lfloor \cdot \rfloor$, resulta que $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor = n$. Logo, por aplicação da desigualdade triangular, concluímos adicionalmente que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| + |\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor| = |x - y|.$$

Escolhendo $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$, provámos pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

ou seja, que f é uniformemente contínua no intervalo $[n, n+1[$.

29. **FUNÇÕES LIPSCHITZIANAS (veja EXERCÍCIO 20.)**

EXEMPLO (A) *'Funções quadráticas não são uniformemente contínuas, em geral'.*

No caso de termos uma função[27] f, definida pontualmente por $f(x) = x^2$, temos que

$$\frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = |x + y|.$$

[27] Veja o EXEMPLO 23. do CAPÍTULO VII, do livro *Curso de Análise, vol. 1* (página 190 em diante).

Para intervalos limitados da forma $]a,b[,]a,b]$ e $[a,b[$ (n ao são fechados este problema não se coloca, uma vez que $|x+y| \leq 2b$, f é uma *função Lipschitziana*[28]. Daqui podemos obter a seguinte desigualdade:

$$\sup_{x \neq y} |x+y| \leq 2b.$$

Para intervalos ilimitados da forma $[a,+\infty[$ e $]a,+\infty[$, eu posso escolher, para cada $\delta > 0$ pontos da forma[29] $x_\delta = |a| + \frac{\delta}{2}$, $y_\delta = |a| + \delta$. Para estes pontos, tem-se que

$$|x_\delta + y_\delta| = 2|a| + \frac{3}{2}\delta \geq \frac{3}{2}\delta.$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{3}{2}\delta$ conseguimos provar por definição que x^2 não é uniformemente contínua em $[a,+\infty[$, pela arbitrariedade de $\delta > 0$.

Para intervalos ilimitados da forma $]-\infty,b]$ e $]-\infty,b[$, o mesmo tipo de demonstração pode ser realizado se para cada $\delta > 0$, considerarmos os pontos da forma[30]

$$x_\delta = -|b| - \frac{\delta}{2} \;\&\; y_\delta = -|b| - \delta.$$

30. Funções Polinomiais

Exemplo (A) *'Se $P_n(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 2$, então a função P_n não é* uniformemente contínua em $\mathbb{R}$'.

Para chegarmos a esta conclusão, comecemos por calcular a divisão $x^k - y^k$ por $x - y$ para todos os $2 \leq k \leq n$.

Sem perda de generalidade, assuma-se que $y \neq 0$. Logo $\frac{x^k - y^k}{x - y}$ pode ser reescrito na forma de *progressão geomêtrica*[31], de razão $r = \frac{x}{y}$, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{x^k - y^k}{x - y} &= y^{k-1} \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^k - 1}{\frac{x}{y} - 1} \\ &= y^{k-1} \left(1 + \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{y}\right)^{k-1}\right). \end{aligned}$$

[28] A constante $2b$ que majora $|x+y|$ é determinada com base no fato de os intervalos limitados da forma $]a,b[,]a,b]$ admitirem a constante b como majorante. Esta conclusão é independente da escolha dos pontos x e y.

[29] Resulta da desigualdade $x \leq |x|$ que os intervalos da forma $[\,|a|,+\infty[$ resp. $]\,|a|,+\infty[$ são subconjuntos de $[\,|a|,+\infty[$ resp. $]\,|a|,+\infty[$.

[30] Analogamente, da desigualdade $-|x| \leq x$ resulta que $]-\infty,-|b|[$ resp. $]-\infty,-|b|]$ é subconjuntos de $]-\infty,b[$ resp. $]-\infty,-b[$.

[31] Veja o **exercício 6. c)** do final do Capítulo II do livro Curso de Análise, vol. 1, de Elon Lages Lima (página 44 em diante).

Escolhendo $x_\delta = \frac{\delta}{2}$ e $y_\delta = \delta$, obtemos da igualdade anterior que

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^k - \delta^k}{-\frac{\delta}{2}} &= \delta^{k-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) \\ &= 2\delta^{k-1}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

Aplicando módulos, obtemos que[32]

$$\left|\left(\frac{\delta}{2}\right)^k - \delta^k\right| = \delta^k\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \geq \frac{1}{2}\delta^k.$$

Escolhendo p.e. $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\delta^k$, provamos também, atendendo à arbitrariedade de $\delta > 0$ que x^k não é uniformemente contínua para todos os $k \geq 2$.

CONCLUSÃO DA PROVA:

Para $P_n(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n$, tem-se que

$$P_n(x) - P_n(y) = p_0 + p_1(x - y) + \ldots + p_n(x^n - y^n).$$

Da construção anterior, retiramos que os pontos $x = \frac{\delta}{2}$ e $y = \delta$ satisfazem a equação

$$x^k - y^k = -\delta^k\left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

Da sequência de desigualdades $p_k \geq -|p_k|$ $(0 \leq k \leq n)$, obtemos

$$p_k(x^k - y^k) \geq |p_k|\delta^k\left(1 - \frac{1}{2^k}\right),$$

e por conseguinte, a desigualdade

$$P_n(x) - P_n(y) \geq |p_0| + |p_1|\delta\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + |p_n|\delta^n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Em particular, para $\varepsilon = \min\left\{\ |p_k|\delta^k\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\ :\ 1 \leq k \leq n\ \right\}$, a desigualdade[33]

$$P_n(x) - P_n(y) \geq \varepsilon$$

é sempre satisfeita. Da arbitrariedade de $\delta > 0$, provámos assim que $P_n(x)$ não define uma função uniformemente contínua.

[32] A sequência $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente e, por conseguinte o ponto, $x = \frac{1}{2}$ é o valor mínimo de $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

[33] Para obtermos $|P_n(x) - P_n(y)| \geq \varepsilon$ seja satisfeita, basta verificar que uma das desigualdades $P_n(x) - P_n(y) \geq \varepsilon$ ou $P_n(x) - P_n(y) \leq -\varepsilon$ é satisfeita.

OBSERVAÇÃO: A mesma técnica de demonstração pode ser adotada para demonstrar[34] que $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$, para qualquer polinômio $P_n(x)$ de grau $n \geq 1$:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0} \ : \ \forall_{x\in\mathbb{R}} \ (x \geq \delta \implies P_n(x) \geq \varepsilon) \, .$$

31. **CONTRA-EXEMPLOS PARA O EXERCÍCIO 21. (b)**

CONTRA-EXEMPLO (A)

No intervalo $]-\pi,\pi[$, a função $\sin(x)$ – função periódica de período 2π – satisfaz a sequência de (des)igualdades[35]

$$|\sin(x) - \sin(y)| = 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq |x-y|,$$

uma vez que o contradomínio da função $\cos$ é limitado pelo conjunto $[-1,1]$, e

$|\sin(\theta)| \leq |\theta|$, para todo o $-\pi < \theta < \pi$.

Podemos assim concluir que a função $\sin$ é uniformemente contínua pelo **exercício 20.** No entanto não podemos chegar diretamente a esta conclusão pelo *Teorema do Valor Extremo [de Weierstrass]*, uma vez que o intervalo $]-\pi,\pi[$ não é compacto.

OBSERVAÇÃO: Usando a periocidade da função $\sin$, pode-se adicionalmente concluir, usando o mesmo tipo de argumentos, que a função $\sin$ é também uniformemente contínua nos intervalos abertos da forma $](n-1)\pi,(n+1)\pi[$ $(n \in \mathbb{Z})$, podemos concluir ainda que a desigualdade $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$ é sempre verdadeira para valores de θ nos intervalos abertos $](n-1)\pi,(n+1)\pi[$ $(n \in \mathbb{Z})$. Uma ilustração deste fato pode ser visualizado a partir do *gif animado*[36]

http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio31_L4.gif

CONTRA-EXEMPLO (B)

Se, ao invés da função $\sin(x)$ considerarmos a função $\tan(x)$ (função periôdica de período π) sabemos que esta admite duas descontinuidades no intervalo $]-\pi,\pi[$ – os pontos $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Logo esta não é contínua em $]-\pi,\pi[$, e por conseguinte, não é uniformemente contínua em $]-\pi,\pi[$. (ou seja, o resultado a demonstrar no **exercício 21. (b)** só é verdade quando função periódica não admite descontinuidades em $\mathbb{R}$).

---

[34] Veja subseção **9.10 Limits at infinity** do livro *Analysis I, Second Edition* de Terrence Tao (páginas 248 & 249).

[35] Foram usadas as fórmulas $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$ para $a + b = x$ & $a - b = y$.

[36] **Ficheiro GeoGebra:** `Exercicio31_L4.ggb`

32. **LIMITES INFINITOS VS. CONTINUIDADE PONTUAL & UNIFORME**

Os resultados que iremos demonstrar abaixo aplicam-se a exemplos como os do **exercício 17. (a)**, **exercício 18. (b)** e do **exercício 23.**

> **RESULTADO (A)** *' $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \implies f$ não é uniformemente contínua $x = a$'.*
> *(e por conseguinte, não é contínua em $x = a$)*

Suponha que $\delta > 0$ é arbitrário. Da definição de limite lateral, pode concluir-se que f não é limitada superiormente no intervalo $]a, a+\varepsilon[$ (para algum $\varepsilon > 0$).

Em particular, a condição[37], $0 < x - a < \varepsilon \implies f(x) \geq \delta$ é também satisfeita para pontos $x_\delta, y_\delta \in]a, a+\varepsilon[$ que satisfazem $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ (basta escolhermos p.e. $x_\delta = a + \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\}$ & $y_\delta = x_\delta + \max\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\}$).

Logo,

$$f(x_\delta) - f(y_\delta) \geq \delta - f(y_\delta) \quad \& \quad f(y_\delta) - f(x_\delta) \geq \delta - f(x_\delta).$$

Escolhendo $\varepsilon_\delta = \max\{|\delta - f(x_\delta)|, |\delta - f(y_\delta)|\}$, concluímos que $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_\delta$, como pretendido.

OBSERVAÇÃO: Na demonstração acima, $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon_\delta > 0$ são constantes diferentes.

> **RESULTADO (B)** *' $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \implies f$ não é uniformemente contínua $x = a$'.*
> *(e por conseguinte, não é contínua em $x = a$)*

(DEMONSTRAÇÃO ANÁLOGA À ANTERIOR)

Suponha que $\delta > 0$ é arbitrário. Da definição de limite lateral, pode concluir-se que f não é limitada inferiormente no intervalo $]a-\varepsilon, a[$ (para algum $\varepsilon > 0$).

Em particular, a condição $-\varepsilon < x - a < 0 \implies f(x) \leq -\delta$ é sempre satisfeita para pontos $x_\delta, y_\delta \in]a-\varepsilon, a[$ que satisfazem $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ (basta escolhermos p.e. $x_\delta = a - \max\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\}$ & $y_\delta = x_\delta - \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\}$).

Logo,

$$f(x_\delta) - f(y_\delta) \geq f(x_\delta) + \delta \quad \& \quad f(y_\delta) - f(x_\delta) \geq f(y_\delta) + \delta.$$

Escolhendo $\varepsilon_\delta = \max\{|\delta + f(x_\delta)|, |\delta + f(y_\delta)|\}$, concluímos que $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_\delta$, como pretendido.

OBSERVAÇÃO: Na demonstração acima, $\varepsilon > 0$ e $\varepsilon_\delta > 0$ são constantes diferentes.

[37] 'Trocámos' as constantes ε e δ na 'definição formal' de $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

33. LIMITES INFINITOS VS. TEOREMA DO SANDUÍCHE

EXEMPLO. Limites envolvendo funções exponenciais e logarítmicas *(discussão útil para resolução do* **exercício 26.***)*

Na subseção 4 do CAPÍTULO VI do livro *'Curso de Análise, vol. 1'* de Elon Lages Lima são discutidas várias propriedades envolvendo limites infinitos e limites no infinito.

Tirando partindo de duas delas, podemos concluir da desigualdade[38]

$$+\infty > e^{\frac{1}{|x|}} > \frac{1}{|x|}$$

($x \in \mathbb{R}$), e do limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ que $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{|x|}} = +\infty$ e, por conseguinte, $e^{\frac{1}{|x|}}$ não é limitada em intervalos da forma $]-\delta, \delta[$ $(\delta > 0)$.

Vamos apenas enunciar e demonstrar dois resultados análogos aos que se encontram no livro que nos permitem p.e. concluir, com base na desigualdade anterior, que que

$$\lim_{x\to 0}(-e^{-\frac{1}{|x|}}) = -\infty.$$

As restantes (que também podem generalizadas para o caso $-\infty$) ficam ao critério do aluno.

RESULTADO (A). *'Se* $f(x) \leq g(x), \forall_{x\in X}$ *&* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \implies \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$*'.*

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Assumindo que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, obtemos que

$$0 < |x-a| < \delta \implies g(x) \leq -\varepsilon.$$

No caso de $f(x) \geq g(x)$, para todos os $x \in X$, obtemos, pela tricotomia do corpo $\mathbb{R}$, que a implicação abaixo também é satisfeita:

$$0 < |x-a| < \delta \implies f(x) \leq -\varepsilon$$

para o mesmo $\delta > 0$.

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, concluímos também que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, como pretendido.

[38] Este tipo de desigualdades, conduz-nos a um análogo do *Teorema do Sanduíche*, onde $+\infty$ desempenha o papel de uma função que limita superiormente $e^{\frac{1}{|x|}}$.

RESULTADO (B).

'Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ *&* $\lim_{x\to a} f(x) = L \implies \exists_{\delta>0} : \forall_{x\in X} \left[0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > g(x)\right]$*'.*

IDEIA DA PROVA:

Por hipótese temos, para $\varepsilon_f, \varepsilon_g > 0$ arbitrários que

$$0 < |x-a| < \delta_f \implies |f(x) - L| < \varepsilon_f \quad \& \quad 0 < |x-a| < \delta_g \implies g(x) \leq -\varepsilon_g.$$

Se tomarmos $\varepsilon_f = 1$, $\varepsilon_g = |L| + 1$, e escolhermos $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, obtemos naturalmente a desigualdade $f(x) > g(x)$ para os pontos $x \in X$ que satisfazem a condição $0 < |x-a| < \delta$.

Última atualização: 17 de janeiro de 2017