FRENTE

I.	II.	III.	$\sum$

ANÁLISE NA RETA (CURSO DE VERÃO 2017)

Prova — 30/01/2017 — Teórica

NOME:______________________________ **EMAIL:**____________________

A parte teórico-prática da prova encontra-se no VERSO

I. [1.50 pts] Demonstre apenas um dos resultados enunciados abaixo. Não se esqueça de indicar na folha de prova o número da questão que escolheu.

1) DENSIDADE DE $\mathbb{Q}$ EM $\mathbb{R}$
Mostre que para todos os $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, existe um $z = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

2) SUPREMO DE UMA SEQUÊNCIA MONÓTONA
Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente e majorada de números reais, então ela é convergente para algum $x \in \mathbb{R}$. Adicionalmente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

II. [2.00 pts] Demonstre apenas um dos resultados enunciados abaixo. Não se esqueça de indicar na folha de prova o número da questão que escolheu.

3) SEQUÊNCIAS DE CAUCHY
Mostre que a sequência de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se e somente se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

4) TEOREMA DE ROLLE
Mostre que se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ que satisfaz a condição $f(a) = f(b)$, então existe um $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

III. [1.50 pts] Demonstre apenas um dos resultados enunciados abaixo. Não se esqueça de indicar na folha de prova o número da questão que escolheu.

5) CONJUNTOS ABERTOS
Para uma família de n subconjuntos, não vazios de $\mathbb{R}$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ respetivamente, se tem a igualdade

$$\text{int}(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) = \text{int}(X_1) \cap \text{int}(X_2) \cap \ldots \cap \text{int}(X_n).$$

6) TEOREMA DO SANDUÍCHE PARA LIMITES
Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, f, g e h três funções de domínio X, e a um ponto de acumulação de X. Se para todo o $x \in X \setminus \{a\}$, se verificar $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e, além disso, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

VERSO

IV.	V.	VI.	VII.	$\sum$

ANÁLISE NA RETA (CURSO DE VERÃO 2017)

Prova — 30/01/2017 — Teórico-Prática

NOME:________________________________ **EMAIL:**____________________

A parte Teórica da prova encontra-se na FRENTE

IV. [1.25 pts] Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo do seguinte conjunto numérico:

$$X = \left\{ \frac{1-n}{1+n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

V. [1.25 pts] Mostre que a função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definida pontualmente por $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ não é uniformemente contínua.
DICA: Considere a sequência $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, e o exercício **II. 3)**

VI. [1.25 pts] Mostre analiticamente que no intervalo $\left]-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$, as desigualdades abaixo são sempre satisfeitas:

$$\cos\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\pi}{6} - \frac{\pi x}{4} \leq \text{cotg}\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}\right).$$

VII. [1.25 pts] Mostre que existem $C, \delta > 0$ tais que

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right| \leq Cx^4, \quad \forall_{x\in]-\delta,\delta[}.$$