



Universidade Federal do ABC

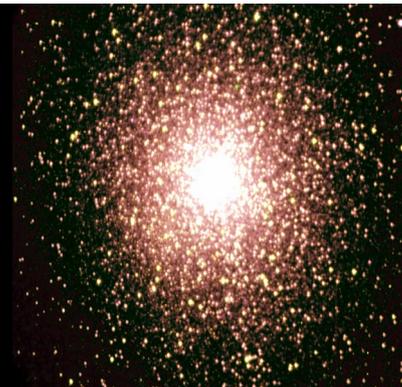
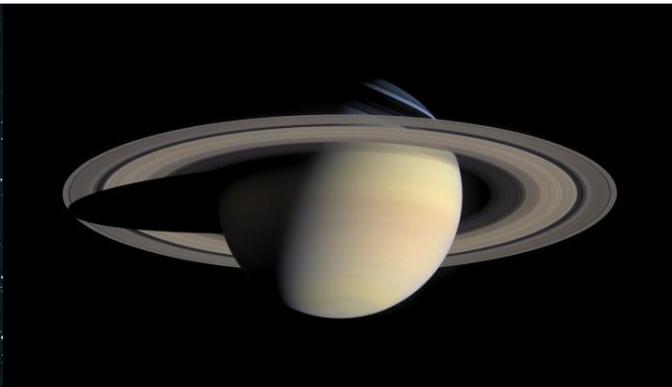
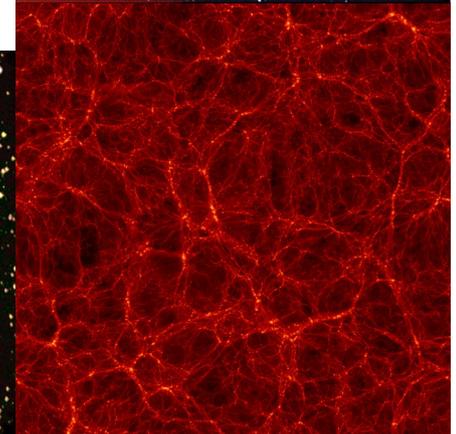
# Noções de Astronomia e Cosmologia

## 10. A Visão de Einstein: Relatividade

Prof. Pieter Westera

[pieter.westera@ufabc.edu.br](mailto:pieter.westera@ufabc.edu.br)

<http://professor.ufabc.edu.br/~pieter.westera/Astro.html>

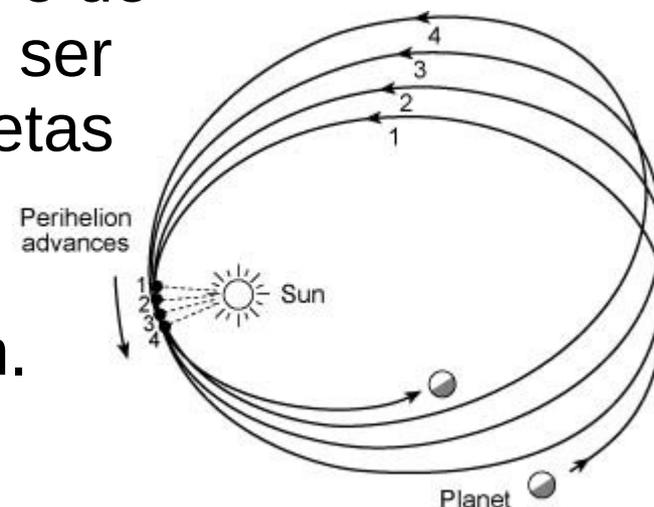
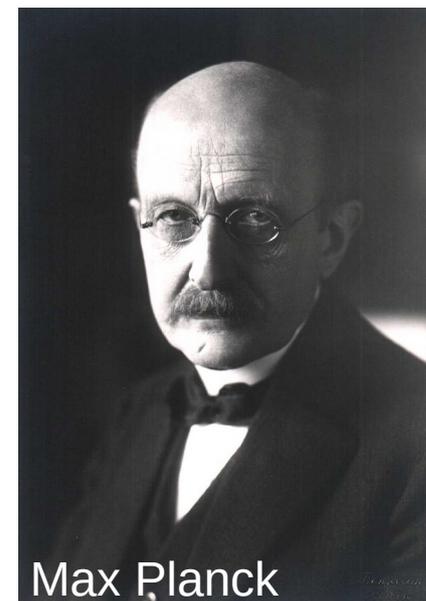


# Relatividade

Em 1874, um dos professores de Max Planck, Philip Jolly, desaconselhou o aluno dele de estudar física, por que “não tinha mais nada para ser descoberto”.

Só tinha alguns detalhes ainda não explicadas, como a **fonte** de **energia** do **Sol** ( $\Rightarrow$  aula Sol), e o excesso da **precessão** do **periélio** da **órbita** de **Mercúrio** ( $43''/\text{século}$ ; a precessão total é de  $9'34''/\text{século}$ , mas os demais  $8'49''$  podiam ser explicados pela influência dos outros planetas e pela forma oblata do Sol), problemas, cuja resolução levou a um novo ramo da física, a **Teoria da Relatividade** de Einstein.

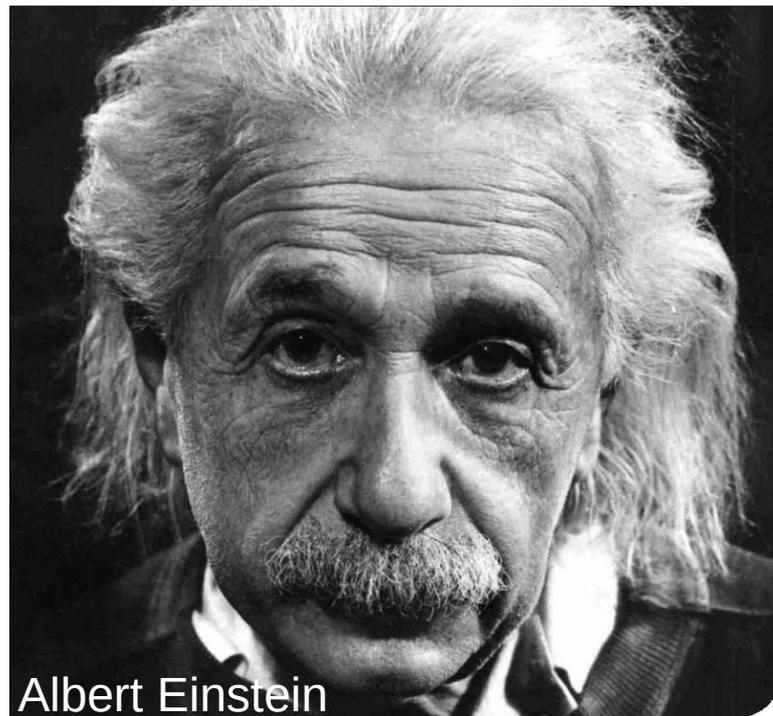
O próprio Max Planck acabou se tornando um dos fundadores da mecânica quântica.



# Relatividade

A **Teoria da Relatividade** foi desenvolvida por **Albert Einstein** de 1905 (Relatividade **Restrita**) a 1915 (Relatividade **Geral**).

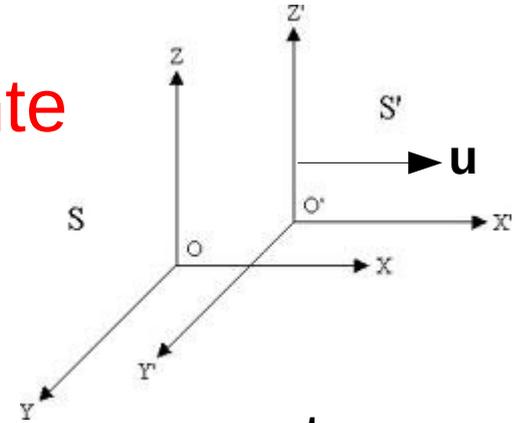
Ela afirma que as **propriedades** (geometria, eixo do tempo) de **espaço** e **tempo** dependem da situação do **observador**, do seu **estado** de **movimento** (velocidade, aceleração), e a sua **posição** em relação a **massas altas**.



Albert Einstein

# A Transformação de Galileu

Considerando um sistema de inércia  $S'$  se movimentando com velocidade constante  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  em relação a um sistema  $S$ , as origens dos dois sistemas coincidindo em  $t = 0$ .



=> pode-se transformar as coordenadas de um ponto  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e o tempo usando a seguinte transformação:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$$

$$\Rightarrow x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t \quad (\text{simultaneidade e tempo absolutos}),$$

que é a transformação de Galileu.

# A Transformação de Galileu

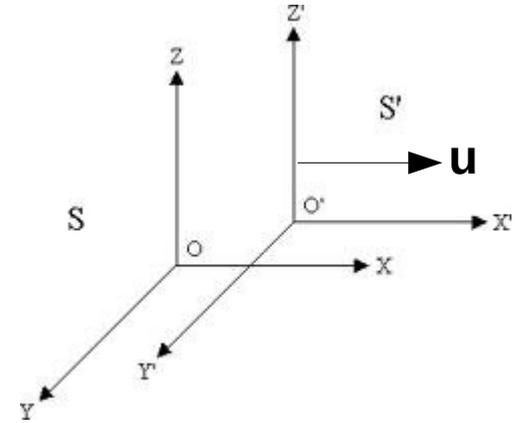
**Velocidades** se transformam assim:

$$\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt' = d(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)/dt = d\mathbf{r}/dt - \mathbf{u}t/dt = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

$$\Rightarrow v'_x = v_x - u$$

$$v'_y = v_y$$

$$v'_z = v_z$$



e acelerações:  $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt' = d(\mathbf{v}-\mathbf{u})/dt = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$

$\Rightarrow$  **Acelerações** e, com isto, as **Leis de Newton** são **invariantes** na **Transformação de Galileu**.

$\Rightarrow$  **Princípio de invariância de Galileu**:

As **leis fundamentais da Física** são as **mesmas** em **todos** os **sistemas de referência inerciais**.

**Todos** os **sistemas de referência inerciais** são **equivalentes**.

**Não** há um **sistema de referência absoluto**.

# A Transformação de Galileu

Porém (final do século XIX):

Para as Leis do **Eletromagnetismo**, o **princípio** de **invariância** de **Galileu** parece falhar.

Exemplo: A força magnética  $\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  aplicada em uma carga muda numa Transformação de Galileu.

=> As Leis do **Eletromagnetismo** parecem funcionar só em **um** determinado **sistema** de **referência**, que chamaram de **éter**.

Em particular, **ondas eletromagnéticas** devem se **propagar** pelo **éter** com a **velocidade**

$$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 299\,792\,458 \text{ m/s},$$

que pode ser **derivada** das **Leis** de **Maxwell**.

=> **Conflito** com o **Princípio** de **invariância** de **Galileu**.

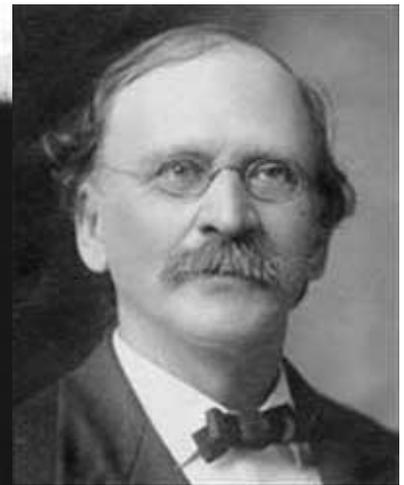
# A Transformação de Galileu

## O Experimento de Michelson-Morley

Em 1887 **Michelson** e **Morley** tentaram medir a **velocidade** da **Terra** em **relação** ao **éter**, medindo a **velocidade** da **luz** em **várias direções** e até em **várias épocas** do ano.



Albert Abraham  
Michelson



Edward Williams  
Morley

Eles encontraram um **resultado nulo**, quer dizer:

A **velocidade** da **luz** era a **mesma** em **todas** as **direções**, e **independente** da **velocidade** do **referencial** (a Terra), em **contradição** com a **Transformação** de **Galileu**  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ .

=> **Crise** no **paradigma Newtoniano**.

# Os Postulados de Einstein

Isto levou Einstein a fazer os seguintes dois **postulados** para a nova teoria:

- **O Princípio da Relatividade**: As **leis** da **física** são as **mesmas** em **todos** os **sistemas** de **referência inerciais**.
- **A Invariância da Velocidade da Luz**: A **luz** se movimenta pelo vácuo com uma **velocidade constante**  $c$ , que é **independente** do **movimento** da **fonte** da luz, ou do **observador**.

Outra condição:

- **Princípio de correspondência**: Para **velocidades baixas**,  $u \ll c$ , a nova teoria deve tender à **teoria newtoniana**.

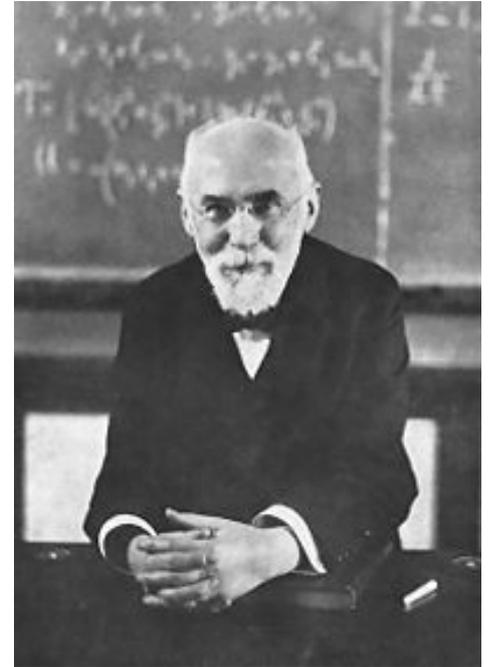
=> Encontrar novas **Transformações** que garantem isto.

# A Transformação de Lorentz

Na **Relatividade Restrita**, a transformação de coordenadas na **troca** de **referencial**, i. e. no caso “Sistema  $S'$  se movimentando com  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  em relação a  $S$ ” é realizada pela

**Transformação de Lorentz** (1904):

Esta transformação é às vezes chamada **boost** pela velocidade  $\mathbf{u}$  (neste caso, na direção dos  $x$ ).



Hendrik Antoon  
Lorentz (1853-1928)

# A Transformação de Lorentz

Mesma situação: Sistema  $S'$  se movimentando com  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  em relação a  $S$ .

Demos uma olhada nas seguintes transformações, chamadas **Transformações de Lorentz**:

$$x' = \gamma \cdot (x - ut)$$

$$y' = y$$

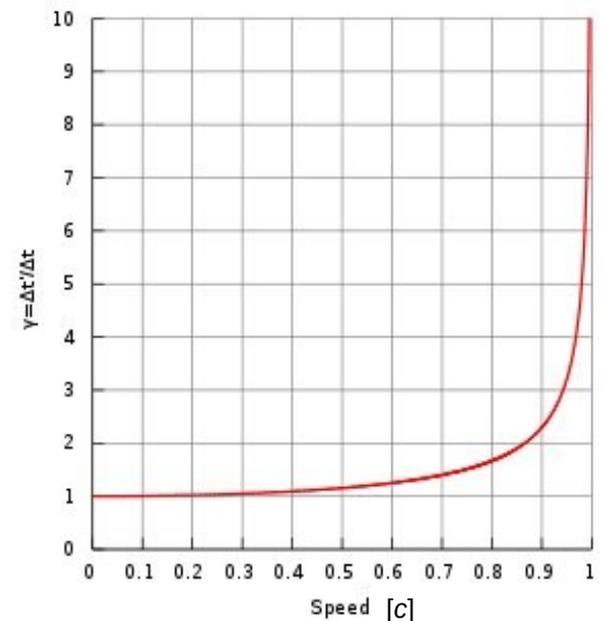
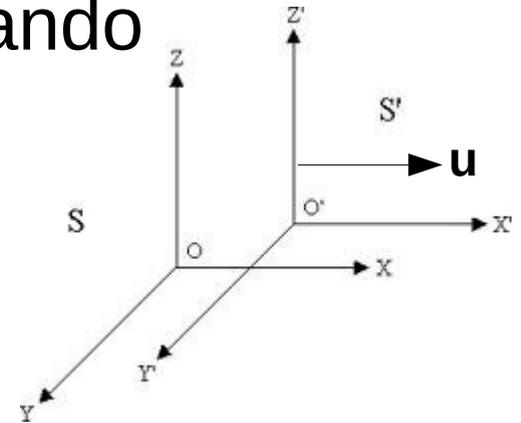
$$z' = z$$

$$t' = \gamma \cdot (t - ux/c^2),$$

onde  $\gamma := 1/\sqrt{1 - u^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$   
= **fator de Lorentz**,  $\beta := u/c$

$$\gamma(u=0) = 1$$

$$\gamma(u=c) = \infty$$



# A Transformação de Lorentz

Exercício: mostre que, aplicando esta transformação em  $(x',y',z',t')$  usando  $-u$  em lugar de  $u$ , obtém-se  $(x,y,z,t)$  de volta.

=> As **transformações inversas** são as **mesmas**, substituindo  $u$  por  $-u$ , como deveria ser, já que  $S$  se movimenta com  $-u$  em relação a  $S'$ .

Exercício 2: Mostre que, para  $u \ll c$ , estas transformações se tornam as transformações de Galileu.

# A Transformação de Lorentz

É útil introduzir o **Diagrama Espaço-Tempo**

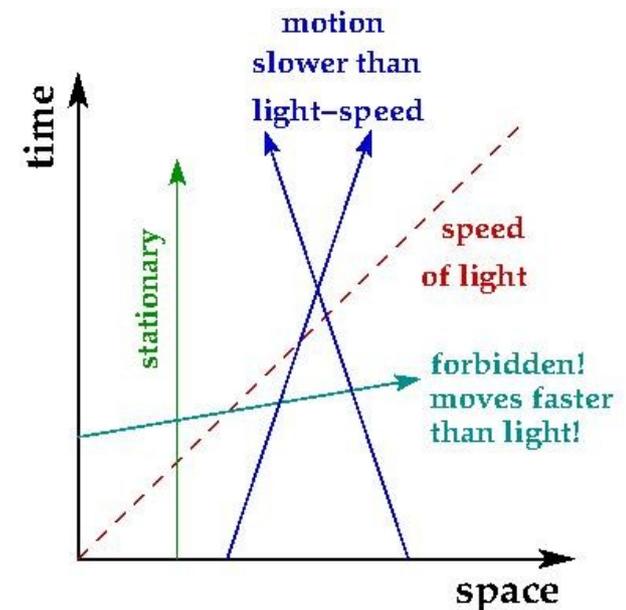
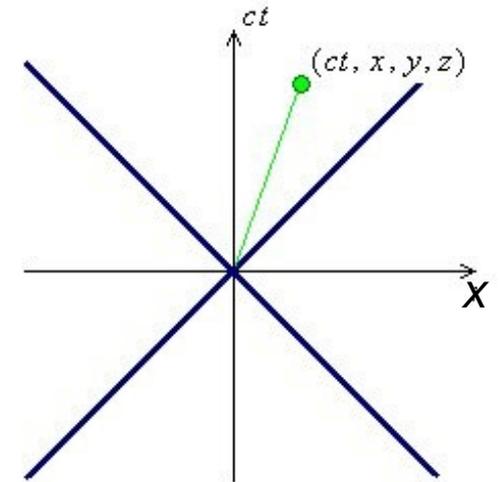
eixo **horizontal**:  $x$

eixo **vertical**:  $t$ , multiplicado pela velocidade da luz,  $c$ , para que os eixos tenham as mesmas unidades (de distância).

$y$  e  $z$  são **ignorados**, já que tudo que é interessante acontece nas dimensões  $x$  e  $t$ .

**Retas** no diagrama representam objetos viajando com **velocidades constantes**, quanto **mais rapidamente**, tanto **menos inclinadas**.

Uma inclinação de  $45^\circ$  corresponde à **velocidade da luz**.



# A Transformação de Lorentz

Dando uma olhada de novo para estas transformações:

$$x' = \gamma \cdot (x - ut)$$

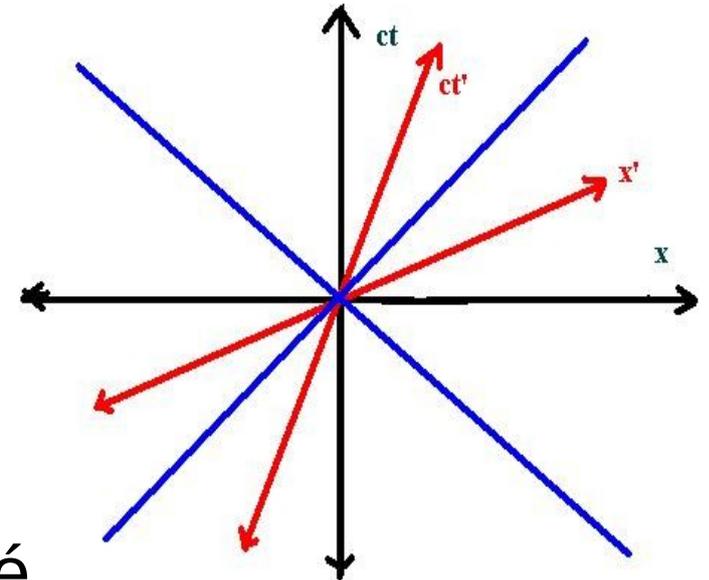
$$t' = \gamma \cdot (t - ux/c^2)$$

Elas **misturam espaço** ( $x$ ) e **tempo**!

O que pro **observador** em  $S$  é **espaço** é (parcialmente) **tempo** pro **observador** em  $S'$ , e vice-versa.

Eventos que acontecem na **mesma posição** para  $S$ , **não** necessariamente acontecem na **mesma posição** para  $S'$ .

Eventos que são **simultâneos** para  $S$ , **não** necessariamente são **simultâneos** para  $S'$ .



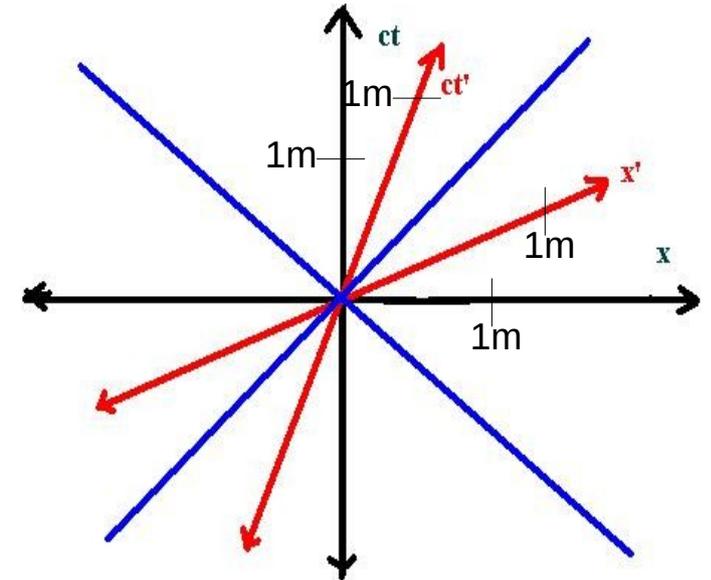
# A Transformação de Lorentz

As quatro dimensões  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$  (multiplicado por  $c$ ) juntos definem um espaço **4-dimensional**, o **Espaço-Tempo**.

Definimos como **evento** um ponto no Espaço-Tempo,  $(x,y,z,ct)$ .

!! Vários autores usam  $t$  como zero-ésima coordenada (e não como quarta):  $(ct,x,y,z)$ .

!! Na transformação de um sistema para outra, as **escalas não são conservadas**.



# A Transformação de Lorentz

E a Invariância da Velocidade da Luz?

tomando um **fóton**, que estava na origem de  $S$  e  $S'$  em  $t = 0$ , viajando na direção  $+x$ .

Após um tempo  $\Delta t$ , ele está em  $(\Delta x = c\Delta t, 0, 0)$ .

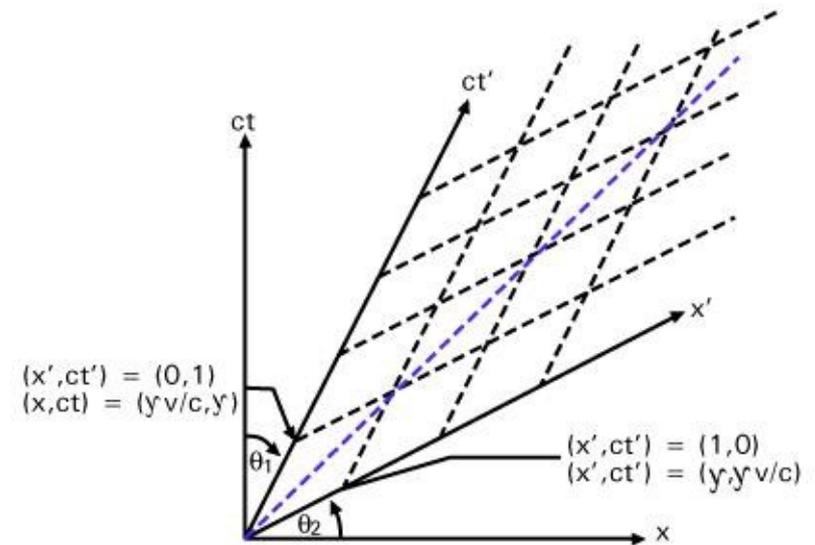
E no sistema  $S'$ :

$$\Delta t' = \gamma \cdot (\Delta t - u\Delta x/c^2), \quad \Delta x' = \gamma \cdot (\Delta x - u\Delta t)$$

=> neste sistema, o fóton viajou com velocidade

$$\Delta x'/\Delta t' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) / \gamma(\Delta t - u\Delta x/c^2) = (c\Delta t - u\Delta t) / (\Delta t - uc\Delta t/c^2) = c$$

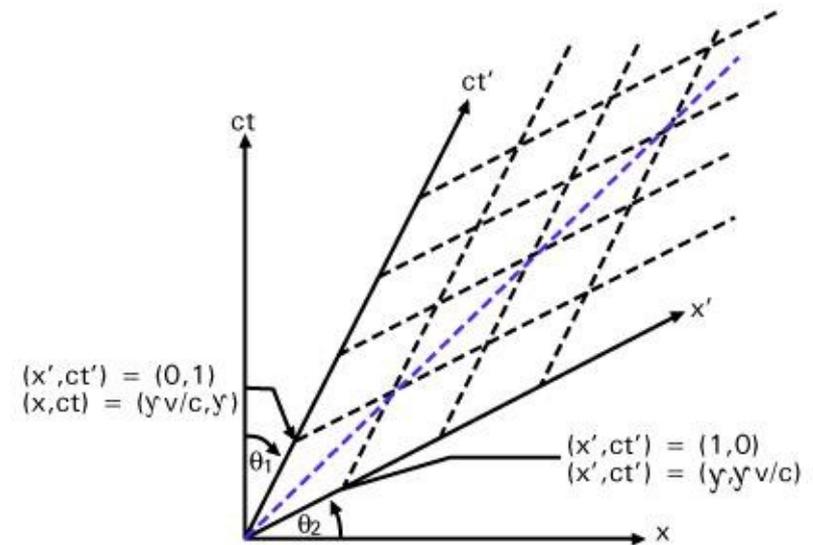
**Também** com  $c$ !



# A Transformação de Lorentz

=> O postulado da **invariância** da **velocidade** da **luz** é **satisfeito**, pelo menos para luz viajando na direção  $+x$ , e dá pra mostrar para luz viajando em qualquer direção.

Exercício: Mostre a invariância da velocidade da luz para luz viajando na direção  $-x$  e para luz viajando na direção  $y$ .



# Relatividade Restrita

## Dilatação do Tempo

Supondo uma lâmpada que viaja junto com  $S'$  ( $S'$  é seu sistema de repouso), e que pisca duas vezes em  $t'_1$  e  $t'_2$ :

Em  $S$ :  $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \cdot (t'_2 - t'_1 + (x'_2 - x'_1)u/c^2)$

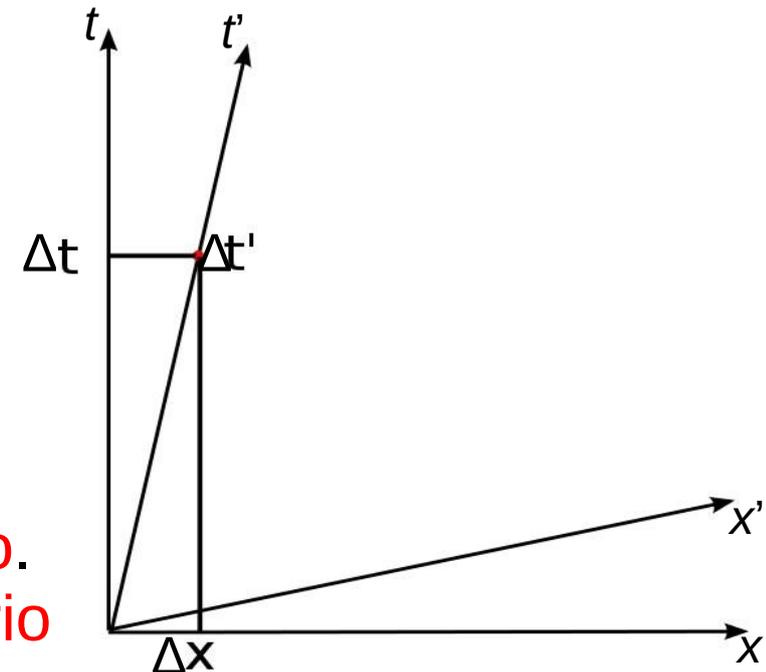
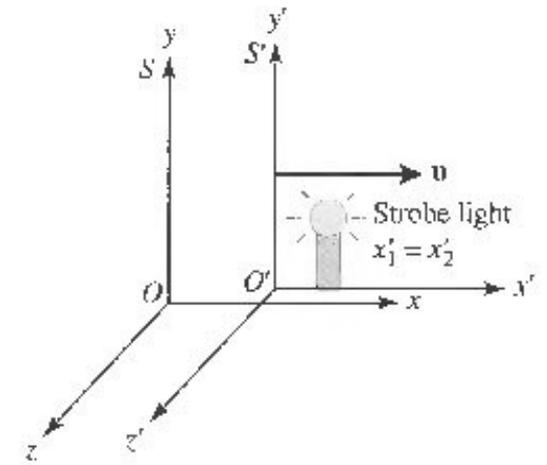
mas  $x'_2 - x'_1 = 0$ , já que  $S'$  viaja junto.

$\Rightarrow \Delta t = \gamma \cdot (t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t' \geq t'$

Em  $S$  passa **mais tempo** entre os pulsos.

$\Rightarrow$  **Dilatação do tempo.**

O **sistema de repouso** é aquele, naquele o **tempo** entre os **dois eventos** é o **mais curto**. O tempo deste sistema,  $t'$ , é o **tempo próprio** da lâmpada.



# Relatividade Restrita

## Contração de Comprimentos

Supondo uma barra com comprimento  $L'$  viajando junto com  $S'$  (seu sistema de repouso),  $L'$  obviamente é  $x'_2 - x'_1$ , a distância entre suas extremidades, cujas posições são constantes em  $t'$ :

$$\Rightarrow L' = x'_2 - x'_1 = \gamma \cdot (x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1))$$

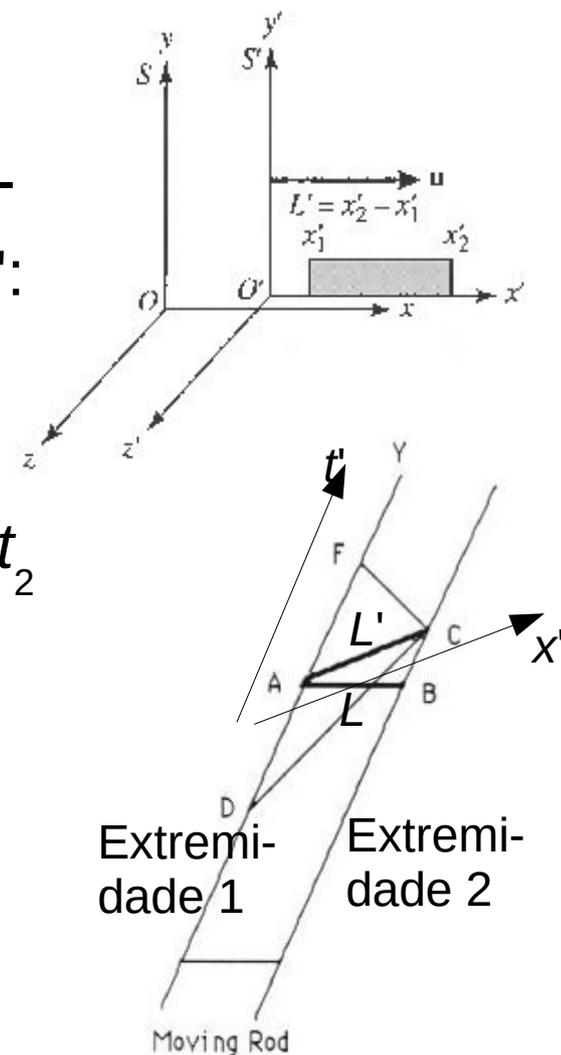
Para saber o comprimento em  $S$ ,  $L$ , temos que medir  $x_2 - x_1$  em  $S$  **ao mesmo tempo**, quando  $t_1 = t_2$

$$\Rightarrow L' = \gamma \cdot (x_2 - x_1 - u(t_2 - t_1)) = \gamma L \Rightarrow L = \gamma^{-1} L' \leq L'$$

$\Rightarrow L$  é **mais curto** que  $L'$ .

$\Rightarrow$  **Contração do comprimento.**

O **sistema de repouso** é aquele, naquele  $L$  é o **mais comprido**. O tempo deste sistema,  $t'$ , é o **tempo próprio** da barra.



# Relatividade Restrita

## Dilatação do Tempo e Contração de Comprimentos

Formulado de jeito popular:

“relógios em movimento rodam mais lentamente”, resp.

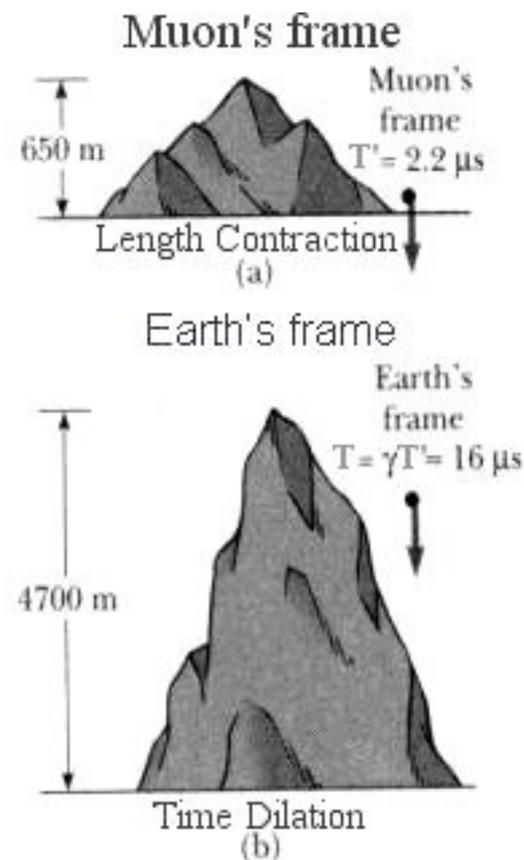
“réguas em movimento são mais curtas”.

Os dois efeitos são **complementares**.

Exemplo: múons,  $\mu$ , têm tempo de vida de  $2.2 \mu\text{s}$ .

=> Os  $\mu$  cósmicos, produzidos por raios cósmicos no topo da atmosfera da Terra, e descendo com velocidade  $0.9952 \cdot c$ , deveriam ter decaído até chegar na Terra, mas eles sobrevivem e são detectadas por causa da **Dilatação do Tempo**.

No referencial deles, a sobrevivência se deve à **Contração do caminho** até a Terra.



# Relatividade Restrita

## O Efeito Doppler para a Luz

Voltando para a fonte de luz em  $S'$ , tomando agora como  $\Delta t'$  um **período de oscilação** da **radiação** da lâmpada:  $\Delta t' = T = 1/\nu_0$ , ( $\nu_0$  = freq. de repouso):

$$t_2 - t_1 = \gamma/\nu_0.$$

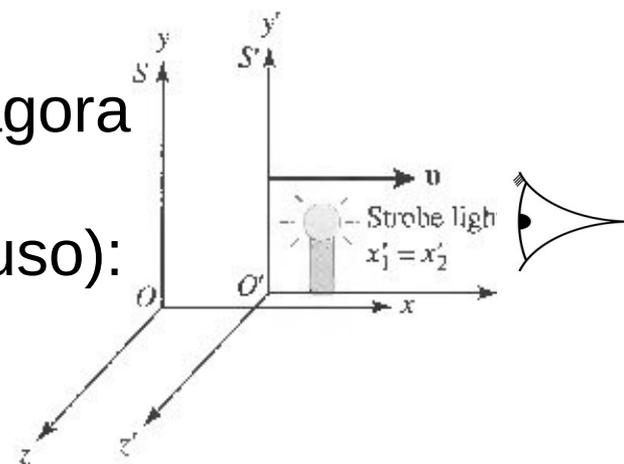
Mas  $t_1$  e  $t_2$  são os momentos da **emissão** das **frentes de onda** pela fonte.

Para calcular a diferença entre os momentos da **chegada** no observador em  $S$ , temos que **adicionar** a **diferença** (aqui negativa) de **caminho**,  $(t_2 - t_1) \cdot u$ , **dividida** pela **velocidade** do **sinal**,  $c$ .

$$\Delta t_{\text{obs}} = \nu_{\text{obs}}^{-1} = t_2 - t_1 + (t_2 - t_1) \cdot u/c = \gamma/\nu_0 \cdot (1 + u/c) = \nu_0^{-1} \cdot (1 + u/c) / (1 - u^2/c^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \nu_{\text{obs}} = \nu_0 \cdot \sqrt{(1 - u/c)/(1 + u/c)}, \text{ para } |u| \ll c: \nu_{\text{obs}} \approx \nu_0 \cdot (1 - u/c)$$

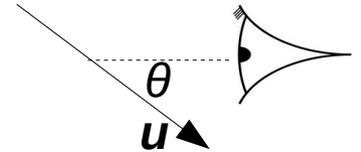
onde  $u$  é **negativa** para **aproximação**, e **positiva** para **afastamento relativo**.



# Relatividade Restrita

## O Efeito Doppler para a Luz

Isto vale para **movimento** na direção da **linha** de **visada**. Se a fonte está se movimentando a um ângulo  $\theta$  com a linha de visada, a fórmula se torna ( $u_r = u \cdot \cos\theta$ ):



$$\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \cdot \sqrt{(1-u^2/c^2)/(1+u_r/c)}$$

Se a fonte está se movimentando **perpendicular** à linha de visada, há um **efeito Doppler transversal**, devido à **Dilatação do Tempo**:

$$\nu_{\text{obs}} = \gamma^{-1} \nu_0 = \sqrt{(1-u_t^2/c^2)} \cdot \nu_0$$

Às vezes se define o **redshift** (deslocamento para o vermelho) ou **blueshift** (pro azul) devido ao efeito Doppler:

$$\lambda_{\text{obs}} = (1+z) \cdot \lambda_0 \Leftrightarrow z \equiv (\lambda_{\text{obs}} - \lambda_0) / \lambda_0 = \sqrt{(1+u_r/c)/(1-u_r/c)} - 1,$$

para  $u_r \ll c$ :  $z = u_r/c$

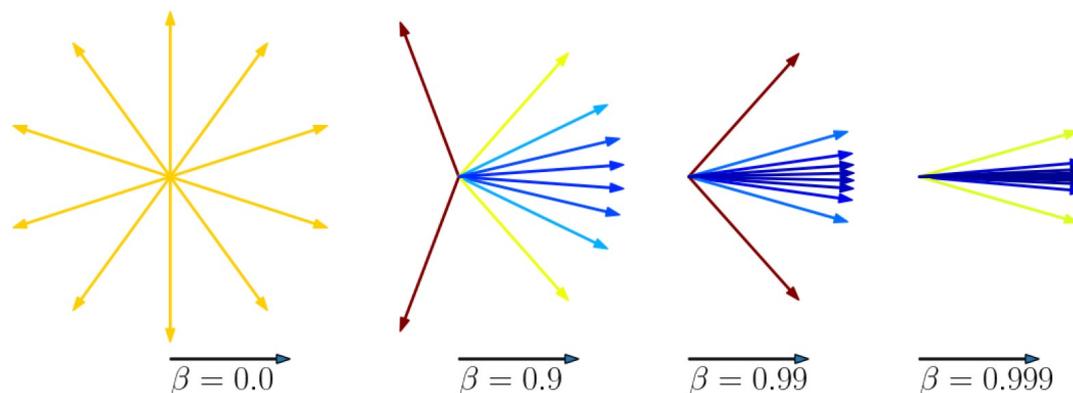
# Relatividade Restrita

## Colimação Relativística

Uma consequência disto é a **colimação relativística** (ingl. *relativistic beaming* ou *headlight effect*, “efeito farol”).

Além de mais azul, a luz emitida **pra frente** também é mais **intensa** (e pra trás, menos intensa), já que luz de comprimento de onda curta é mais energética.

Assim, uma fonte de luz em **velocidade relativística irradia** principalmente na **direção** do seu **movimento** (em relação ao observador).



# Relatividade Restrita

## Momento Linear e Energia Relativísticos

**Momento linear** e **Energia** também tomam uma forma diferente na **Teoria da Relatividade** ( $\mathbf{v}$  é a **velocidade** da **partícula**, e não alguma velocidade relativa entre referenciais;  $\gamma := (1-v^2/c^2)^{-1/2}$ ):

Momento linear relativístico:  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$

Energia relativística:  $E = \gamma mc^2$ ,  
onde  $E_0 = mc^2$  é a **energia de repouso**,  
e  $K = (\gamma-1) \cdot mc^2$ , a **energia cinética**

Alguns ainda usam as grandezas massa de repouso,  $m$  (que é simplesmente a massa) e massa relativística,  $\gamma m$ .

para  $v \ll c$ :  $\mathbf{p} \approx m \mathbf{v}$ ,

$K = ((1-v^2/c^2)^{-1/2}-1) \cdot mc^2 = (1+1/2 \cdot v^2/c^2 + O((v/c)^4)-1) \cdot mc^2 \approx 1/2 \cdot mv^2$

# Relatividade Restrita

## Momento linear e Energia Relativísticos

Fórmula útil:  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$  é uma **invariante** de **Lorentz**.

! Para  $m \neq 0$  e  $v \rightarrow c$ ,  $p$  e  $E \rightarrow \infty$ ,  
um dos motivos, por aqueles **objetos** com **massa não**  
podem alcançar a **velocidade da luz**.

Objetos **sem massa** (fótons, grávitons, ...) **têm** que se  
movimentar com a **velocidade da luz**. Senão eles teriam  
 $p$  e  $E$  **zero** (e não existiriam).

para estes, a última fórmula se reduz à já conhecida  
**relação de de Broglie**:  $E = pc$

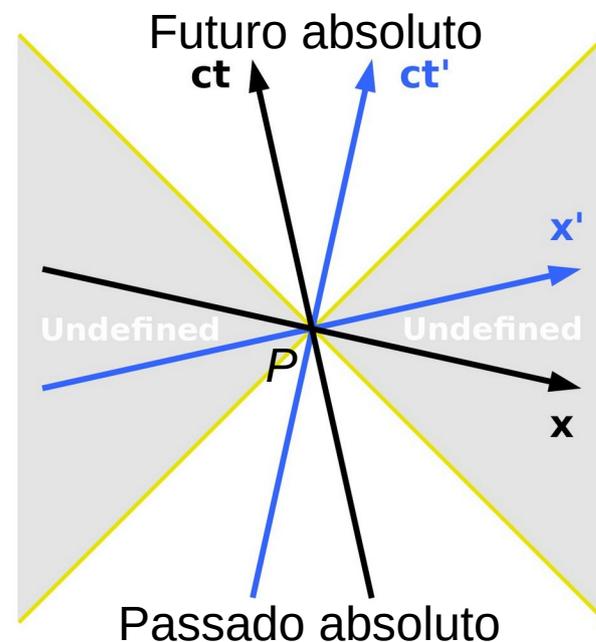
# Relatividade Restrita

## Passado, Futuro e Causalidade

O **diagrama Espaço-Tempo** centrado no evento  $P$  pode ser dividida em **várias regiões**:

O **passado absoluto** de  $P$ :  
Eventos nesta parte foram **antes** de  $P$ ,  
**independente do referencial**,  
e podem ter **causado**  $P$ .

O **futuro absoluto** de  $P$ :  
Eventos nesta parte serão **depois** de  $P$ ,  
**independente do referencial**,  
e podem ser a **consequência** de  $P$ .



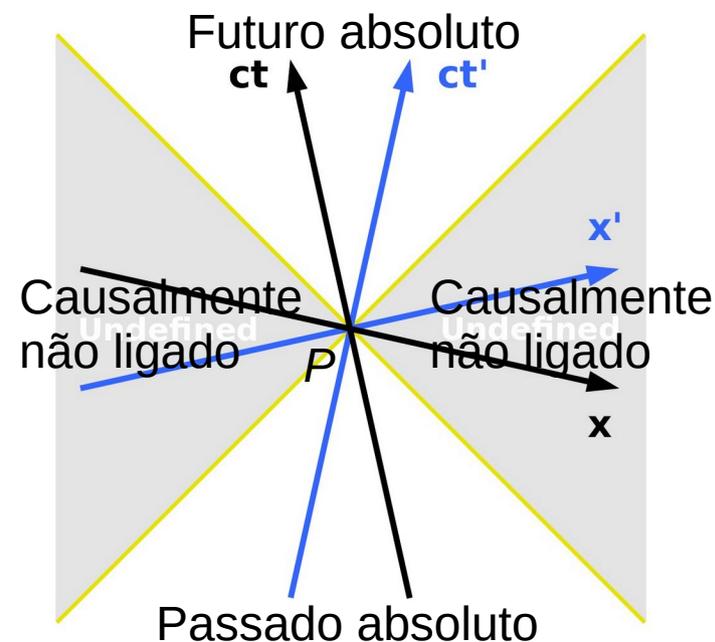
# Relatividade Restrita

## Passado, Futuro e Causalidade

A região **causalmente não ligada** a  $P$ :  
Eventos nesta parte **não** tem/tiveram **contato** com  $P$ , q. d. **informação não** teve **tempo** para chegar destes eventos até  $P$ , ou vice-versa.

Eventos nesta região podem ser **antes**, **depois** ou **simultâneos** a  $P$ , **dependendo do referencial**, mas tão afastados que não há contato causal.

As retas amarelas são os **caminhos** que tomaria **luz** passando por  $P$ .



# Relatividade Restrita

## Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

É útil definir distâncias no diagrama espaço-tempo, chamadas **intervalos**, como a seguinte grandeza:

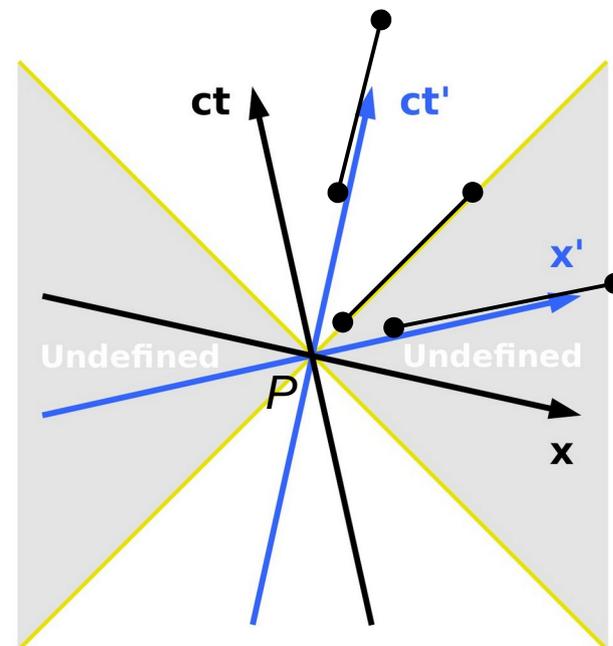
$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

$(\Delta s)^2$  é uma **invariante** de **Lorentz**.

!  $(\Delta s)^2$  pode ser negativo.

!! Alguns autores definem  $(\Delta s)^2$  com **sinal oposto**:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$

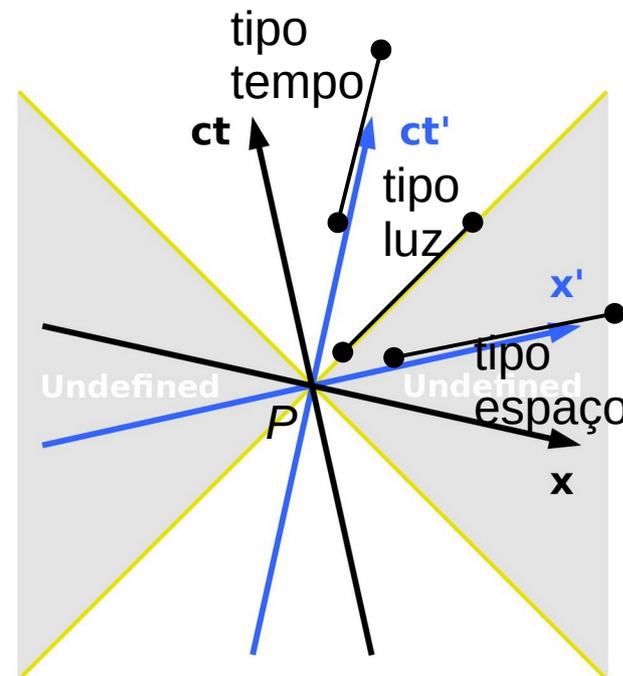


# Relatividade Restrita

## Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

Um intervalo se chama:

- **tipo espaço** se  $(\Delta s)^2 < 0$ : pode ser o **eixo** de uma **dimensão espacial** de um **referencial**.
- **tipo tempo** se  $(\Delta s)^2 > 0$ : pode ser o **eixo** do **tempo** de um **referencial**.
- **tipo luz** se  $(\Delta s)^2 = 0$ : pode ser o **caminho** de um **fóton**.



Na definição com o sinal oposto, intervalos tipo espaço têm  $(\Delta s)^2 > 0$ , e intervalos tipo tempo,  $(\Delta s)^2 < 0$ .

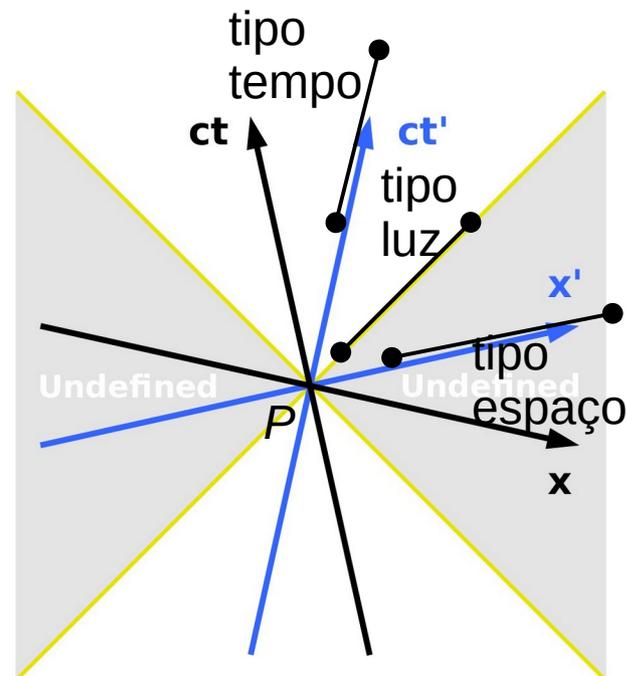
# Relatividade Restrita

## Intervalos no Diagrama Espaço-Tempo

Num intervalo **tipo espaço**,  $\sqrt{|(\Delta s)^2|}$  é a **distância própria** entre os eventos, a **distância** entre eles num **referencial**, onde eles ocorrem **simultaneamente**.

Num intervalo **tipo tempo**,  $\Delta s$  é o **tempo próprio** entre os eventos ( $\cdot c$ ), o **tempo** entre eles no **referencial**, naquele eles acontecem no **mesmo lugar**.

No caso **tipo luz**,  $\Delta s = 0$  significa, que o **tempo próprio** é **zero**. => Para **fótons** (ou qualquer partícula viajando com velocidade da luz) o tempo **não passa!**



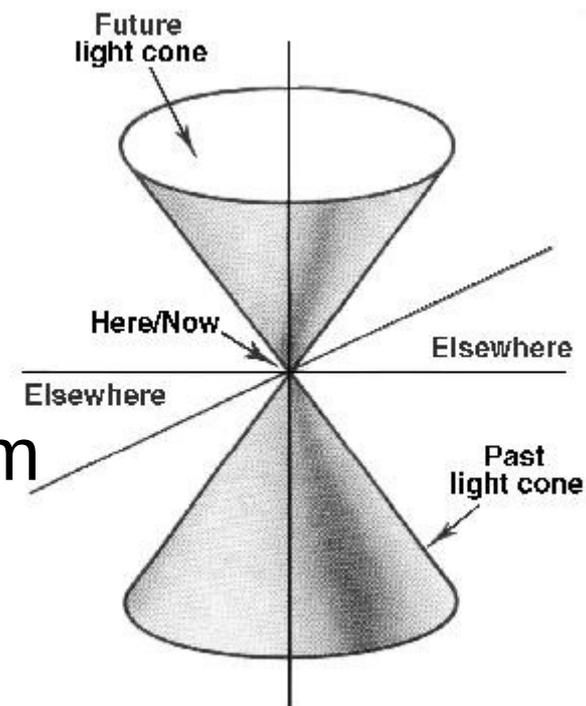
# Relatividade Restrita

## Cone de Luz

Pode-se fazer **diagramas espaço-tempo** levando em conta  $x$ ,  $y$  e  $t$  (suprimindo só  $z$ ).

=> Os possíveis **caminhos** de **luz** formam a superfície de um **cone**, o **cone de luz**.

**Passado** e **futuro absolutos** são as regiões **dentro** do **cone**, e a região **causalmente não ligada**, a região **fora**.



# Relatividade Geral

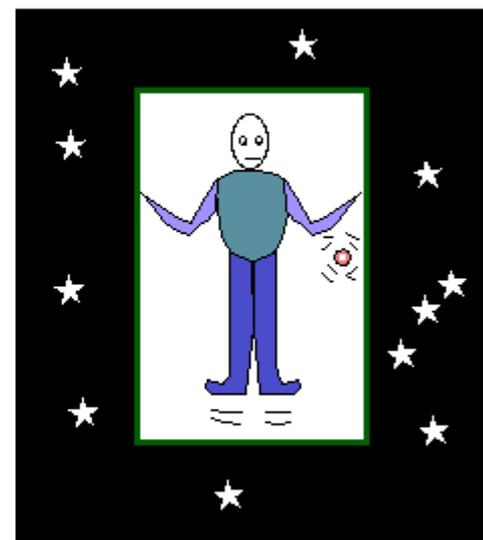
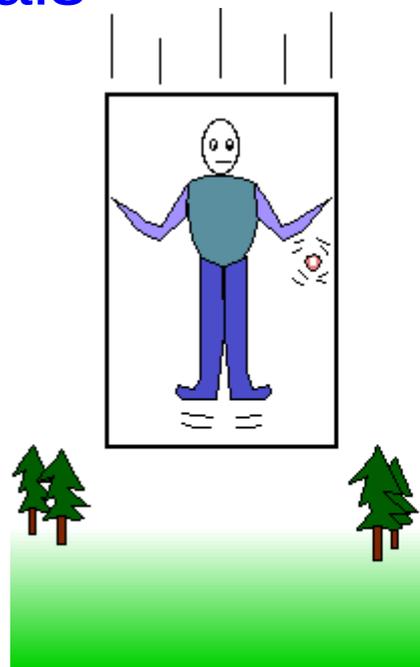
## Alguns Experimentos Mentais

O “pensamento mais feliz” da vida de Einstein:  
Uma pessoa em **queda livre não** sente seu **próprio peso**.

Para uma pessoa num elevador em queda livre é como se o elevador estivesse flutuando no espaço.

=> As duas situações são a mesma!

Um **referencial acelerado** junto com o **campo gravitacional** se comporta como um **referencial inercial**.

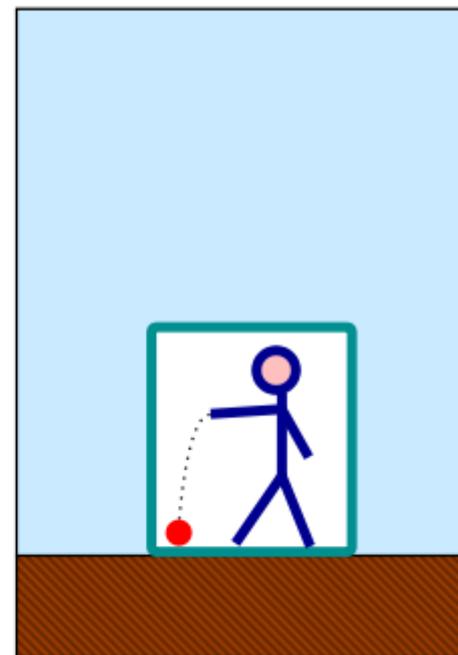
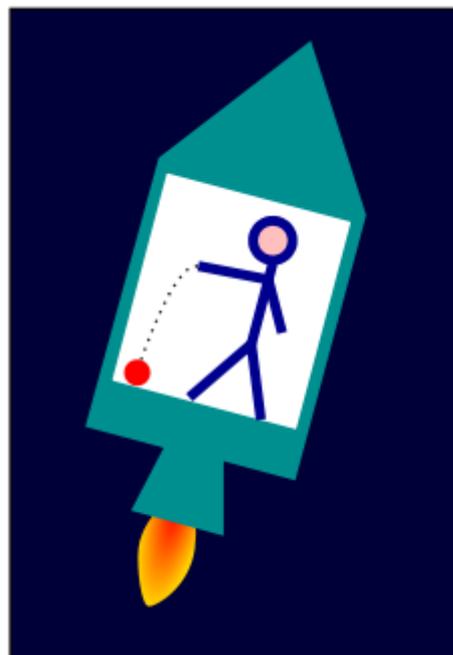


# Relatividade Geral

## Alguns Experimentos Mentais

Uma pessoa num foguete em **aceleração** ( $9.81 \text{ m/s}^2$  pra cima) se sente, como se ela estivesse **parada** na **Terra**.

=> Estas duas situações também são a mesma!



**Referenciais acelerados e referenciais em campos gravitacionais são equivalentes.**

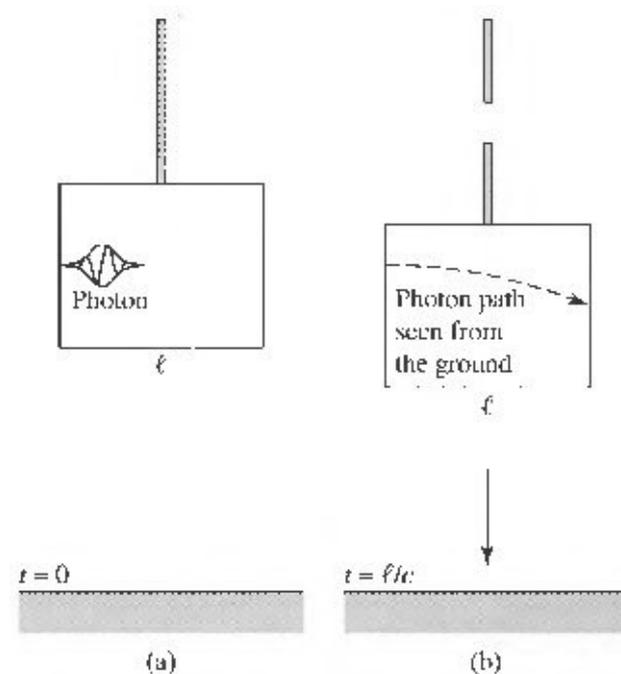
# Relatividade Geral

## Alguns Experimentos Mentais

Neste caso, sendo o **elevador** um **referencial inercial**, um raio de **luz** deve **cair junto** com o elevador, até se o elevador for só imaginário.

=> **luz “cai”** em **campos gravitacionais**, ou seja, o **caminho da luz é curva** na direção da **massa** (tal que sua velocidade continua sendo  $c$ ).

Só que no campo da Terra, a curvatura é quase nula, tal que não percebemos nada dela.



# Relatividade Geral

## Alguns Experimentos Mentais

E se a luz estiver viajando na **vertical**?

Visto de **dentro** do **elevador**, a **luz mantém** sua **frequência**.

Visto de **fora** (Terra), deve ter ocorrido uma **dilatação do tempo**, resp. um **efeito Doppler**, já que o elevador tem uma **outra velocidade** na **chegada** da luz, que ele tinha na **emissão**:

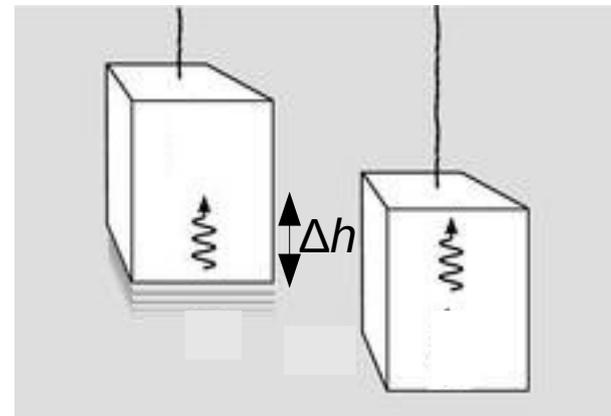
O percurso do fóton pra cima durou  $\Delta t = \Delta h/c$

Neste tempo, o elevador ganhou  $\Delta v = g\Delta t = g\Delta h/c$  em velocidade.

=> Mudança da frequência:  $\Delta\nu/\nu_0 = \Delta v/c = g\Delta h/c^2$

A **frequência** da luz **diminui**, ou seja, já que para luz  $E = h\nu$ , a **energia diminui**, quando luz “**sobe**” no **potencial gravitacional** (observe que  $g\Delta h$  é a diferença de potencial).

=> “**Conservação de energia**” para **fótons**.



# Relatividade Geral

## Alguns Experimentos Mentais

No **campo** de uma **estrela** de **raio**  $r_0$ , onde a **aceleração gravitacional**  $\mathbf{g}$  **não é uniforme**, temos que usar o **potencial** de uma **massa esferica**,  $\Phi = -GM/r$  ( $r > r_0$ ).

A **variação** de **frequência** entre a **superfície** e um ponto “**longe**”:

$$\nu_{\infty} / \nu_0 = \sqrt{(1 - 2GM/r_0 c^2)}$$

e o *redshift* correspondente, chamado **redshift gravitacional**:

$$z = (\lambda_{\infty} - \lambda_0) / \lambda_0 = \nu_0 / \nu_{\infty} - 1 = (1 - 2GM/r_0 c^2)^{-1/2} - 1 \approx GM/r_0 c^2$$

A **frequência** da luz **diminui** (*redshift*), enquanto ela se **afasta** de uma **massa** alta.

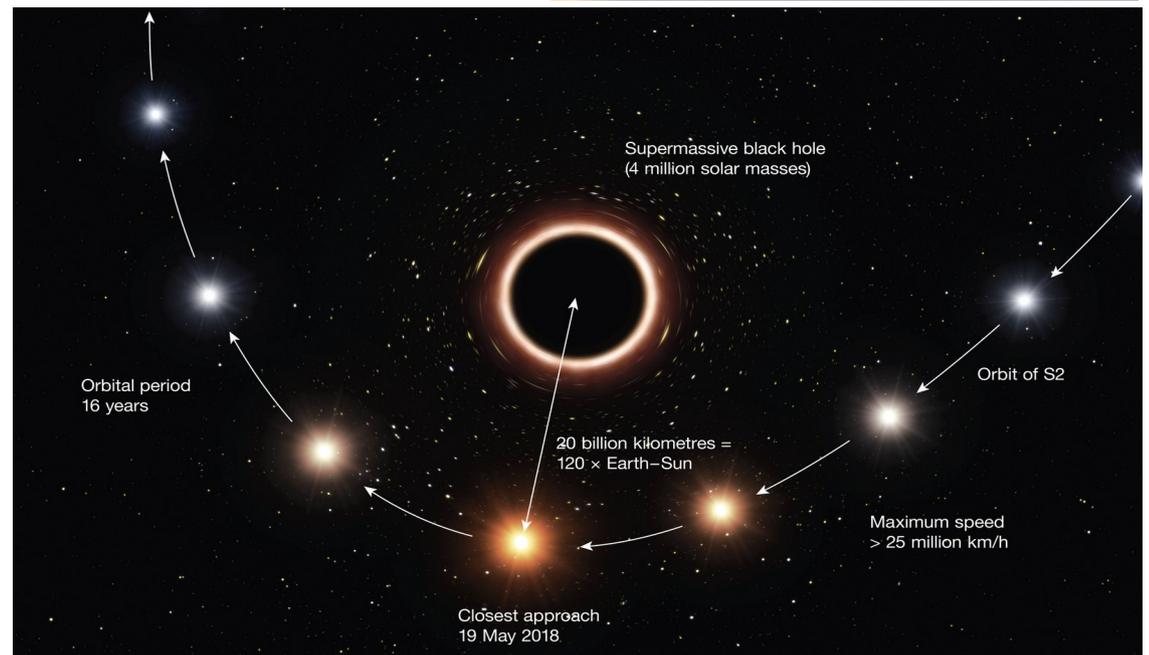
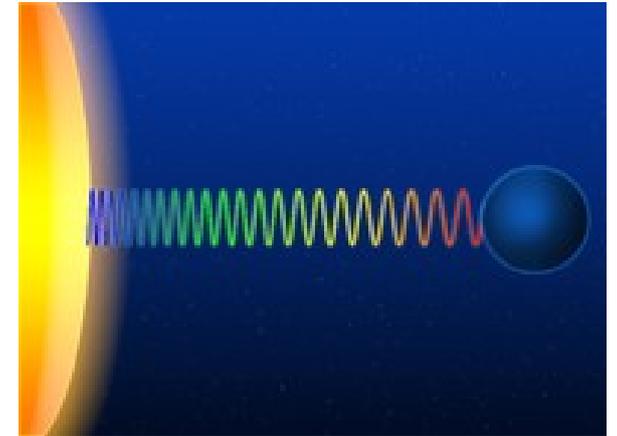
Luz **descendo** num **campo gravitacional** sofre um *blueshift* gravitacional, a **frequência aumenta**.

# Relatividade Geral

## Alguns Experimentos Mentais

O *redshift* gravitacional foi detectado em espectros de Anãs Brancas,

e no espectro de S2 (uma estrela que orbita o centro da Via Láctea a uma distância muito pequena => aula Via Láctea), publicado 26/07/2018.



# Relatividade Geral

## Alguns Experimentos Mentais

Mas isto não atinge só a luz.

Qualquer processo “em baixo” sofre uma **dilatação de tempo** e ocorre **mais lentamente** para alguém “em cima”.

O **tempo** passa mais **rapidamente** na **altura**!

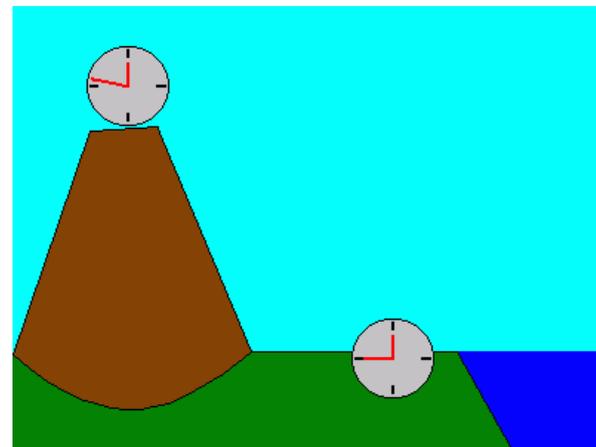
$$\Delta t_0 / \Delta t_\infty = v_\infty / v_0 = \sqrt{1 - 2GM/r_0 c^2}$$

Para um campo fraco:  $\Delta t_0 / \Delta t_\infty \approx 1 - GM/r_0 c^2$

O fato, de que o tempo passa mais lentamente perto de massas altas se chama **dilatação gravitacional do tempo**.

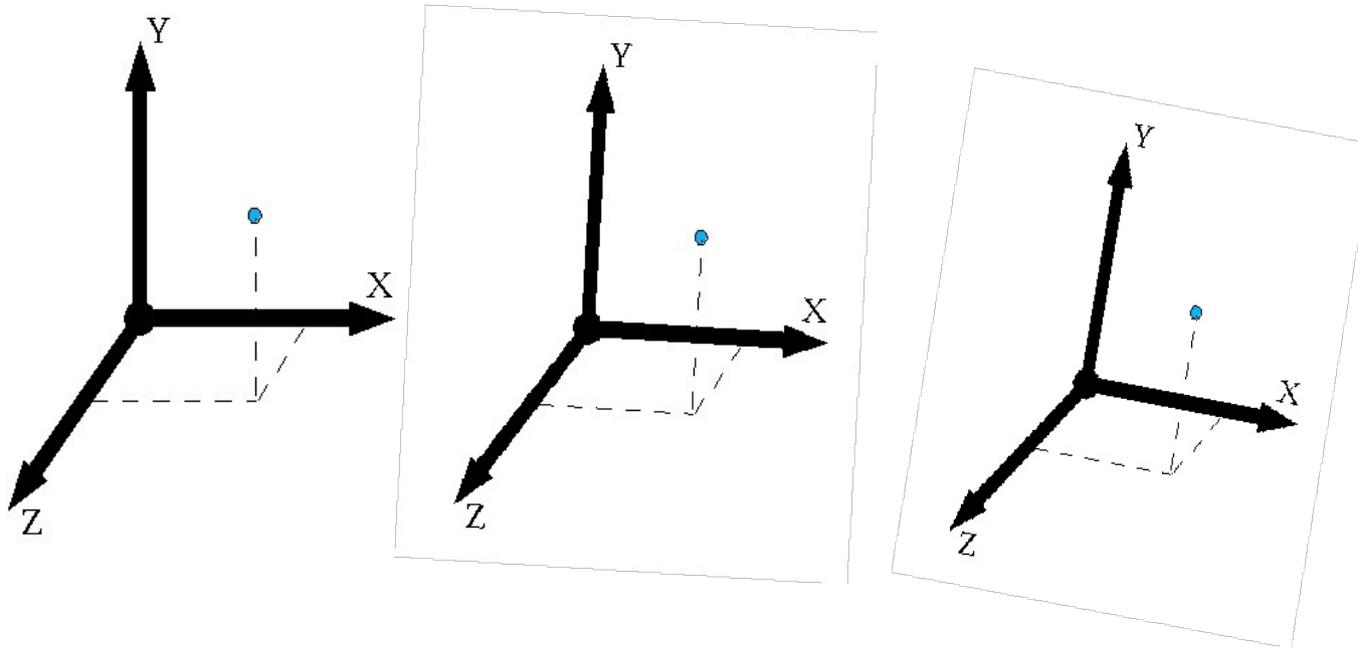
No caso da Terra, o efeito é minúsculo, da ordem de 1.3 segundos em 60 anos.

Mesmo assim, foi **confirmado** usando relógios atômicos de alta precisão na Terra e em foguetes.



# Relatividade Geral

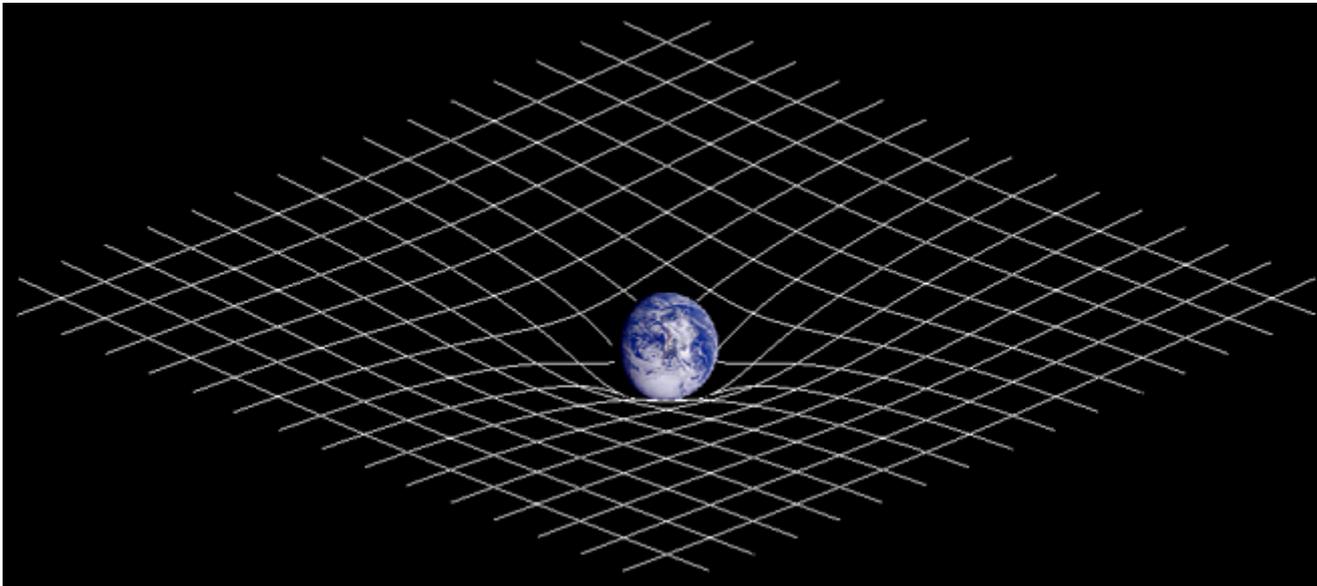
Disto tudo pode se concluir que **não existe** um **referencial global**, cada **ponto** no **Espaço-Tempo** tem seu próprio sistema acelerado de coordenadas.



# Relatividade Geral

Se tentamos juntar todos estes sisteminhas infinitesimais de coordenadas para formar uma grade global, esta não “fecha”. A grade acaba sendo curva, especialmente perto de massas grandes.

=> **Massas** altas **curvam** o **Espaço-Tempo!**



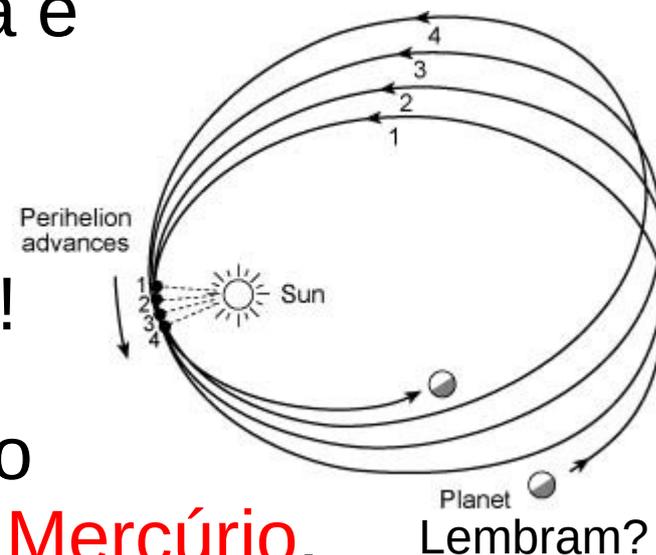
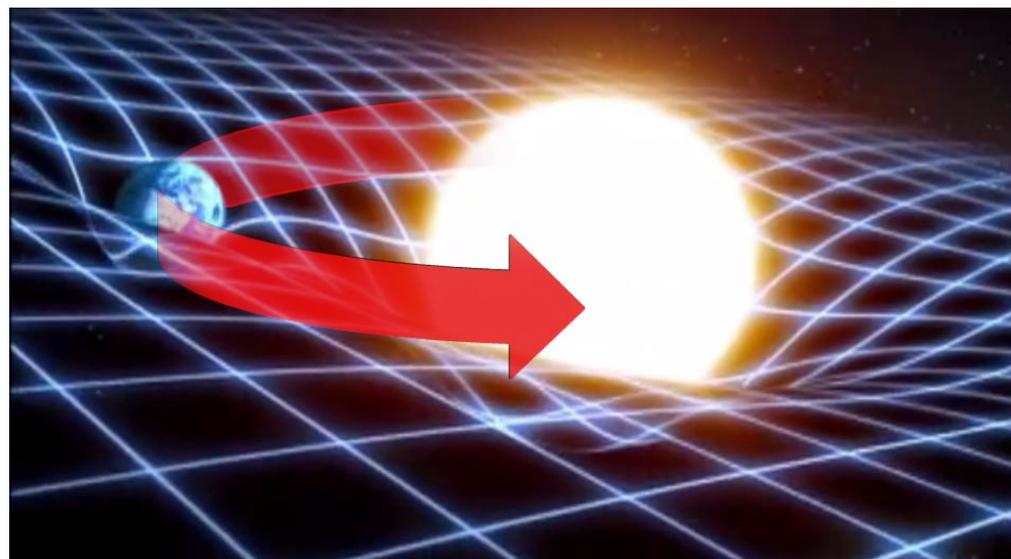
# Relatividade

Neste Espaço-Tempo curvo, as partículas (p. e. a Terra) andam em linhas as mais retas possíveis, chamadas **geodésicas**.

No caso da Terra no espaço curvado pelo Sol, a geodésica é uma órbita elíptica.

=> A **gravitação** pode ser vista como **efeito** da **curvatura** do **Espaço-Tempo**!

A curvatura também explica o excesso da **precessão** do **periélio** da **órbita** de **Mercúrio**.



# Relatividade Geral

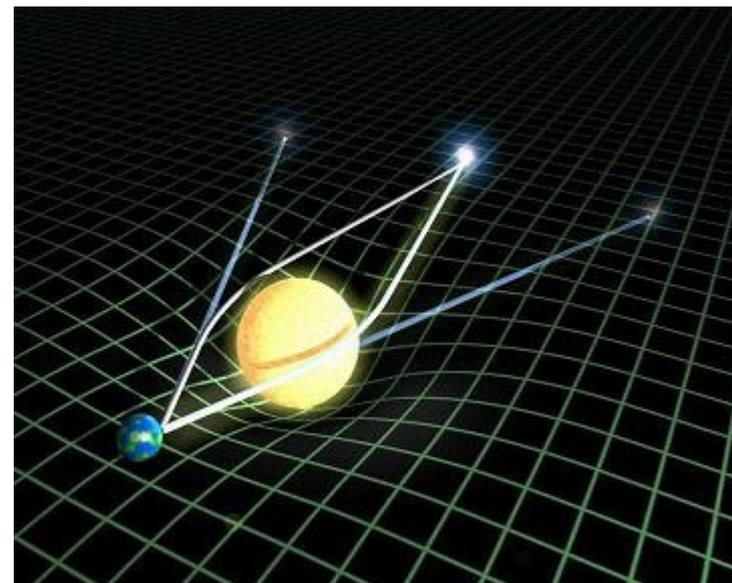
Como mencionado, este efeito também **curva** os **caminhos** da **luz**.  
=> **Massas** altas **desviam** a **luz**.

Isto foi **confirmado**, pela primeira vez em 1919 em Sobral, no Ceará durante um **eclipse solar**.

Observou-se o **Sol desviando** a **luz** de uma **estrela** atrás pelo ângulo predito de  $\Delta\varphi = 4GM/c^2R = 1.75''$ .

=> Primeira **corroboração** da **Relatividade Geral**.

Desde então, foi observado muitas vezes em situações diferentes (galáxias desviando a luz de outras galáxias, aglomerados de galáxias desviando luz, etc. (em breve)



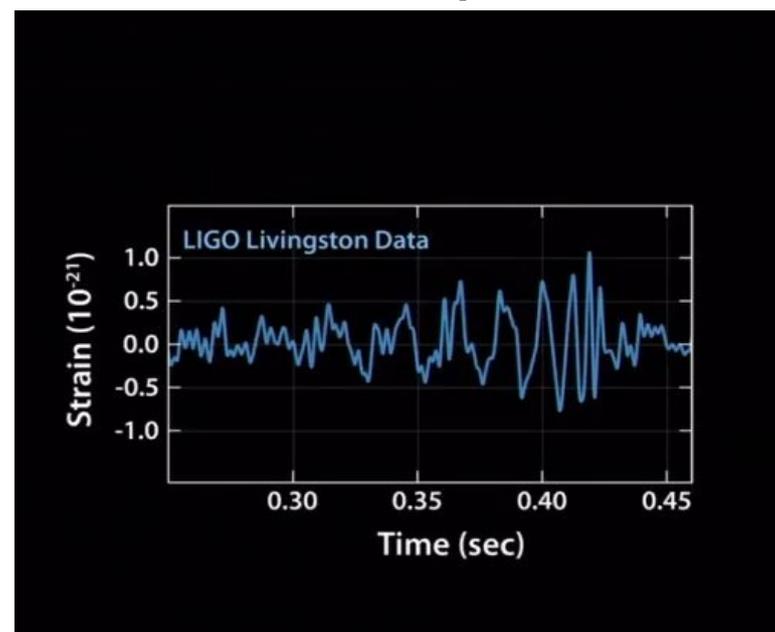
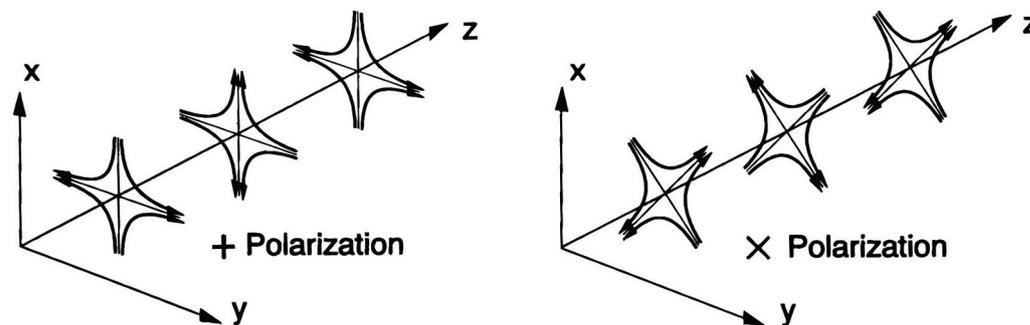
# Relatividade Geral

## Ondas Gravitacionais

Outra previsão da Relatividade Geral é a existência de **Ondas**

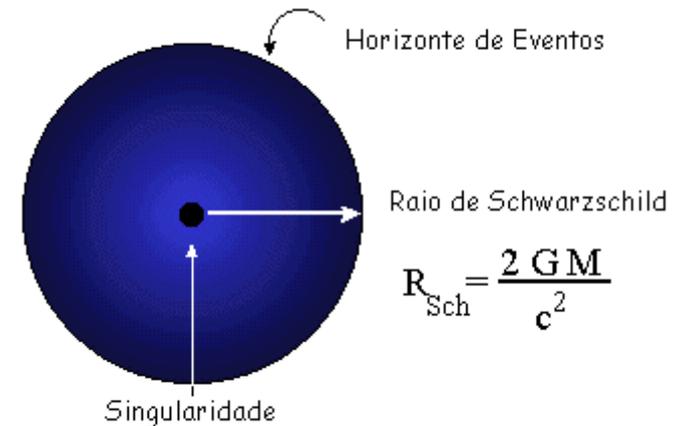
**Gravitacionais**, deformações periódicas do **espaço-tempo** geradas por **massas** altas **aceleradas** e que se **propagam** à **velocidade** da **luz**.

Várias já foram **detectadas**, a primeira no final de 2015 pelo “telescópio” de ondas gravitacionais LIGO nos EAU (=> aula Telescópios).



# Buracos Negros

Empregando a **Relatividade Geral**, dá pra calcular a **distância**, chamada **Raio de Schwarzschild**  $R_S$ , a partir daquela a **luz** não consegue mais **escapar** da **influência** de uma **massa**  $M$ , resp. ela sofre um **redshift gravitacional infinito**.



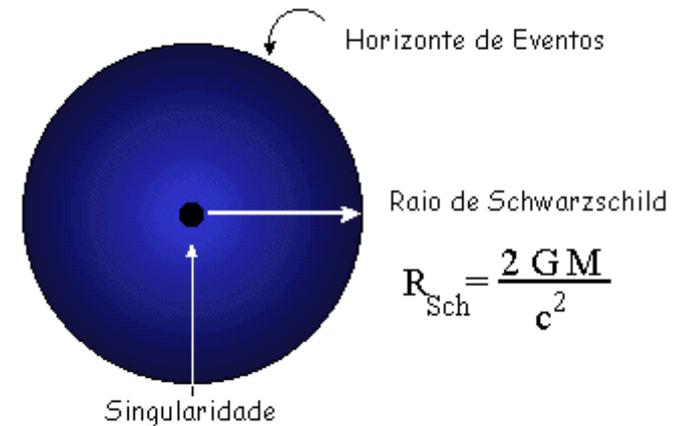
Para a massa do Sol, esta distância é de 3 km.

Se uma **massa** é **concentrada** em um **espaço menor** que a esfera delimitada pelo seu **Raio de Schwarzschild**, temos um **Buraco Negro**.

Buracos Negros já foram hipotetizados, usando mecânica Newtoniana, em 1783 por John Mitchell.

# Buracos Negros

A **esfera** com este **raio** em torno do centro do Buraco Negro é chamada **Horizonte de Eventos**, e é vista como **limite exterior** do **Buraco Negro**.



O **Horizonte de Eventos** se chama assim, por que **não** se pode **ver além** dele (para dentro do Buraco Negro).

Fora do Horizonte de Eventos, um Buraco Negro de massa  $M$  **atrai** outras massas com a **mesma força** que qualquer outra **massa** de quantia  $M$ .

=> Um **Buraco Negro não suga!**

# Buracos Negros

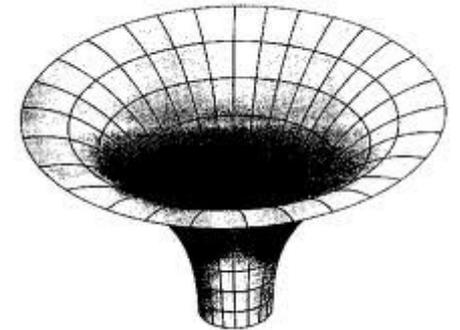
Alguns efeitos bizarros acontecem no **Horizonte de Eventos**:

A **dilatação do tempo** e o **redshift gravitacional** se tornam **infinitos**.

O que significa isto?

Se você joga um relógio **para dentro** de um **Buraco Negro** e **observa** o relógio de fora:

- Ele **nunca alcança** o **Horizonte de Eventos**
  - Ele **anda** cada vez mais **lentamente**
  - Ele se torna cada vez mais **vermelho** e **menos brilhante** até ficar invisível,
- enquanto ele se **aproxima** do **Horizonte de Eventos**.



Espaço curvado por um Buraco Negro

# Buracos Negros

De fato, isto acontece também com o **próprio material** que está **formando** o **Buraco Negro**, p. e. a **estrela** que está **colapsando**:

O **material nunca alcança** o **Horizonte de Eventos**.

=> A **velocidade** do **colapso** tende a **zero** antes de ele ser **completado**.

=> O **Buraco Negro nunca** fica **pronto** (a não ser que já estava pronto "desde sempre", i.e. Buracos Negros primordiais).

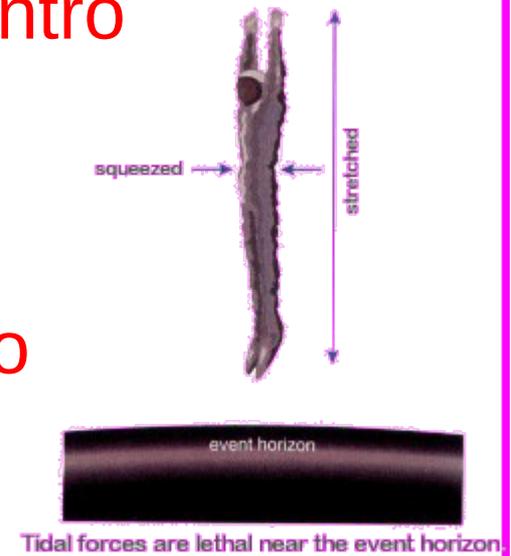
Em lugar disso temos uma “**estrela congelada**”, mas que é **invisível** mesmo assim, devido ao **redshift gravitacional enorme**.

Em conclusão, **visto de fora**, **Buracos Negros não existem** mas, sim, **objetos extremamente similares** a Buracos Negros.

# Buracos Negros

Para o relógio, ou um amigo **caindo para dentro** do Buraco Negro, a coisa é bem **diferente**:

Caso seja um **Buraco Negro Estelar**, infelizmente, o nosso amigo estará **destruído** por **forças de maré**, devido a diferenças da força nos pés e na cabeça, efeito chamado espaguetificação, **antes de alcançar** o **Horizonte de Eventos** (melhor fazer o experimento com um inimigo).



# Buracos Negros

Mas tem esperança:

Nos centros de galáxias há **Buracos Negros Supermaciços** ( $\Rightarrow$  aulas Via Láctea, Galáxias I e II, AGNs) que têm **massas** e, portanto, **raios de Schwarzschild, maiores**.

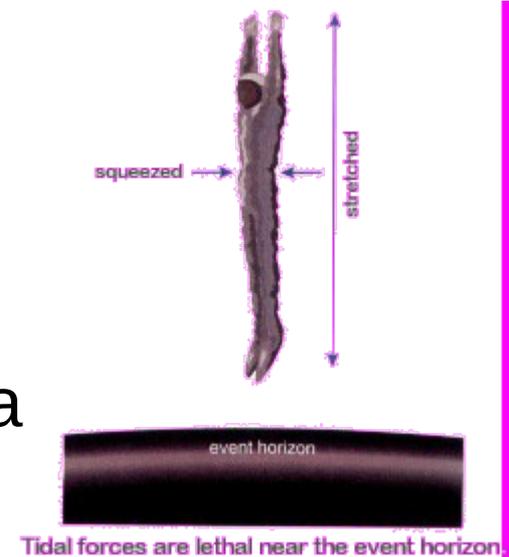
Aquele no centro da Via Láctea tem uma massa de 3.7 mio.  $M_{\odot}$ , e portanto, um Raio de Schwarzschild de 12 mio. km.

Já que forças de maré caem com a 3ª potência da distância ( $\Rightarrow$  aula planetas), temos no Horizonte de eventos de um Buraco Negro com massa  $M$ :

$$F_{\text{maré}} \propto M/R_S^3 \propto M/M^3 = M^{-2}$$

$\Rightarrow$  mais **fracas** em Buracos Negros de **maior massa**

$\Rightarrow$  ele pode sobreviver.



# Relatividade

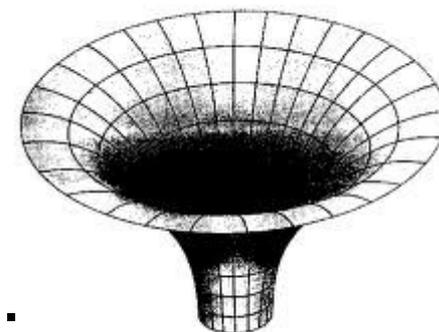
E o que ele vê, caso sobrevive?

Ele **alcança**, sim, o **Horizonte de Eventos** em um **tempo** finito, na verdade, **muito curto**.

Olhando para trás, ele vê:

- o **nosso tempo** andando cada vez mais **rapidamente**, até alcançar **rapidez infinita**,
- nós nos tornando cada vez mais **azul**, enquanto ele se **aproxima** do **Horizonte de Eventos**.

Apesar de o nosso tempo se tornar infinitamente rápido pra ele, ele não verá a história do Universo até o fim, porque a luz de lá nunca alcança ele (e ele nunca vai poder nos contar, o que ele viu).



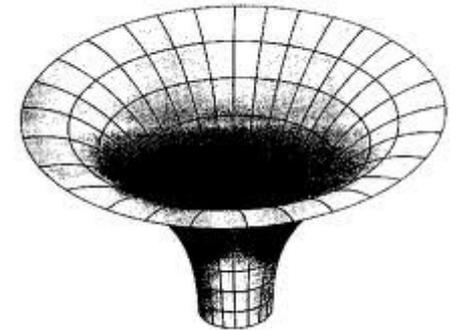
Espaço curvado por um Buraco Negro

# Buracos Negros

E o que tem **dentro** de um Buraco Negro?

De alguma forma, deve ter **toda a matéria** daquela ele foi feito (p. e. do caroço colapsado da estrela explodida), mas em uma forma extremamente **densa** que **não** conseguimos descrever com a **física atual**.

Segunda a teoria, tem uma **singularidade** no **centro**, um estado de **densidade** e **curvatura infinitas**.



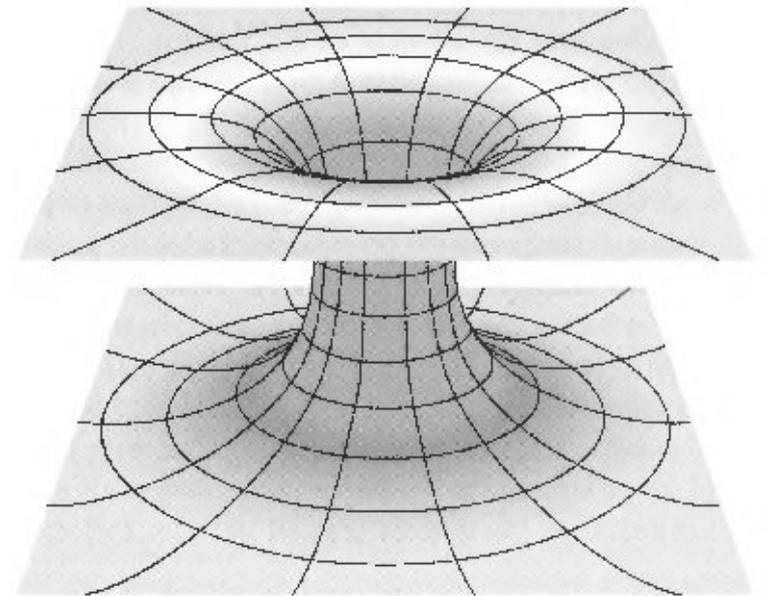
Espaço curvado por um Buraco Negro

# Buracos Negros

## Gargantas de Schwarzschild, Pontes Einstein-Rosen e Buracos de Minhoca

Algumas Teorias postulam **reaberturas** do **Espaço-Tempo** **atrás** do **Horizonte de Eventos**, que poderiam servir como **túneis** para **lugares/épocas distantes** do **Universo**, mas, por enquanto, estas têm mais a ver com o domínio da Ficção Científica.

Cálculos deste tipo de objeto **não** conseguem criar **mecanismos** para passar algo de um lado pro outro, ainda menos sem enfrentar coisas desagradáveis como singularidades no caminho.



# Buracos Negros

## As Grandezas que caracterizam um Buraco Negro

Já que **informação** do Buraco Negro **não** tem como **chegar** em **nós**, as **únicas propriedades** que conseguimos **determinar** de **fora** são as que ele já tinha **antes** do colapso, e que foram **conservadas**, os seus:

- **Massa**
- **Momento Angular**
- **Carga Elétrica** (deve ser desprezível, por que cargas positivas e negativas são sempre encontradas juntas, tal que depois do colapso não deve ter nenhuma carga resultante significativa)

Além destas grandezas, não conseguiremos detectar **nenhuma estrutura**. Astrônomos dizem, que “Buracos Negros não têm cabelo”.

# Buracos Negros

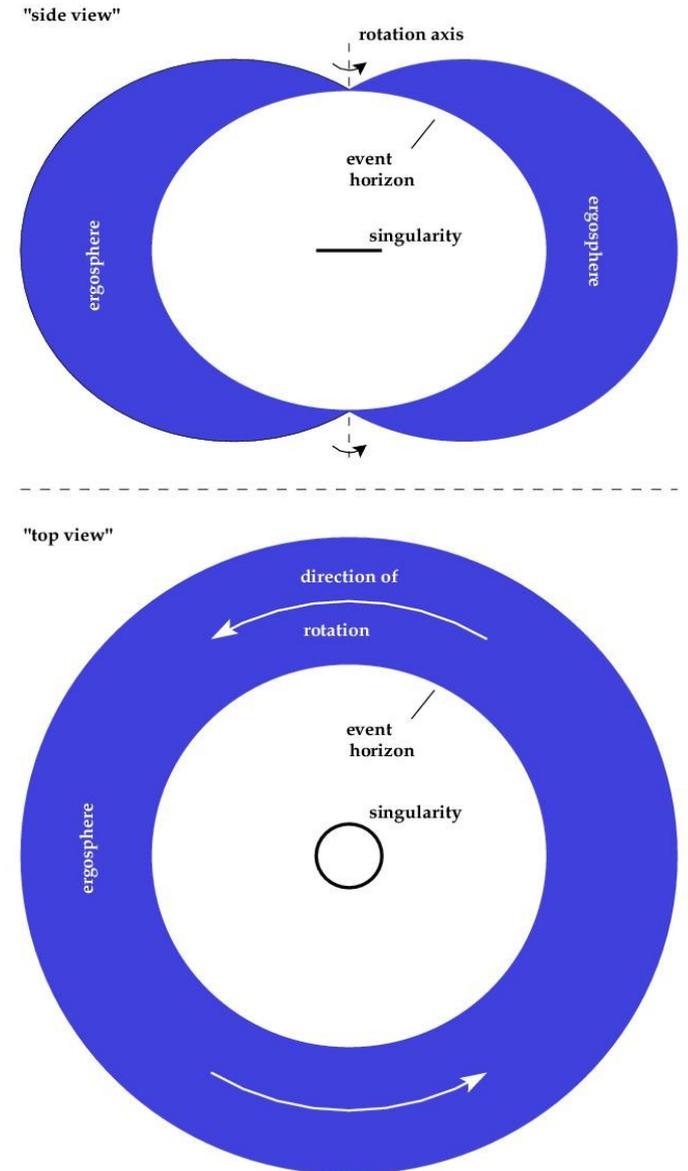
## Buracos Negros em Rotação

Chamados Buracos Negros de **Kerr**.

O **momento angular** de um Buraco Negro de Massa  $M$ , pode ser no **máximo**  $L_{\max} = GM^2/c$ .

O **Horizonte de Eventos** se **achata**, e a **singularidade** vira um **anel**.

O Buraco (na verdade, qualquer massa em rotação) faz o **Espaço-Tempo** em torno **girar junto**.

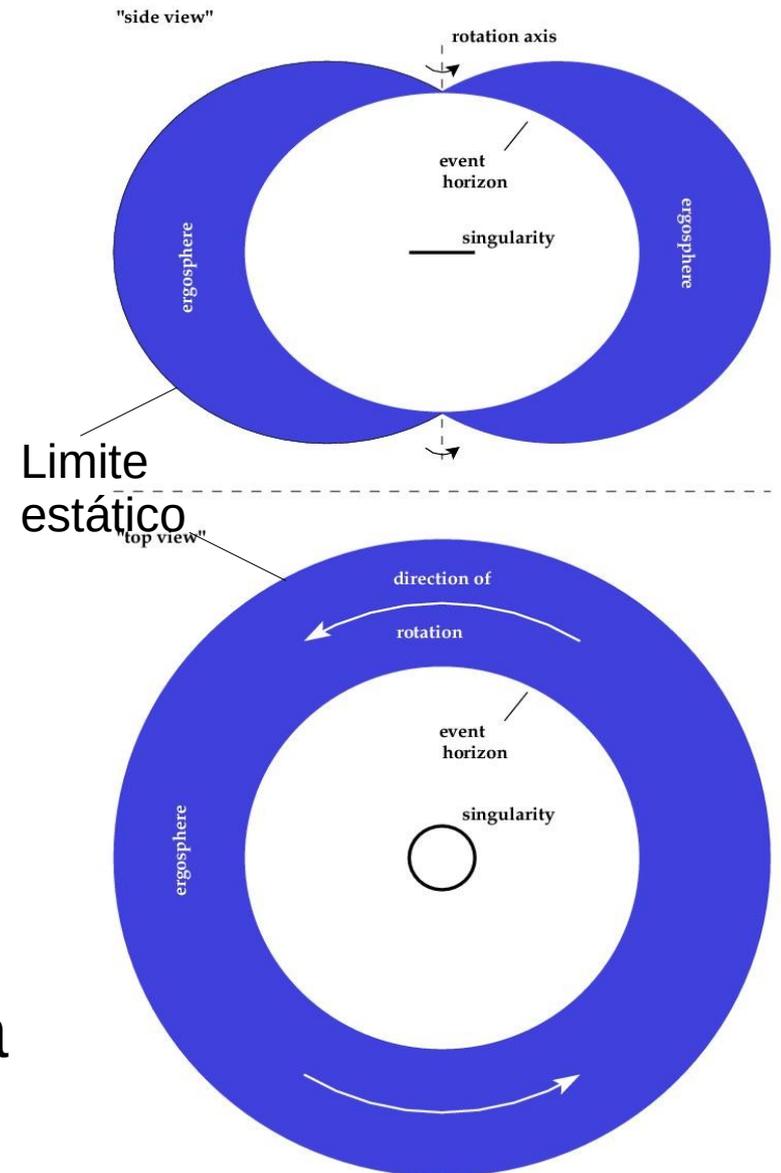


# Buracos Negros

## Buracos Negros em Rotação

Dentro de um limite chamado **Limite Estático**, esta **rotação** do **Espaço-Tempo** é tão **forte**, que **nada** consegue ficar **“parado”**. **Tudo é forçado a girar junto** com o Buraco Negro.

Entre o **Horizonte de Eventos** e o **Limite Estático** há uma região chamada **Ergosfera**, ainda fora do “limite sem retorno”, mas dentro da região “sem escapar da rotação”

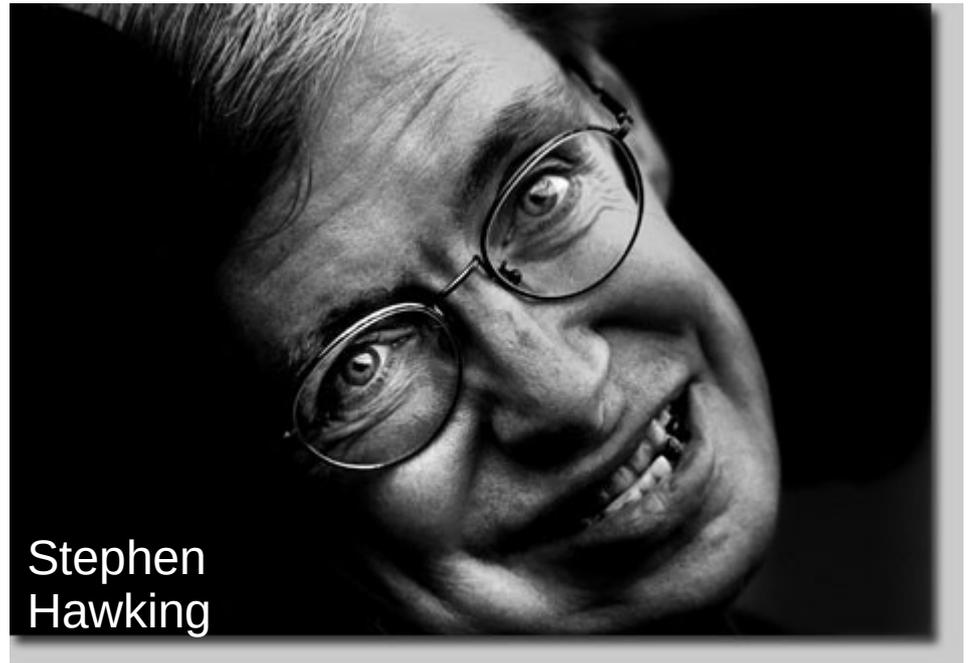


# Buracos Negros

## Radiação de Hawking

Classicamente, um **Buraco Negro**, uma vez formado, só pode **crescer** e deveria **existir por sempre**, como provado por **Stephen Hawking**.

Porém, o mesmo Stephen Hawking encontrou um **mecanismo quântico** que **possibilita a evaporação** de **Buracos Negros**, a **Radiação de Hawking**.



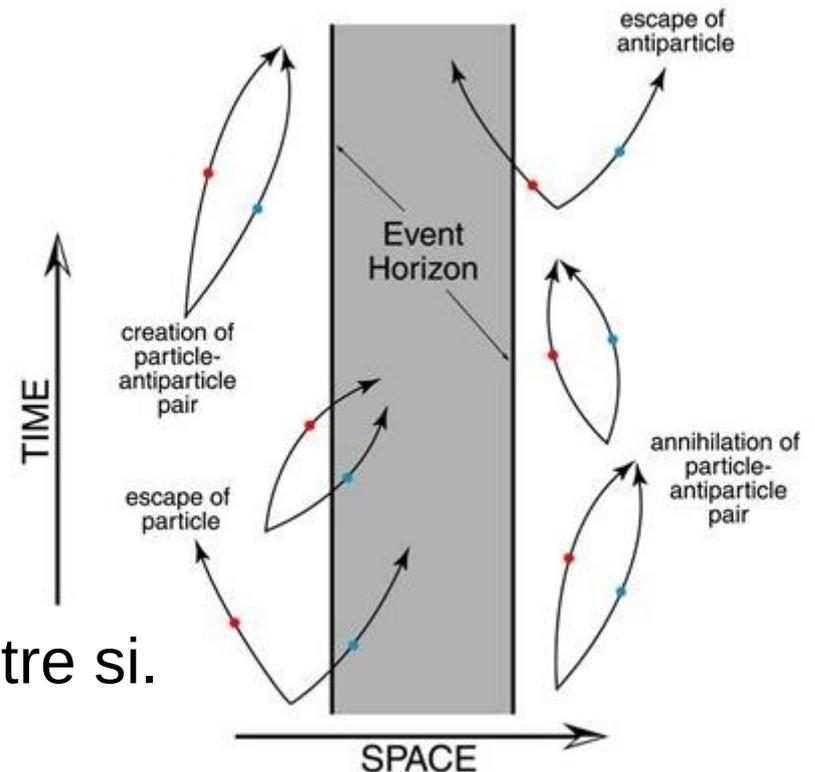
Stephen  
Hawking

# Buracos Negros

## Radiação de Hawking

Segundo ele, **pares de partícula-antipartícula** podem se **formar perto do Horizonte de Eventos** de um Buraco Negro, “**emprestando**” **energia gravitacional** do Buraco.

Esta energia é **devolvida** logo depois, quando as **partículas** se **aniquilam** entre si.



Mas de vez em quando pode ser que uma das partículas **cai no Buraco Negro** antes de se **aniquilar** com o seu parceiro.

O parceiro pode **escapar**, levando junto parte da **energia** “**emprestada**”.

=> O **Buraco Negro** **perde energia**, quer dizer, **massa**.

=> Ele **encolhe**.

# Buracos Negros

## Radiação de Hawking

A **perda** de **massa** é proporcional a  $M^{-2}$ , de modo que para **Buracos Negros** de **alta massa**, ela é muito **lenta**:

O tempo de vida de um Buraco Negro antes da sua evaporação é ( $h$  = constante de Planck):

$$t_{\text{evap}} = 2560 \cdot \pi^2 \cdot (2GM/c^2)^2 \cdot (M/h) \approx 2 \cdot 10^{67} (M/M_{\odot})^3 \text{ anos}$$

=> um Buraco Negro de uma massa solar levaria  $10^{67}$  anos para evaporar.

Mas um hipotético **Buraco Negro primordial** de inicialmente  $\sim 10^{11}$  kg chegaria no seu fim mais ou menos **hoje**.

A **última erupção** seria mais **energética**, emitindo uns  $10^{13}$  W em raios  $\gamma$ ,  $e^-$ ,  $e^+$  e outras partículas.

A **radiação  $\gamma$**  de uma **erupção** destas poderia ser **detectável** (mas não foi detectada ainda).

# Buracos Negros

Que Tipos de Buracos Negros existem?  
(isto é, se eles existem)

Acredita-se que existem Buraco Negros

- **de Massas Estelares**, com massas de 3 a 15  $M_{\odot}$ ,  
resultados do **colapso** de **caroços** de **estrelas** de **alta**  
**massa** (=> Aulas Estrelas e Estágios Finais)

- **de Massas Intermediárias**, 100 - 10 000  $M_{\odot}$ ,  
provavelmente encontrados como **fontes ultraluminosas**  
**de raios X** nos **centros** de alguns **aglomerados**  
**globulares** e **galáxias anãs**

# Buracos Negros

Que Tipos de Buracos Negros existem?

- **Supermaciços**, nos **centros** de **galáxias**  
(=> aulas Via Láctea, Galáxias I e II, AGNs)
- **Primordiais**,  $10^{-8}$  kg -  $100\,000 M_{\odot}$ , formados nos **primeiros instantes** do **Universo**.  
**Não** foram **detectados** ainda, talvez poderão ser detectados pela **radiação de Hawking** no hora de eles **evaporarem**.

# Buracos Negros

Existe **prova** que os **Buracos Negros estelares** existem?

Foram encontrados alguns **sistemas binários**, similar àqueles contendo uma Anã Branca ou uma Estrela de Nêutrons,

onde dá para determinar a **massa** do **componente “invisível”** através do seu **efeito** sobre o **componente visível** (Leis de Kepler), e um limite superior para o seu **raio** através da radiação nos **raios X** emitida pelo **disco de acreção**.



Cygnus X-1 (interpretação artística)

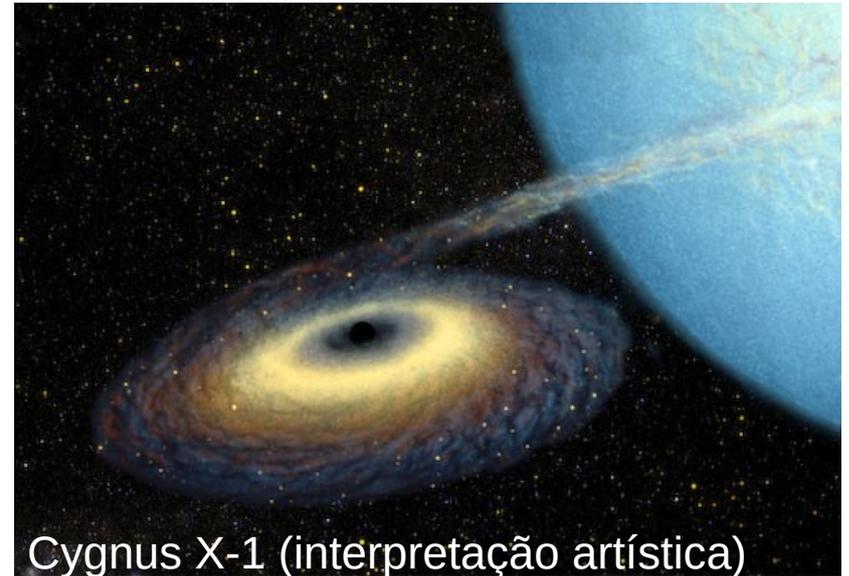
# Buracos Negros

Em Cygnus X-1, LMC X-3 e V404 Cyg e outros encontra-se **massas maiores** que  $3 M_{\odot}$ :

Cygnus X-1:  $10 M_{\odot}$ ,

LMC X-3: entre 5 e  $13 M_{\odot}$ ,

V404 Cyg:  $12 M_{\odot}$ .

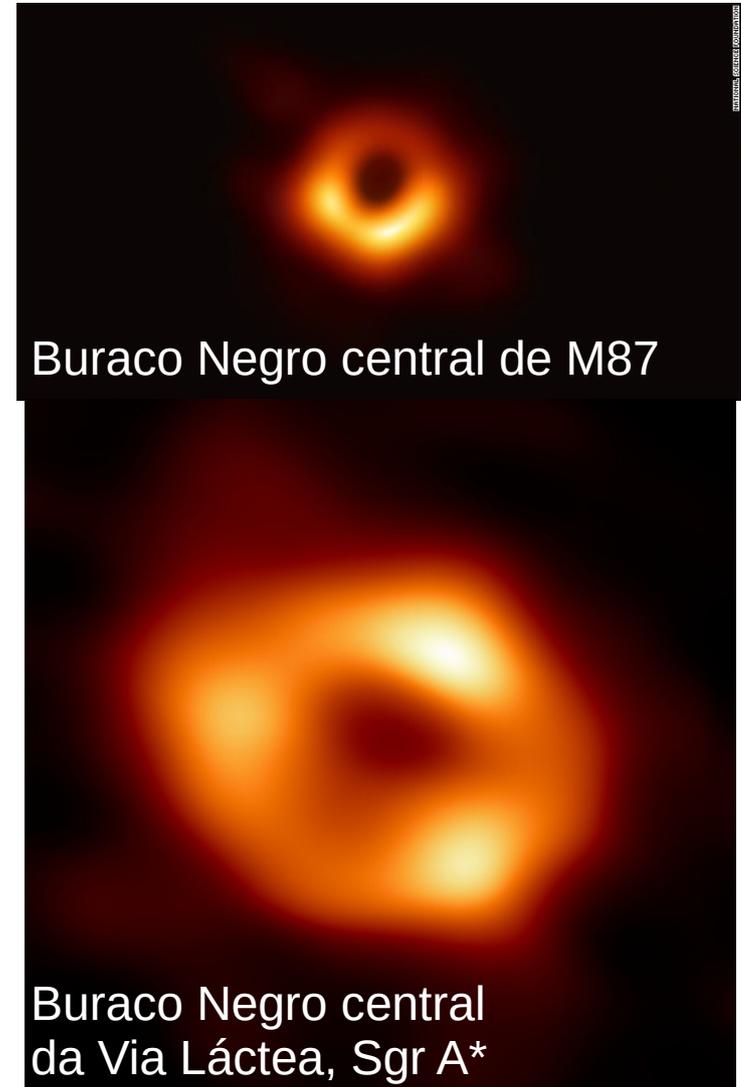


Cygnus X-1 (interpretação artística)

Já que a **massa limite** para **Estrelas de Nêutrons** é entre  $2.2$  e  $2.9 M_{\odot}$ , estas “estrelas” invisíveis e compactas devem ser **objetos mais massivos e densos** ainda.  
=> **Buracos Negros**

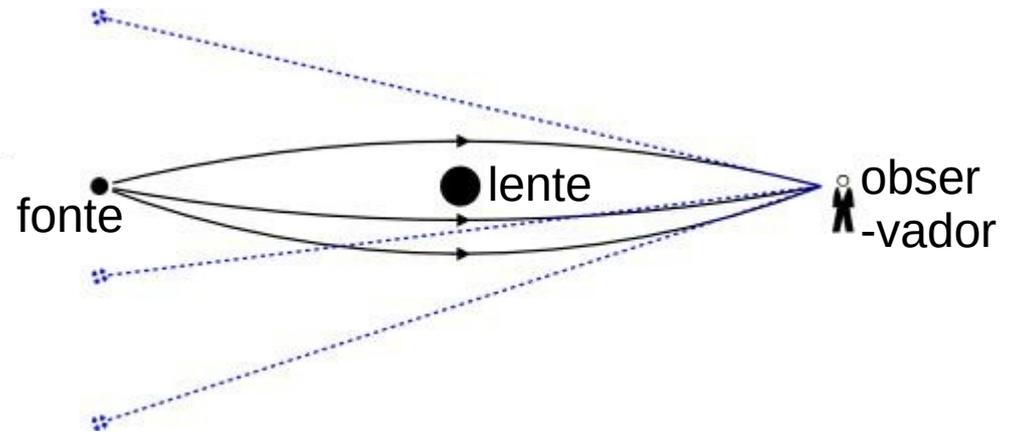
# Buracos Negros

E agora, imagens de Buracos Negros super-maciços (melhor: dos discos de acreção em torno deles) nos centros de galáxias, como a galáxia gigante M87 (2019) e a Via Láctea (2022) pela colaboração *Event Horizon Telescope* ( $\Rightarrow$  aula 3), de  $6.5 \cdot 10^9 M_{\odot}$  e 3.7 mio.  $M_{\odot}$ , que ainda veremos várias vezes (aulas Via Láctea, galáxias I, AGNs).



# Lentes Gravitacionais

Uma consequência, de que **massas defletem luz** é, que elas podem agir como **lentes gravitacionais**.



Baseada na **Relatividade Geral** (1915), lentes gravitacionais são uma **ciência observacional** só desde 1979.

Hoje, já virou rotina.

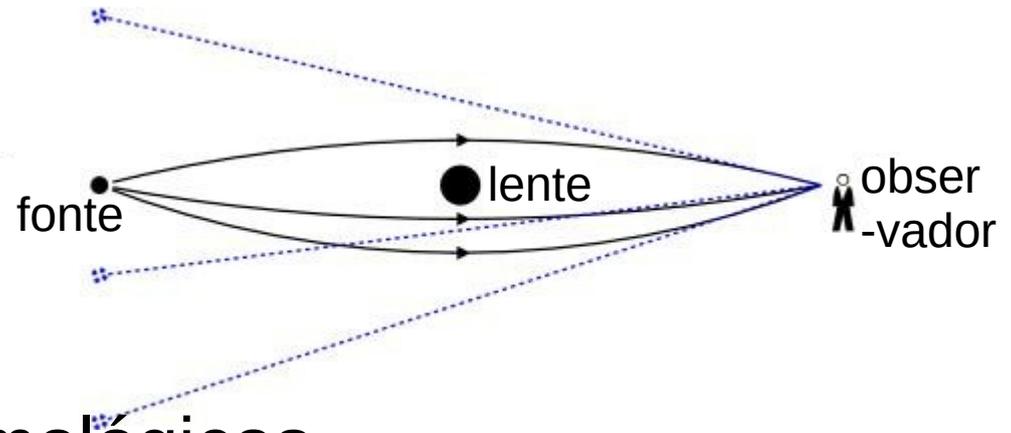
Lentes gravitacionais nos fornecem uma maneira direta de medir **massas** e **distâncias**, sem precisar fazer suposições sobre a natureza da matéria. Eles podem fornecer informações sobre a **fonte** ou sobre a **lente**.

# Lentes Gravitacionais

## Lentes Gravitacionais

contribuíram nas seguintes áreas da astronomia:

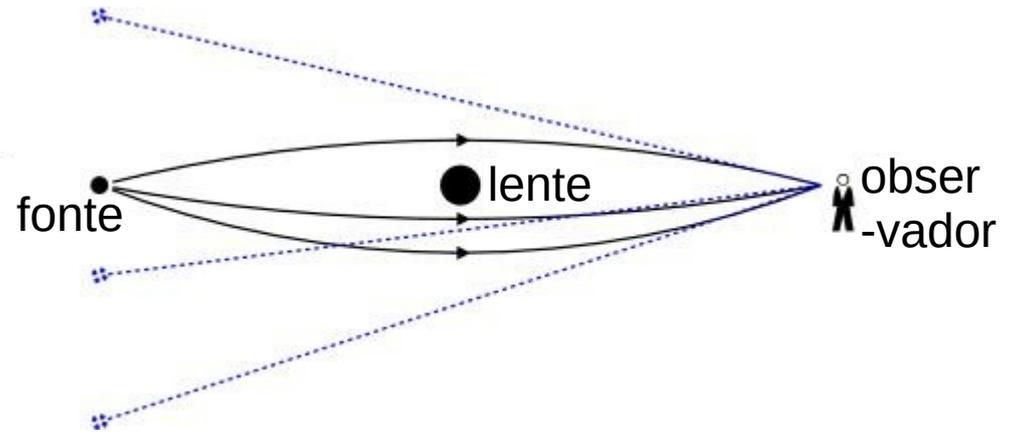
- Escalas de distâncias cosmológicas
- Distribuição de matéria em grandes escalas
- Massas e distribuição de massa em aglomerados de galáxias
- Física dos quasares
- Matéria escura nos halos de galáxias
- Estrutura de galáxias
- Exoplanetas
- e outras



# Lentes Gravitacionais

## O que acontece?

A **luz** vindo de uma **fonte** astronômica é defletida por uma **massa** entre a **fonte** e o **observador** (a Terra), chamada **lente**, o que pode levar ao **deslocamento**, à **magnificação** ou à **distorção** da **imagem** da fonte. Também podem surgir **imagens múltiplas** da fonte.

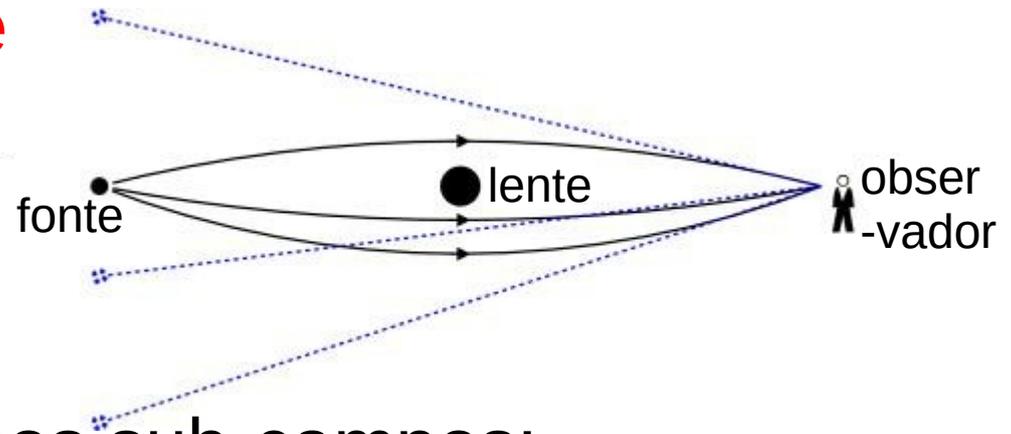


# Lentes Gravitacionais

Dependendo da **intensidade** do efeito, que depende da **massa** da **lente**, e do **alinhamento fonte-lente-observador**,

o campo pode ser dividido nos sub-campos:

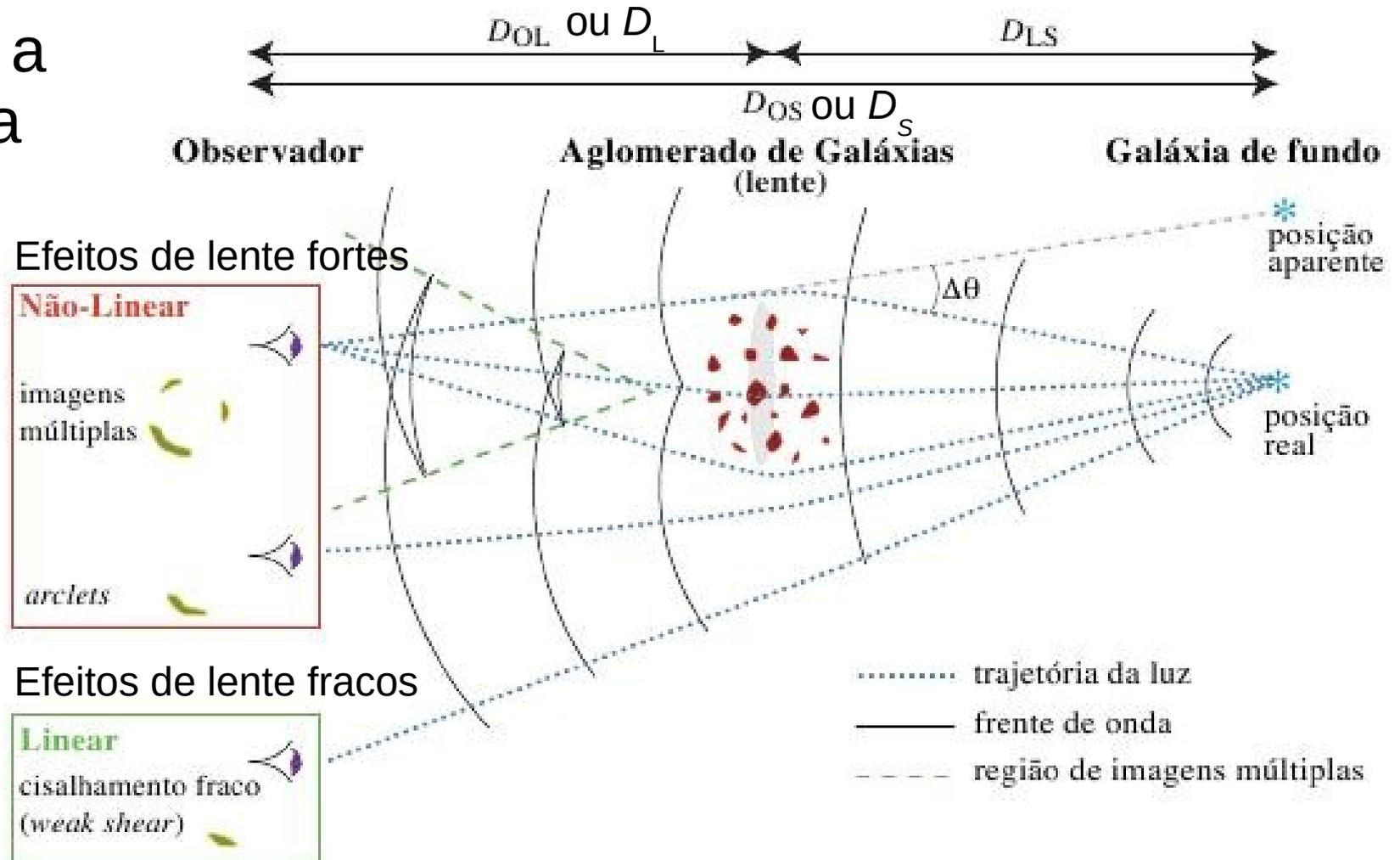
- **Lensing forte**: imagens múltiplas, distorções fortes da imagem, como anéis e arcos; as lentes são galáxias e aglomerados de galáxias
- **Lensing fraco**: distorções fracas da imagem, cisalhamento; lentes: galáxias e aglomerados
- **Microlensing**: magnificação da luz da fonte; lentes: MACHOs (*MASSIVE COMPACT HALO OBJECTS*, vide aula Via Láctea), exoplanetas, ...



# Lentes Gravitacionais

## Efeitos de Lente fortes e fracos

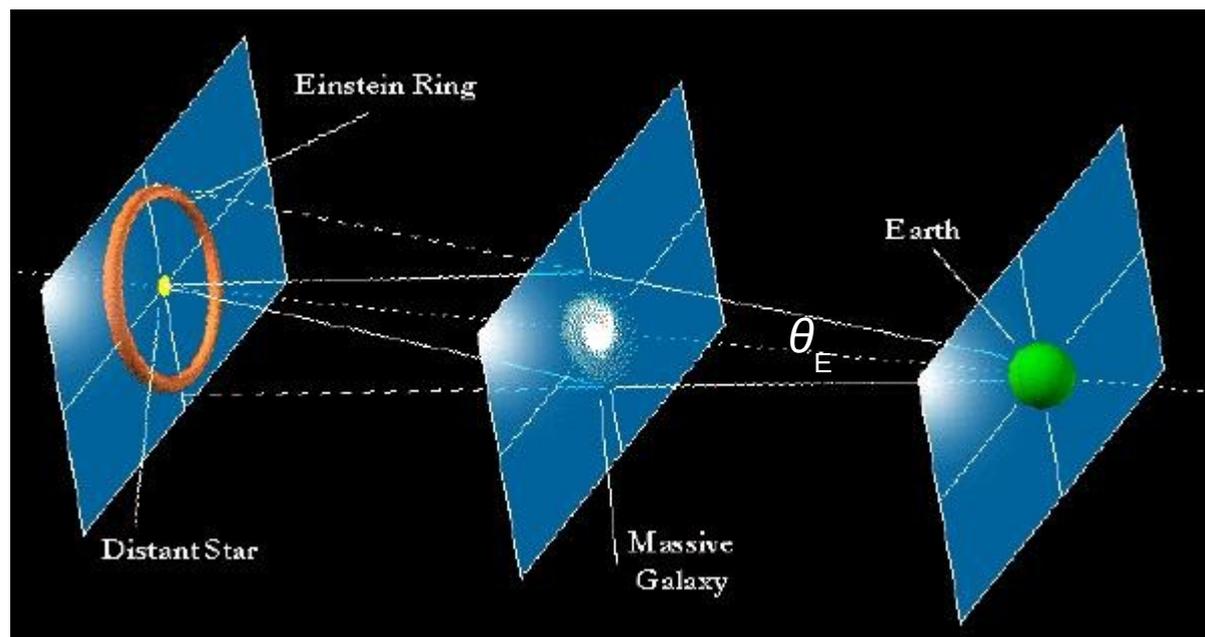
Supondo a geometria ao lado.



# Lentes Gravitacionais

## Anéis de Einstein

No caso de uma **lente circularmente simétrica** e **alinhamento perfeito fonte-lente-Terra**, a **imagem da fonte** será um **anel**.



O **raio** deste anel no **céu** é chamado **Raio de Einstein**  $\theta_E$ : 
$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L}}$$

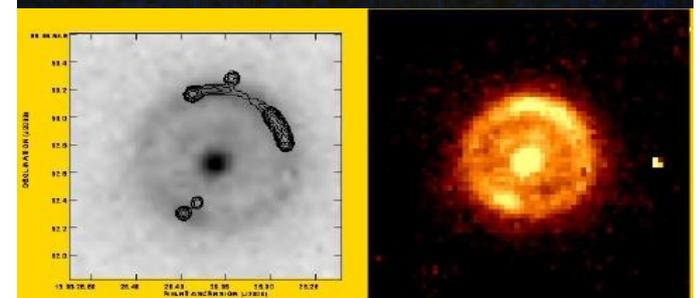
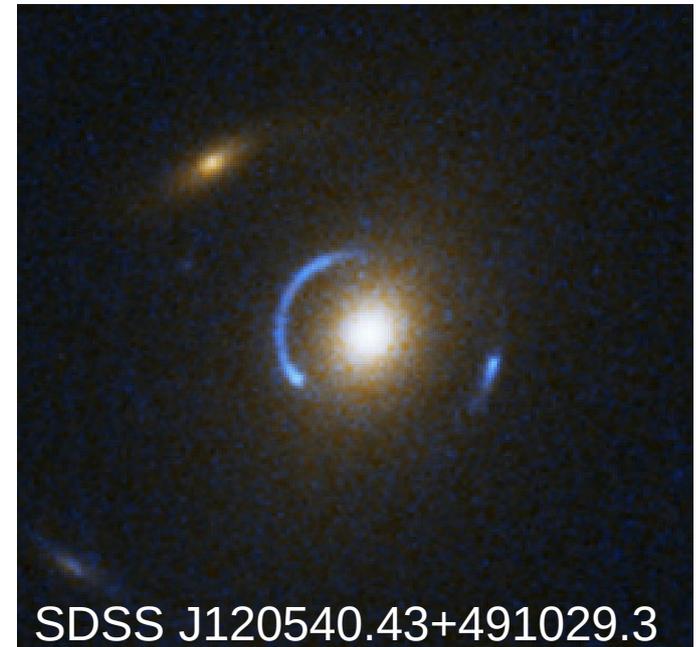
Conhecendo as distâncias (i. e. pelos *redshifts*, vide aulas Galáxias I, Cosmologia), o **raio** de um **anel** de **Einstein** nos dá a **massa**  $M$  da **lente**.

# Lentes Gravitacionais

## Anéis de Einstein

Foram encontrados **anéis de Einstein** em torno de **várias galáxias**, com **raios** angulares da ordem de  $\theta_E \sim 1''$ .

=> **galáxias lentes** de **massas** da ordem de  $10^{12} M_{\odot}$ .



The gravitational lens JVAS B1938+666

Left: HST/NICMOS greyscale with MERLIN radio contours  
Right: Colour image of the HST/NICMOS image

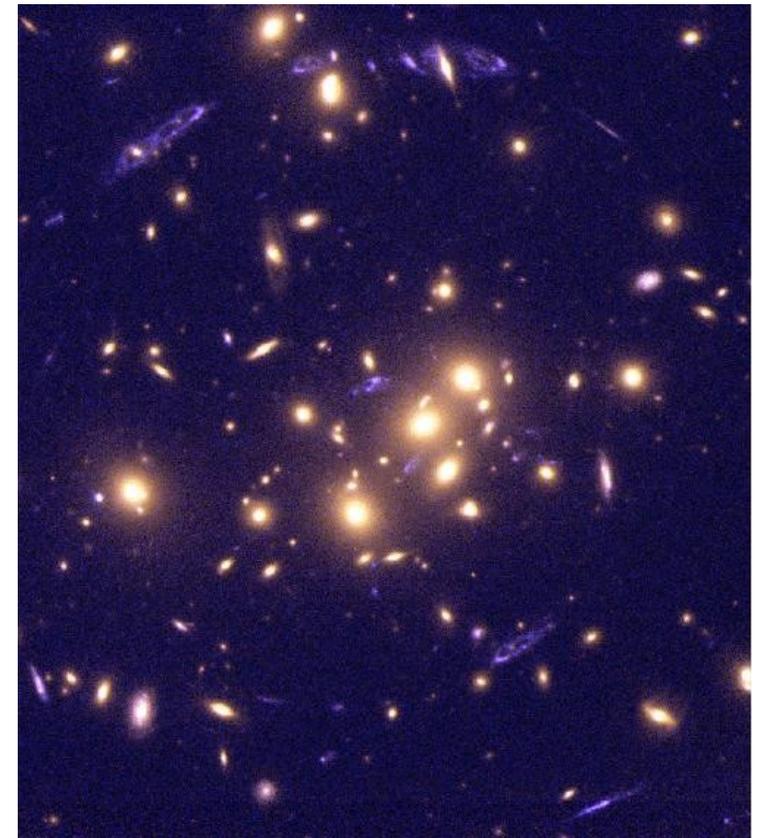
# Lentes Gravitacionais

## Arcos e aumento de fluxo

Quando o **alinhamento** é **menos perfeito**, ou a **lente não é simétrica**, podem surgir **arcos**, “fragmentos de anéis de Einstein”.

Os **raios** destes **arcos** também levam à **determinação** da **massa** da **lente**.

Ao lado: arcos em torno do Aglomerado de galáxias lente CL0024+1645.



CL0024+1654

# Lentes Gravitacionais

## Arcos e aumento de fluxo

Aqui outro  
Aglomerado com  
arcos.

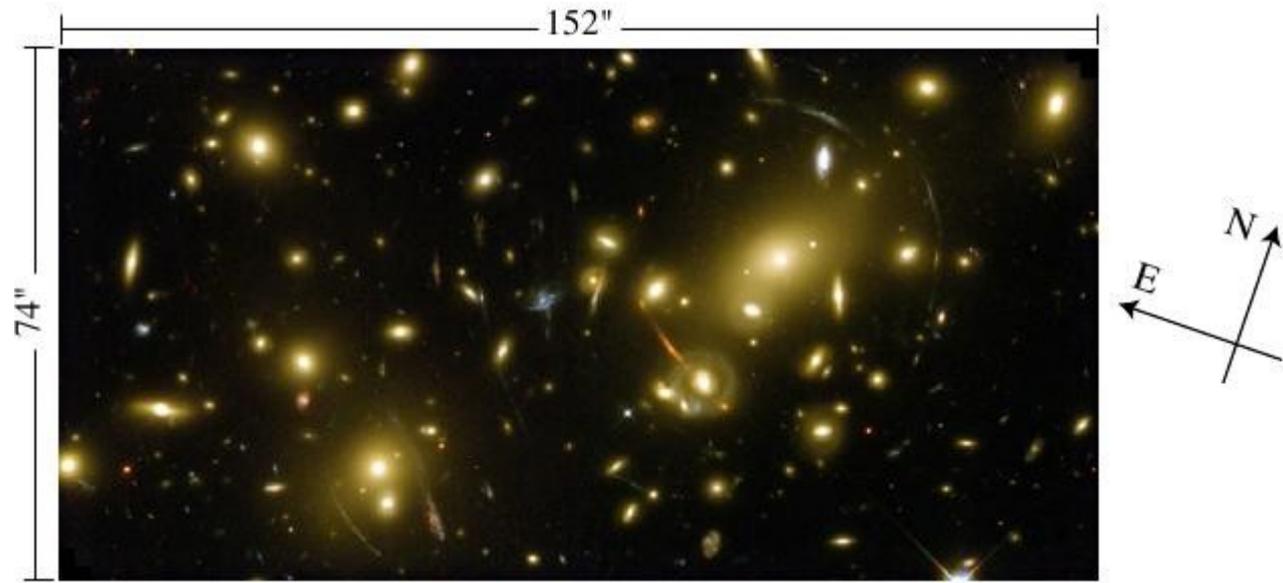
=> **arcos** com **raios**  
de **curvatura**  $\sim 30''$

=> **Aglomerados** de  
**massas** em torno

de  $10^{14} M_{\odot}$ , em **concordância** com as **massas**

**encontradas** por **outros métodos** (teorema virial,  
emissão do gás interaglomerado; => aulas Cosm.).

Além disso o **fluxo** das **galáxias fontes** é **aumentado** por  
um fator até  $\sim 10$ , o que ajuda para observá-las.



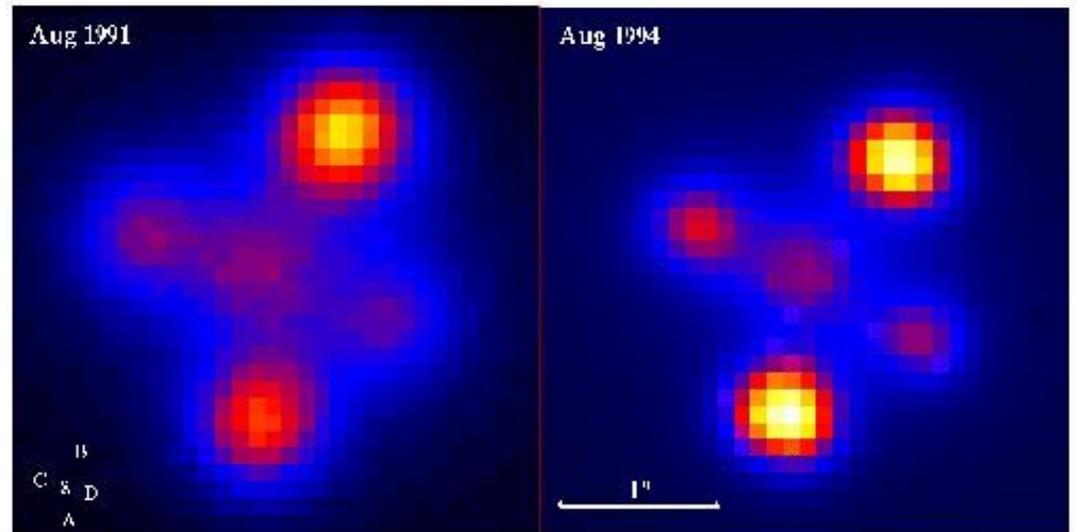
O Aglomerado de galáxias Abell 2218

# Lentes Gravitacionais

## Imagens Múltiplas

Este **quasar**  
(=> aula AGNs)  
aparece em **quatro**  
**posições** no céu, por  
ser “lensado” por uma  
**galáxia** no caminho.

Pelas **posições** das  
**imagens**, dá pra **reconstruir** a **distribuição** de **massa** na  
**galáxia lente**.



Duas imagens do quasar quadruplo Q2237+0305

# Lentes Gravitacionais

## Diferença de Tempo

Um fenômeno interessante quando há **imagens múltiplas** é, que **eventos no quasar** ocorrem em **momentos diferentes** nas **imagens diferentes**, devido às **diferenças** entre os **caminhos da luz**.

Medindo a **diferença de tempo** entre a ocorrência em **uma imagem** e em **outra**, pode-se calcular a **diferença de caminho**, a **escala do sistema**, e as **distâncias no sistema**.

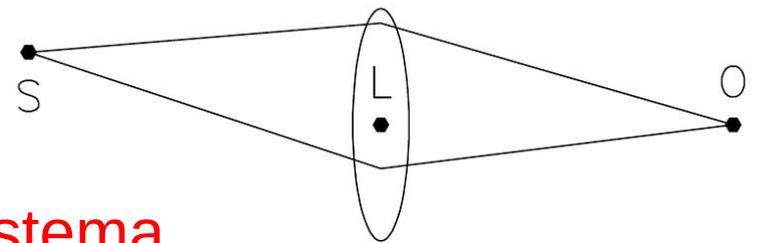
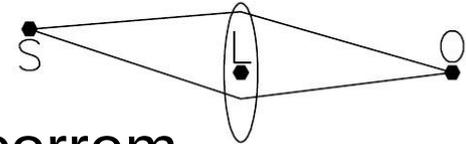
Problemas, que podem aparecer:

Pode ser difícil identificar dois quasares no céu como imagens do mesmo.

A lente pode ser invisível.

A diferença de tempo entre imagens pode ser  $> 1$  ano

(=> difícil identificar o mesmo evento nas diferentes imagens).



# Lentes Gravitacionais

## Lentes Não-Esféricas

**Perto da lente:**

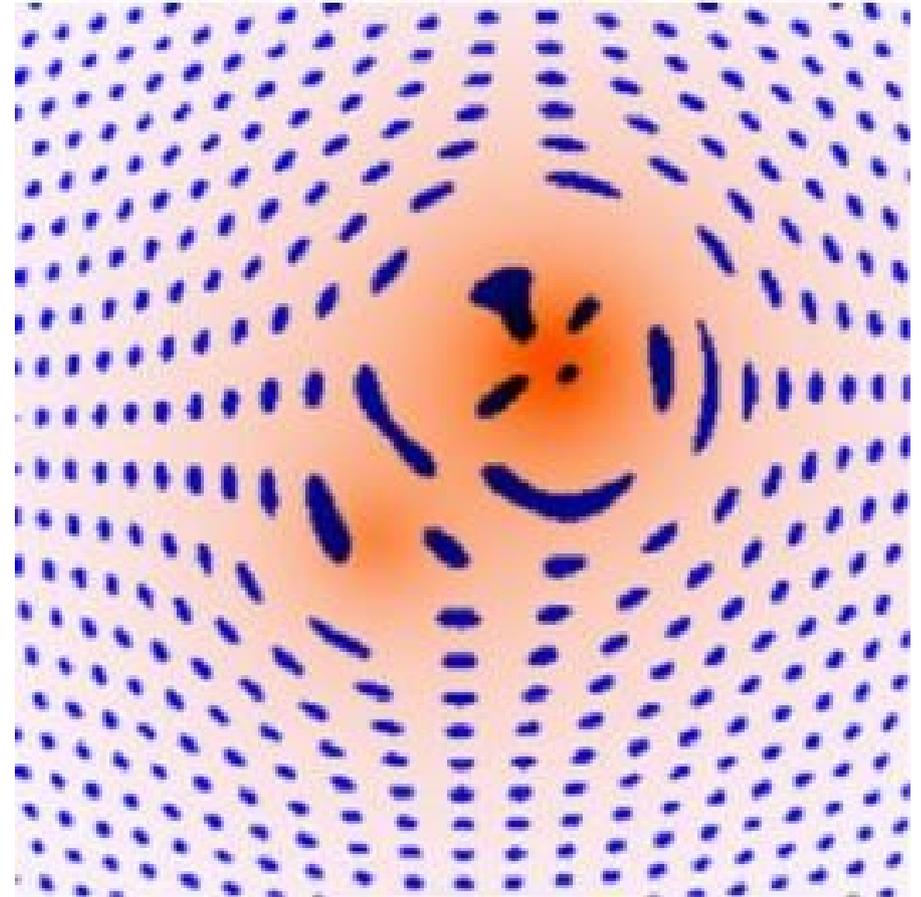
**Efeitos de lente fortes:**

**Imagens múltiplas,**  
**arcos grandes** com  $R \sim \theta_E$ ,  
***arclets*** (“arquinhos”)

**Longe da lente:**

**Efeitos de lente fracos:**

**Distorções menores**  
chamadas **cisalhamento** e  
**convergência**.



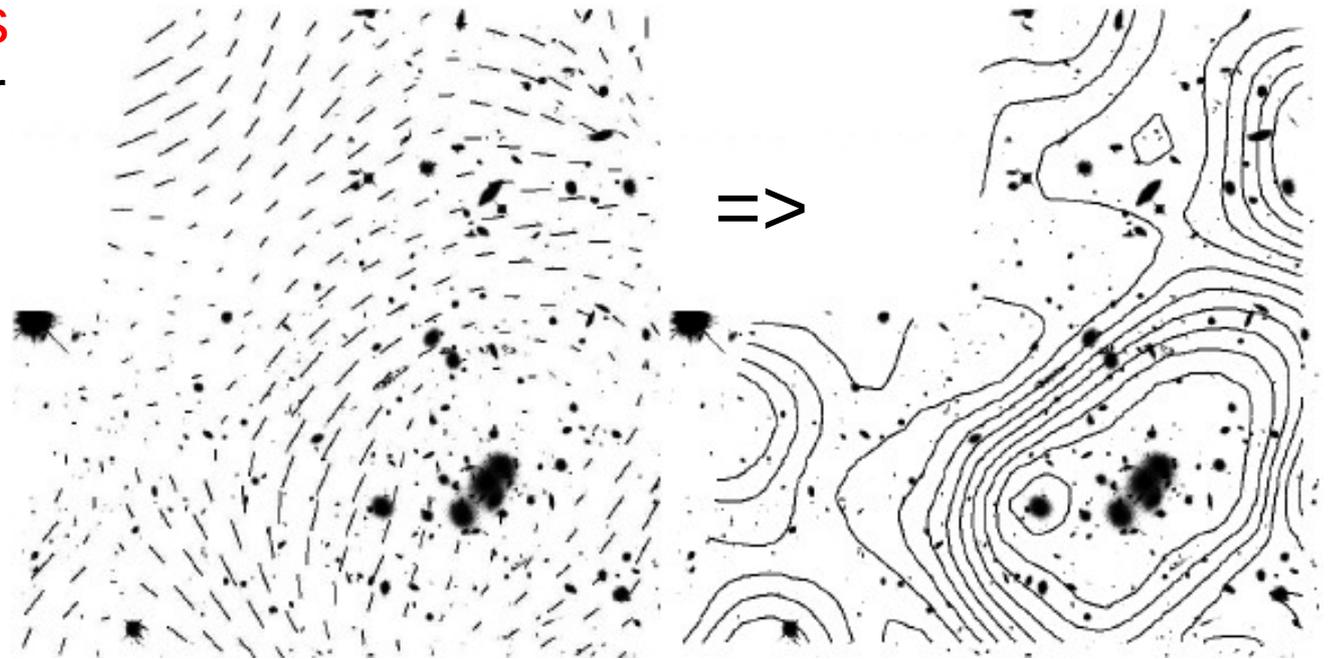
Simulação dos efeitos de lente de um aglomerado com duas concentrações de massa

# Lentes Gravitacionais

Na região dos **efeitos fracos**, pode-se fazer um **mapa do cisalhamento médio** das **galáxias de fundo** (fontes).

Com este mapa podemos **reconstruir a distribuição de massa** no **Aglomerado de galáxias lente**.

É preciso mediar sobre **muitas imagens de galáxias de fundo**, o que **hoje é feito rotinamente**.



Campo de cisalhamento e distribuição de massa em torno de C10024

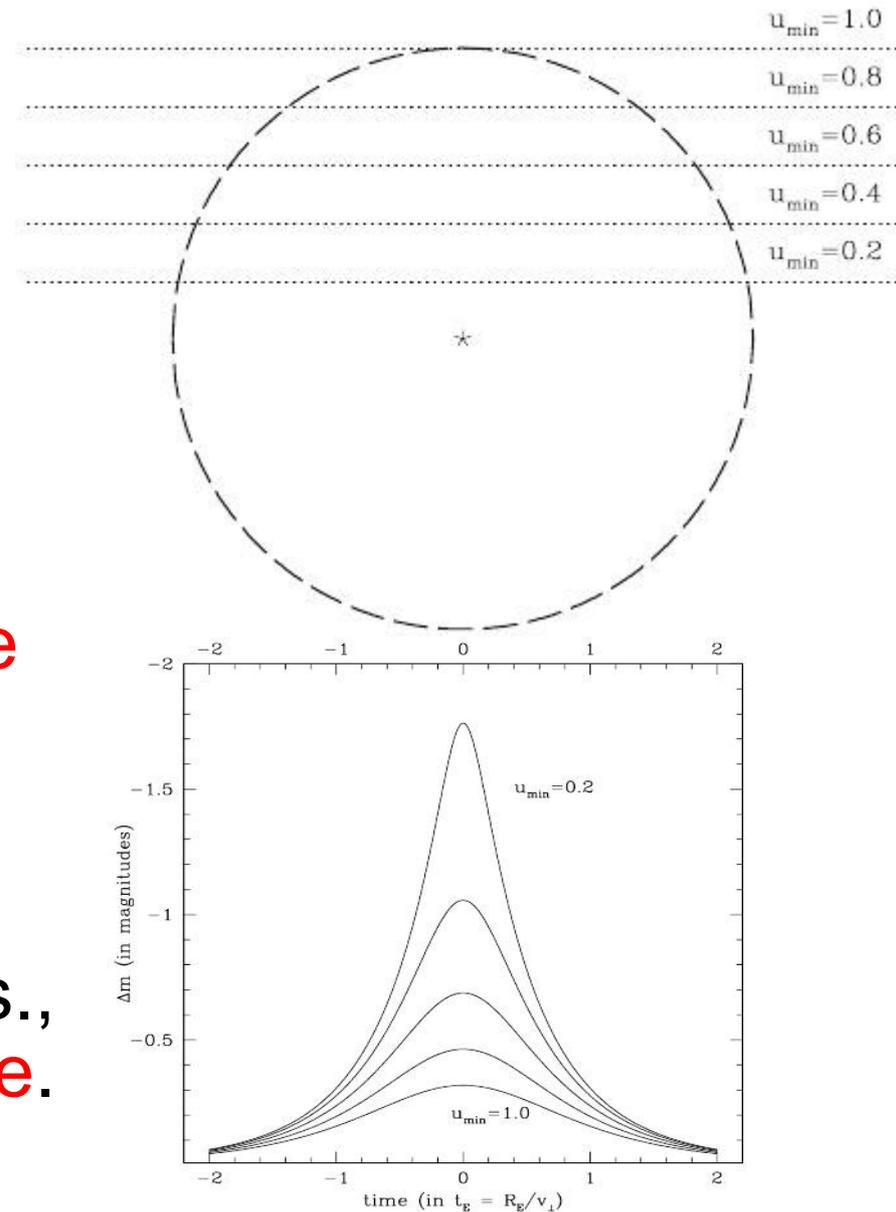
# Lentes Gravitacionais

## *Microlensing*

Veremos uma aplicação deste efeito na aula sobre a Via Láctea:

Uma **lente**, p. e. um **MACHO** (*MA*ssive *C*ompact *H*alo *O*bject), passando na **frente** de uma **fonte** (estrela) causa um **aumento** da **luminosidade** da **fonte**.

Dependendo da massa da lente e do **alinhamento** fonte-lente-obs., o **aumento** é **mais** ou **menos forte**.

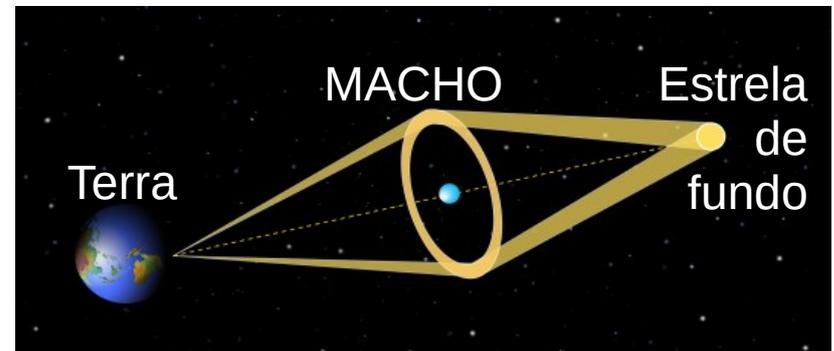


# Lentes Gravitacionais

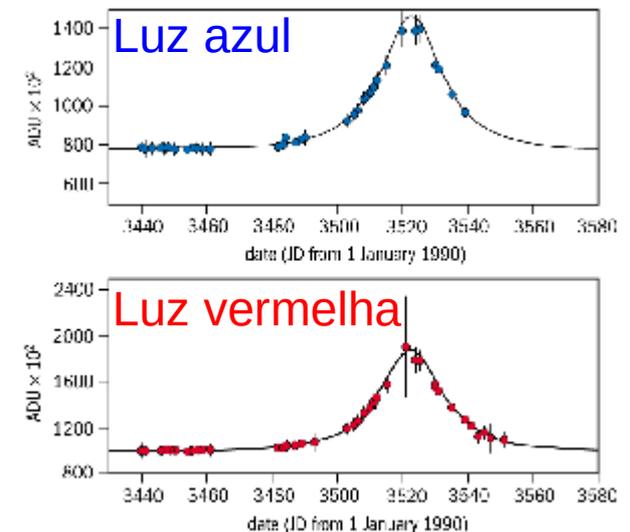
Eventos de *microlensing* se **distinguem** de outras **variações de luminosidade** por:

- serem **eventos únicos**
- sua **forma característica** da **curva de luz**
- serem **acromáticos**.

A **frequência** de eventos de *microlensing* nos dá a **densidade** de **MACHOs** na Via Láctea, **insuficiente** para compor o **Halo de Matéria Escura** ( $\Rightarrow$  aula Via Láctea).



Curvas de luz de uma estrela durante um evento de microlensing





Universidade Federal do ABC

# Noções de Astronomia e Cosmologia

## FIM PRA HOJE

