Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição
Análise na Reta (2017) – Curso de Verão

Lista L5 — Funções Deriváveis

Observações:

- Esta lista corresponde a um conjunto de exercícios selecionados pelo professor, que servirão de complemento às aulas.
- Esta lista contém também um conjunto de exercícios resolvidos pelo professor. Estes podem ser encontrados na seção **V. Exemplos e Contra-Exemplos**.
- Para complementar a compreensão de alguns dos exercícios, foram também criados alguns exemplos interativos com recurso ao GeoGebra[1], disponíveis na livraria de ficheiros do professor.
- Apenas alguns dos exercícios serão eventualmente resolvidos em sala de aula. Eventuais dúvidas que surjam na resolução dos restantes deverão ser sanadas *a posteriori*.
- Ao resolver os exercícios desta lista tente justificar todos os passos que realizou até chegar à solução final.

I. Funções Deriváveis num Ponto

1. Mostre por definição que para todo o $x \neq 0$, e para todo o n natural se tem

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x(x+h)^n} - \frac{1}{x^{n+1}}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

   DICA: Use o binômio de Newton para expandir $(x+h)^n$.

2. Para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pontualmente por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{, se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   (a) Verifique se f é contínua em $x = 0$.
   (b) Verifique se f é derivável em $x = 0$.

3. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pontualmente por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$$

   é derivável em $x = 0$.

[1] **Livraria de ficheiros do professor:** http://professor.ufabc.edu.br/∼nelson.faustino/Ensino/Geogebra/FicheirosGeogebra.htm

4. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pontualmente por

$$g(x) = \begin{cases} x^k \cos^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}x}\right) & \text{, se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{, se } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

   (a) Para $k = 0$, encontre duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes para $x = 0$, mas que $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n)$.

   (b) Para $k > 0$, mostre que g' é uma função contínua e $x = 0$. Calcule o valor de $g'(0)$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ uma função definida por

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

   onde a, b, c e d são constantes.

   (a) Mostre que f é uma função bijetora[2].

   (b) Assumindo $ad - bc \neq 0$, use o *Teorema da Função Inversa* para mostrar que é possível calcular a derivada de f^{-1} para todos os pontos $y \neq \dfrac{a}{c}$.

   (c) Dê um exemplo de uma função no formato acima que satisfaça a condição a condição $ad = bc$, e para a qual não é possível aplicar o *Teorema da Função Inversa*.

II. Funções Deriváveis num Intervalo

6. Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $]a, b[$, e que as derivadas laterais f'_+ e f'_-, definidas por

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \& \quad f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

   satisfazem a condições $f'_+(c) \leq 0$ & $f'_+(c) \leq 0$, para todo o $c \in]a, b[$.

   (a) Prove que $f'(c) = 0$, para todo o $c \in]a, b[$.

   (b) Prove que f é a função constante.

   DICA: Use o **exercício 10.** da **Lista L4-Limites e Continuidade**.

7. Diga, justificando, por que razão não é possível aplicar o *Teorema de Rolle* a uma função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida pontualente por $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

8. Diga, justificando, por que razão não é possível aplicar o *Teorema de Lagrange* à função $\dfrac{1}{x}$ em intervalos da forma $[a, b]$, com $ab < 0$.

[2] Este item é semelhante ao **exercício 10.** da **Lista L1 – Preliminares**.

9. Seja $P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n$ um polinômio de grau n.

   (a) Mostre que no caso de n ser um número ímpar é possível determinar um ponto c tal que $P_n'(c) = 0$.

   (b) Verifique a aplicabilidade[3] do resultado demonstrado no item anterior para os polinômios $P_5(x) = x^5 + x^4 + 2x^2 - x - 3$ e $P_{13}(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$.

   DICA: Demonstre o resultado para intervalos simétricos, da forma $[-a, a]$ $(a > 0)$.

10. Para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pontualmente por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \sqrt{x} & \text{, se } x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

   verifique se pode aplicar o *Teorema de Lagrange* aos intervalos $[0, 1]$ e $[-1, 1]$. Em caso afirmativo, determine $f'(c)$ (para $-1 < c < 1$ ou $0 < c < 1$).

   OBSERVAÇÃO: Pela representação gráfica da função f e da sua derivada f':

   http://professor.ufabc.edu.br/ nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio10_L5.png

   pode-se constatar que o gráfico de f' exibe uma descontinuidade, ao contrário do gráfico de f.

11. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

   (a) Mostre que f é contínua em todo o seu domínio.

   (b) Mostre que se f' é uma função limitada, então f é uniformemente contínua.

   DICA: Use o *Teorema de Lagrange* & o **exercício 20.** da **Lista L5-Limites e Continuidade**.

12. Para a função $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida pontualmente por $g(x) = x - \tan(x)$:

   (a) Mostre que g não é uniformemente contínua.

   (b) Determine os pontos críticos de g.

   (c) Use o *Teorema de Lagrange* para mostrar que[4] $\tan(x) \geq x$, para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

III. Derivadas de Ordem Superior

13. Mostre que se f é uma função de classe[5] C^2, então f'' é dado pelo limite

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2}.$$

   DICA: Use a fórmula de Taylor de ordem 2.

[3] Use a app de GeoGebra – https://www.geogebra.org/apps/– para representar graficamente os polinômios dados no exercício.

[4] Veja **exercício 28.**

[5] Dizemos que f é uma função de classe C^2 se f, f' e f'' são contínuas.

14. Para uma função $f : \,]-1,1[\to \mathbb{R}$, suponha que f', f'' e f''' são funções contínuas em $]-1,1[$. Mostre que no caso de

$$f'(0) = f''(0) = 0, \text{ e } f'''(0) \neq 0,$$

$f(0)$ não é um mínimo local de f.

15. Demonstre a seguinte generalização do *Teorema de Lagrange* para derivadas de ordem n:

Se f é de classe C^n no intervalo $[a,b]$, e $f^{(n)}$ é derivável em $]a,b[$, então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a) = f^{(n+1)}(c)(b-a).$$

16. Se $P_n(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n$ é um polinômio de grau n, mostre que os coeficientes $p_0, p_1, \ldots, p_n$ podem ser calculados a partir da fórmula

$$p_k = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

DICA: Começe por demonstrar que para $f_k(x) = x^k$, se tem $f_k^{(j)}(x) = 0$, para $j > k$ e $f_k^{(j)}(x) = \dfrac{j!}{(n-j)!} f_{k-j}(x)$ para $j \leq k$.

17. Sejam f e g duas funções de classe[6] C^n. Se $(fg)^{(n)}$ denotar a derivada de ordem n da função fg, mostre que

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

onde $\binom{n}{k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ denotam os coeficientes binomiais.

18. Para n natural, calcule $f^{(n)}(x)$ para seguintes funções:

 (a) $f(x) = e^{-x^2}$
 (b) $f(x) = \cos(x)$.
 (c) $f(x) = \sin(x)$
 (d) $f(x) = e^{-x}\sin(x)$
 (e) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$ $(x \neq 0)$.

DICA: Use o **exercício 17.**

[6]Dizemos que uma função h é de classe C^n, se para todo o $1 \leq k \leq n$ as funções $h^{(k-1)}$ são deriváveis ($h^{(0)}(x) := h(x)$).

19. Suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função n vezes derivável, e que $f^{(n)}$ satisfaz a *condição de Hölder* (en: *Hölder condition*)

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| \leq C_{n,\alpha}|x-y|^{\alpha}, \quad \forall_{x,y \in X}$$

onde $C_{n,\alpha}$ é uma constante real, que depende apenas de $\alpha \in \mathbb{R}$ e de $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(a) Mostre[7] que para $\alpha = 1$, a função $f^{(n)}$ é uniformemente contínua.

(b) Para $\alpha = 1$, dê um exemplo de função f que não satisfaz a *condição de Hölder*, embora a sua derivada de ordem n satisfaça.

(c) Mostre que a função $f(x) = \sqrt{x}$ satisfaz a condição de *condição de Hölder*, mas a suas derivadas de ordem n não satisfazem.

(d) Para $n = 0$, mostre que[8],

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x)} & \text{, se } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$$

é uniformemente contínua, embora não[9] satisfaça a *condição de Hölder*, para qualquer $0 < \alpha \leq 1$.

(e) Mostre que para valores de $\alpha \geq 1$, a função f é um polinômio de grau n.

DICA: Começe por demonstrar que para $\alpha \geq 1$, $f^{(n+1)}$ também existe, e que

$$f^{(n+1)}(x) = 0, \quad \forall_{x \in X}.$$

Por fim (de modo a garantir a unicidade de f), prove com base no **exercício 16.** que os polinômios de grau n satisfazem as seguintes condições condições: $P_n^{(k)}(x)$ é um polinômio de grau $n-k$ ($0 \leq k \leq n$), e $P_n^{(n+1)}(x) = 0$.

IV. Fórmula de Taylor & Série de Taylor

20. Para as funções do **exercício 18.**, calcule os polinômios de Taylor de ordem n em torno do ponto $a \neq 0$.

21. Considere e^x definida por sua série de potências. Mostre que existem $\delta > 0$ e $C > 0$, tal que

$$|e^x - 1 - x| \leq Cx^2, \quad \forall_{x \in]-\delta,\delta[}.$$

[7] Generalização do **exercício 20.** da **Lista L4–Limites e Continuidade**.

[8] Faça você mesmo o gráfico da função do exemplo, inserindo o comando `Se[0 < x < 1 / 2, 1 / ln(x), Se[0 <= x <= 0, 0]]` no app de Geogebra – https://www.geogebra.org/apps/

[9] Este contra-exemplo permite-nos concluir que uma função que satisfaz a *condição de Hölder* é automaticamente uniformemente contínua, apenas para o caso de $\alpha = 1$ (*funções Lipschitzianas*).

22. Usando a representação de funções pelas suas séries de Taylor, demonstre as seguintes identidades:
    (a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
    (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
    (c) $\sin(x + a) = \sin(x)\cos(a) + \cos(x)\sin(x)$
    (d) $\cos(x + a) = \cos(x)\cos(a) - \sin(x)\sin(a)$.

23. Considere a função $f(x) = \ln(x)$.
    (a) Mostre que f coincide com sua série de Taylor em torno do ponto $a = 1$ no intervalo $]0, 2[$.
    (b) Diga, justificando, se f também coincide com a sua série de Taylor no intervalo $[2, +\infty[$.

    DICA: Use o **exercício 1.** para determinar uma fórmula geral para o polinômio de Taylor de grau n, para $\ln(x)$ em torno do ponto a.

24. Determine qual o valor (mínimo) de n para o qual é possível aproximar o número de Neper pela fórmula de Taylor de ordem n, com um erro de aproximação inferior a 10^{-6}.

    DICA: Comece por calcular o erro de aproximação de f pelo polinômio de Taylor de grau n, para intervalos da forma $]1 - \delta, 1 + \delta[$ ($\delta > 0$).

V. Exemplos e Contra-Exemplos

25. **EXISTÊNCIA DE FUNÇÃO INVERSA**

    EXEMPLO: *'Funções que admitem inversa, mesmo não sendo localmente deriváveis.'*

    Para este exemplo é possível provar pelo *Teorema de Bolzano* a existência de soluções da equação $\text{sgn}(x)\sqrt{|x|} = y$, e pela monotonia da função $\text{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ que a solução da equação $\text{sgn}(x)\sqrt{|x|} = y$ é única i.e. f^{-1} existe, como pode constatar no figura *png*[10]

    http://professor.ufabc.edu.br/ nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio25_L5.png

    No entanto, f não é derivável em zero, dado que as derivadas laterais $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ dão $+\infty$, pelo que não é possível aplicar o *Teorema da Função Inversa*[11].

    De modo análogo, podemos chegar à mesma conclusão para a função do **exercício**, cuja interpretação gráfica segue abaixo:

    http://professor.ufabc.edu.br/ nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio10_L5.png

[10] **Ficheiro GeoGebra:** Exercicio25_L5.png
[11] versão do teorema, envolvendo funções uniformemente deriváveis.

26. **CONDIÇÕES DO TEOREMA DE ROLLE NÃO PODEM SER REAJUSTADAS**

> EXEMPLO: Função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ do **exercício 28.** da **Lista L4–Limites e Continuidade**.

Veja o *gif animado*:

http://professor.ufabc.edu.br/ nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio21a_L4.gif

Esta função satisfaz a igualdade[12] $f(x) = x$ no intervalo $[0,1[$ e $f(1) = 0 = f(0)$ no pontos $x = 0$ & $x = 1$.

Adicionalmente $f'(x) = 1$ ($\neq 0$) para todos os pontos do intervalo $]0,1[$, ou seja, para esta função o *Teorema de Rolle* não se verifica. Observe que a função f exibe uma descontinuidade no ponto $x = 1$ (ou seja, a condição de continuidade no intervalo $[0,1]$ é mesmo necessária)[13].

Analogamente, podemos reformular a discussão anterior para as funções $g(x) = x$ (função identidade) e $h(x) = |2x - 1|$ no intervalo $[0,1]$. No primeiro caso, falha a condição $g(0) = g(1)$; No segundo caso, a função satisfaz $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, embora não seja derivável no ponto $x = \frac{1}{2}$.

27. **O RECÍPROCO DO 'TEOREMA DE ROLLE' NEM SEMPRE É VERDADEIRO**

> EXEMPLO: Composição da função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, do exemplo anterior com a função $g(x) = x^2$.

Neste exemplo, iremos ilustrar que o fato de $f(x^2) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$ satisfazer a condição $f'(c^2) = 0$ não implica que:

i) f seja contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$;

ii) $f(a^2) = f\left(b^2\right)$ (tal como exigido pelo enunciado do *Teorema de Rolle*).

Com efeito, tome-se $a = -1$ e $b = \frac{3}{2}$. Para este caso, temos $f(a^2) = 1 - \lfloor 1 \rfloor = 0$ e

$$f(b^2) = \frac{9}{4} - \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}.$$

De modo análogo ao **exercício 26.** podemos concluir que a função $f(x^2) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$ não é derivável nos pontos $x = \pm 1$ (sendo o ponto $x = 1$, ponto do intervalo aberto $\left]-1, \frac{3}{2}\right[$). No entanto, $f(x^2)$ é derivável em $x = 0$ e satisfaz a equação[14]

$$f'(0^2) = 2 \times 0 = 0.$$

[12] i.e. todos os pontos do intervalo $[0,1[$ são pontos fixos de $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

[13] Reveja o **exercício 5.** da Lista L4 – Limites e Continuidade.

[14] Você mesmo pode encontrar uma expressão simbólica para a derivada da função $f(x^2) = f(x^2) = x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$ usando o app de GeoGebra https://www.geogebra.org/apps/: Começe primeiro por definir a função f como $\texttt{f(x)} = \texttt{x}^2 - \texttt{floor}(\texttt{x}^2)$. Depois execute o comando `Derivada[f]`.

OBSERVAÇÃO: Como pode ser constatado pelo enunciado e demonstração do *Teorema de Lagrange*, este corresponde a uma reformulação do *Teorema de Rolle*, em que a condição $f(a) = f(b)$ não é exigida a-priori. Para o caso deste teorema, podemos concluir que para o caso de $f(a) \neq f(b)$, que no caso da função f ser contínua no intervalo $[a, b]$, e derivável no intervalo $]a, b[$, é possível determinar um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c)$ coincide com o declive[15] da reta secante do gráfico de f, nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

28. **DESIGUALDADES VIA TEOREMA DE LAGRANGE E TEOREMA DE TAYLOR**

EXEMPLO (A): *'Demonstrar desigualdades envolvendo as funções* $x, \sin(x)$ *e* $\tan(x)$*'*.

(veja **exercício 28**)

As desigualdades envolvendo as funções x, $\sin(x)$ e $\tan(x)$ são de extrema utilidade na dedução do limite fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Com base na *figura png*[16]

http://professor.ufabc.edu.br/~nelson.faustino/Ensino/Geogebra/BM2016/TeoremaConfrontoTrigonometricas.png

podemos facilmente deduzir as seguintes desigualdades:

$$\begin{array}{ll} \sin(x) \leq x \leq \tan(x), & \forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \tan(x) \leq x \leq \sin(x), & \forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]. \end{array}$$

Alternativamente, iremos demonstrar que estas desigualdades podem ser deduzidas com recurso ao *Teorema de Lagrange*. Para tal, começemos por considerar as seguintes funções auxiliares:

$$g(x) = x - \sin(x) \text{ e } h(x) = \tan(x) - x.$$

Estas funções são diferenciáveis no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Adicionalmente, para todo o $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & 1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ h'(x) & = & 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x). \end{array}$$

Como o ponto $(0, 0)$ é um ponto de interseção, comum aos gráficos de $x, \sin(x)$ e $\tan(x)$, faz sentido decompor a nossa análise em intervalos da forma $[0, x]$ e $[-x, 0]$, com[17] $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

[15] Por outras palavras, o *Teorema de Lagrange* permite-nos determinar a equação de uma reta tangente ao gráfico no ponto $(c, f(c))$, paralela à reta secante nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

[16] **Ficheiro GeoGebra :** TeoremaConfrontoTrigonometricas.ggb –Bases Matemáticas (2016).

[17] Reveja o **exercício 18. (f)** da **Lista L2 – Números Reais**.

INTERVALO $[0, x]$**:** Uma vez que as funções auxiliares g e h satisfazem as condições de Lagrange no intervalo $[0, x]$, podemos concluir que existem $c, d \in]0, x[$ (eventualmente distintos) tais que

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(c) \quad \& \quad \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(d).$$

Uma vez que as igualdades[18]

$$g(0) = h(0) = 1 \;\&\; \text{sgn}(g'(c)) = \text{sgn}(h'(d)) = +1$$

são verdadeiras para todos os pontos do intervalo $]0, x[$ que $g(x) \geq 0$ e $h(x) \geq 0$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ concluímos que as desigualdades $\sin(x) \leq x$ e $x \leq \tan(x)$ são válidas.

INTERVALO $[-x, 0]$**:** De modo análogo ao caso anterior, é possível garantir a existência de duas constantes $c, d \in]0, x[$ tais que

$$\frac{-g(-x)}{x} = \frac{g(0) - g(-x)}{0 - (-x)} = g'(c) \quad \& \quad \frac{-h(-x)}{x} = \frac{h(x) - h(0)}{0 - (-x)} = h'(d).$$

e adicionalmente, que sgn$(g(-x)) =$ sgn$(h(-x)) = -1$, para todo o $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$.

Finalmente, usando o fato que g e h são funções ímpares, concluímos que sgn$(g(-x)) = -1$ conduz-nos à desigualdade

$$\sin(x) \geq x$$

no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, ao par que sgn$(h(-x)) = -1$ conduz-nos à desigualdade

$$x \geq \tan(x)$$

no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

EXEMPLO (B): *'Demonstrar desigualdades envolvendo as funções e^x e $(1 + x)^n$'*.

Para $n = 1$, esta demonstração pode ser facilmente deduzida considerando unicamente argumentos geomêtricos:

O gráfico[19] de $1 + x$ interseta o gráfico de e^x no ponto $(0, 1)$, e que para pontos de $(x, y) \neq (0, 1)$, o gráfico de e^x encontra-se sempre acima do gráfico de $1 + x$, donde facilmente se conclui que $e^x \geq 1 + x$.

Para valores naturais de n superiores a 1 ($n > 1$), a desigualdade $e^x \geq (1+x)^n$ não se verifica para todo o $x \in \mathbb{R}$, como se pode facilmente visualizar com base no *gif animado*[20]

[18] De acordo com a definição da função sinal, sgn$(f(x)) = +1$ quando $f(x) < 0$ e sgn$(f(x)) = -1$ quando $f(x) > 0$.
[19] $y = 1 + x$ é a equação da reta tangente de e^x no ponto $x = 0$.
[20] **Ficheiro GeoGebra:** Exercicio28_L5.gif

http://professor.ufabc.edu.br/ nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio28_L5.gif

No entanto, ambas as funções também se intersetam no ponto de coordenadas $(0, 1)$. Tendo esta informação como referência, iremos considerar uma função auxiliar f que satisfaça a condição $f(0) = 0$ nos intervalos da forma $[0, x]$ ($x > 0$) e $[x, 0]$ (para o caso de $x < 0$). Esta função auxiliar é dada por

$$f(x) = e^x - (1 + x)^n.$$

Observe-se que função satisfaz a condição $f(0) = 0$ uma vez que $e^0 = 1 = (0 + 1)^n$.

Esta função é derivável em $[0, t]$, uma vez que é derivável em todo o $\mathbb{R}$. Adicionalmente, para pontos $c \in]0, t[$ temos que

$$f'(c) = e^c - n(1 + c)^{n-1}.$$

Como podemos constatar acima, o problema de determinar a desigualdade entre e^x e $(1+x)^n$ persiste, uma vez que f' é uma *função não linear*, donde a aplicação do *Teorema de Lagrange* não nos permite chegar a uma desigualdade imediata.

Uma forma de contornar este problema passa por calcular o polinômio de Taylor de ordem n da função f em torno do ponto $x = 0$.

Observe-se que a derivada de ordem n de e^x dá sempre e^x, e que $(1 + x)^n$ é um polinômio de grau n. Com base no **exercício 16.** podemos facilmente concluir que

$$f^{(k)}(x) = e^x - \frac{n!}{(n-k)!}(1 + x)^{n-k}$$

para valores de $1 \leq k \leq n$, e

$$f^{(k)}(x) = e^x$$

para valores de $k > n$.

Em particular, para $|x| < \delta$ podemos representar *localmente* f como[21]

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left[1 - \frac{n!}{(n-k)!}\right]x^k + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

Decorre facilmente do fato da desigualdade $n! \geq (n-k)!$ se verificar para todo o $0 \leq k \leq n$, ($n > 1$) que a desigualdade $f(x) \leq 0$ é sempre satisfeita para valores de $x > 0$.

Portanto, é possível encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$e^x \leq (1 + x)^n, \text{ para todo o } 0 \leq x < \delta, \text{ e para todo o } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

OBSERVAÇÃO I: Com base no **exercício 15.**, podemos demonstrar, de modo análogo ao que foi feito no exemplo anterior, que para valores de $0 < t < 1$:

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = f^{(n+1)}(tx) > 0,$$

[21] O caso $k = 0$ foi excluído do somatório, uma vez que $f(0) = 0$, por construção.

Em particular, a desigualdade $e^x > n! - 1$, para todo o $x > 0$, e para todo o $n \in \mathbb{N}$.

OBSERVAÇÃO II: Como podemos constatar graficamente, a partir do *gif animado*[22]

http://professor.ufabc.edu.br/ nelson.faustino/Ensino/Geogebra/AR2017/Exercicio28_L5.gif
a desigualdade anterior apenas é válida para o caso $n = 2$, quando o valor de δ não excede o valor da raiz positiva de $f(x)$. Para $x < 0$ e $n = 2$, temos de tomar ainda em linha de conta que a função f tem três raízes.

OBSERVAÇÃO III: Para valores de $x < 0$, podemos facilmente estabelecer uma desigualdade, envolvendo as funções e^x e $(1 + x)^n$ é um processo não trivial, pois para o caso de n ser par, os gráficos das funções e^x e $(1 + x)^n$ possui mais um ponto de interseção, para além do ponto $(0, 1)$.

OBSERVAÇÃO IV: Uma estratégia de resolução alternativa, pode ser realizada com recurso à linearização da função auxiliar $f(x) = (1 + x)^n e^{-x}$, com recurso à função $\ln$ (logaritmo Neperiano):

$$\ln(f(x)) = n\ln(1 + x) - x \quad \text{para valores} \quad x > -1.$$

Calculando a derivada da função $f(x)$, obtemos[23]

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{1 + x} - 1.$$

Da desigualdade acima, retiramos que para valores de $n > 1 + x$, a função $\ln(f(x))$ é monótona crescente, e que para valores de $n < 1 + x$, a função $\ln(f(x))$ é monótona decrescente.

Usando a função truncagem $\lfloor \cdot \rfloor$, podemos concluir por aplicação direta do *teorema de Lagrange*, que a desigualdade[24]

$$n\ln(1 + x) > x \Longleftrightarrow (1 + x)^n > e^x$$

é verdadeira para $n \geq \lfloor 2 + x \rfloor$, ao par que a desigualdade

$$n\ln(1 + x) < x \Longleftrightarrow (1 + x)^n < e^x$$

é verdadeira para $n \leq \lfloor x \rfloor$.

29. **FÓRMULA DE TAYLOR 'POR DETRÁS DO ESPELHO'**

PONTO DE PARTIDA: *Fórmula de Taylor vs. Interpolação Polinomial.*

Uma forma simples de introduzir a fórmula de Taylor, consiste em definir, para qualquer função de classe C^n num intervalo $I = [a, b]$, $(f \in C^n(I))$, e para qualquer polinômio[25] P_n

[22] **Ficheiro GeoGebra:** Exercicio28_L5.gif

[23] O rácio $\frac{f'(x)}{f(x)}$ é conhecida na literatura por *derivada logarítmica*.

[24] A função $\ln(x)$ é monótona crescente.

[25] Veja **exercício** 16.

de grau n, a função erro

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x-a).$$

Como forma de garantir que as derivadas de ordem k de $f(x)$ e $P_n(x-a)$ $(0 \leq k \leq n)$ coincidam em $x = a$, iremos assumir que as seguintes $n+1$ condições de interpolação são satisfeitas:

$$f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(0), \quad \text{para todos os} \quad 0 \leq k \leq n.$$

OBSERVAÇÃO I: Da condição anterior, podemos imediatamente concluir o seguinte:

i) Os coeficientes de ordem k do polinômio P_n são unicamente determinados pela fórmula

$$p_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

ii) Para a função $R_n(x)$, as seguintes $n+1$ condições de interpolação são automaticamente satisfeitas:

$$R_n^{(k)}(a) = 0, \quad \text{para todos os} \quad 0 \leq k \leq n.$$

SALTO INFINITESIMAL: *Derivadas Nulas vs. Limites Infinitesimais*.

De acordo com o LEMA demonstrado na Seção 3 do CAPÍTULO VIII[26] do livro *Curso de Análise, vol. 1*, de Elon Lages Lima, as $n+1$ condições de interpolação

$$R_n^{(k)}(a) = 0, \quad \text{para todos os} \quad 0 \leq k \leq n.$$

são equivalentes à condição de limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

condição essa que nos permite deduzir a seguinte representação

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x).$$

Esta fórmula corresponde à fórmula de Taylor de f de grau n, em torno do ponto $x = a$. Da condição de limite resulta que para todo $\varepsilon > 0$, podemos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$|x-a| < \delta \implies \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \varepsilon |x-a|^n.$$

Esta última fórmula é muitas vezes citada na literatura como *a melhor aproximação do termo* n [da fórmula de Taylor][27].

[26] Página 221 em diante.

[27] Esta última formulação é de extrema importância na resolução do **exercício 21**

UNICIDADE $(2 = 1)$: *No caso de $f^{(n)}$ derivável em um intervalo aberto, a função $R_n(x)$ é unicamente determinada.*

Para provarmos a unicidade de $R_n(x)$, comecemos por considerar um polinômio $S_{n+1}(x)$ de grau $n+1$, dado pela expressão

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} s_k (x-a)^k.$$

Assumindo que $f^{(n)}$ é derivável em $]a, b[$, comecemos por impor as condições abaixo:

$$S_{n+1}^{(k)}(a) = 0, \quad \text{para todos os} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$S_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)}{b-a}, \qquad \text{para} \qquad k = n+1.$$

Das condições acima, resulta o seguinte:

i) S_{n+1} é um polinômio mônico de grau $n+1$ que satisfaz a condição de limite

$$\lim_{x \to a} \frac{S_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

i.e. $S_{n+1}(x) = s_{n+1}(x-a)^{n+1}$.
ii) O coeficiente s_{n+1} é unicamente determinado pela fórmula

$$s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \, \frac{f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)}{b-a} (x-a)^{n+1}.$$

Adicionalmente, no caso de $f^{(n)}$ ser derivável em $]a, b[$, podemos garantir que as condições para aplicação do *Teorema de Lagrange* estão garantidas. Em particular, e com base no **exercício 15.**, que existe um $c = a + t(b-a)$ $(0 < t < 1)$ tal que

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)}{b-a}.$$

Da igualdade anterior e da identidade $R_n^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) = S_{n+1}^{(n+1)}(x)$, concluímos que $R_n^{(n+1)}(x) = S_{n+1}^{(n+1)}(x)$ é a função constante, e por conseguinte, $R_n(x)$ é única, uma vez que

$$R_n(x) = S_{n+1}(x).$$

Em suma:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)}{b-a}(x-a)^{n+1}.$$

Com esta construção, determinámos uma demonstração para a *Fórmula de Taylor infinitesimal* (TEOREMA 9 do CAPÍTULO VIII do livro *Curso de Análise, vol. 1*, de Elon Lages Lima).

PONTO DE ENCONTRO: *Fórmula de Taylor vs. Regra de L' Hôpital.*
(versão simplificada do EXEMPLO 27., do CAPÍTULO VIII
do livro *Curso de Análise, vol. 1* de Elon Lages Lima)

De acordo com a construção obtida anteriormente, mostrámos que fórmula

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

é sempre satisfeita, desde que

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Adicionalmente, mostrámos que para o caso de $f^{(n)}$ ser derivável em um intervalo aberto que R_n é unicamente determinado com base fórmula mencionada no **exercício 15.**

Suponhamos agora que queremos calcular o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)},$$

onde g e h satisfazem a seguinte condição para números naturais p e q:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^p} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(x-a)^q} = 0,$$

i.e. $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(p)}(a) = 0$ & $h(a) = h'(a) = \ldots = h^{(q)}(a) = 0$.

No caso de $g^{(p)}$ e $h^{(q)}$ serem deriváveis no intervalo aberto, concluímos pela construção deduzida anteriormente que existem $\delta_g, \delta_h > 0$ tais que

$$|x-a| < \delta_g \implies g(x) = \frac{g^{(p+1)}(a + s(x-a))}{(p+1)!}(x-a)^{p+1} \quad \text{com} \quad 0 < s < 1$$
$$|x-a| < \delta_h \implies h(x) = \frac{h^{(q+1)}(a + t(x-a))}{(q+1)!}(x-a)^{q+1} \quad \text{com} \quad 0 < t < 1.$$

Escolhendo $\delta = \min\{\delta_g, \delta_h\}$, concluímos que

$$|x-a| < \delta \implies \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{(q+1)!}{(p+1)!} \frac{g^{(p+1)}(a + s(x-a))}{h^{(q+1)}(a + t(x-a))}(x-a)^{p-q}.$$

Adicionalmente, para o caso de $g^{(p+1)}$ e $h^{(q+1)}$ serem funções contínuas em $x = a$, e $h^{(q+1)}(a) \neq 0$, é possível obter as seguintes identidades, envolvendo limites:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \begin{cases} 0 & , \text{se } p > q \\ \frac{g^{(p+1)}(a)}{h^{(p+1)}(a)} & , \text{se } p = q \\ \pm\infty & , \text{se } p < q \end{cases} .$$

30. **O ÚLTIMO EXEMPLO**

'*A fórmula de Taylor não converge para a função do* **exercício 3**'.

Com efeito, decorre automaticamente da definição que $f'(0) = 0$ é uma consequência direta do *Teorema do Sanduíche*, uma vez que 0 é ponto de acumulação e $e^{\frac{1}{x^2}} > \frac{1}{x^2}$, para todo o $x \neq 0$:

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \right| \leq \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Suponhamos agora, por hipótese de indução, que $f^{(k)}(0) = 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.
Como vimos anteriormente, a hipótese de indução anterior é equivalente a termos

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(tx)}{(tx)^{n-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = 0 \;\; (0 < t < 1).$$

Usando novamente a desigualdade $e^{\frac{1}{x^2}} > \frac{1}{x^2}$, obtemos pelo *Teorema de Lagrange que*

$$f(x) = f'(tx)x, \text{ para algum } 0 < t < 1,$$

donde resulta que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = t^{n-1} \lim_{x \to 0} \frac{f'(tx)}{(tx)^{n-1}} = 0.$$

Daqui conclui-se que $f^{(n)}(a) = 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, a função erro $R_n(x)$ é dada para $x \neq 0$, pela expressão

$$R_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

que por si só converge sempre para $+\infty$ (deveria convergir para 0).

Última atualização: 24 de janeiro de 2017