

A Via Láctea

Abundância de hidrogênio $X \equiv \frac{m_{\text{H}}}{m_{\text{tot}}}$

Abundância de hélio $Y \equiv \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{tot}}}$

Abundância dos elementos com $Z > 2$ (metalicidade) $Z \equiv \frac{m_{Z>2}}{m_{\text{tot}}}$

vale $X + Y + Z = 1$

Metalicidade em unidades de dex: $[Z/\text{H}] = \log_{10} \frac{(N_Z/N_{\text{H}})}{(N_Z/N_{\text{H}})_{\odot}} = [\text{Fe}/\text{H}] = \dots$

Perfil de densidade do disco: $n(z, R) = n_0(e^{-z/z_{\text{fino}}} + 0.085 \cdot e^{-z/z_{\text{esp}}}) \cdot e^{-R/h_R}$,

onde $n_0 = 0.02$ estrelas/ pc^3 , $h_R \geq 2.25$ kpc, $z_{\text{fino}} \simeq 350$ pc e $z_{\text{esp}} \simeq 1000$ pc

Gradiente de metalicidade do disco: -0.01 a -0.05 dex/kpc

Perfil de densidade do halo: $n_{\text{halo}}(r) = n_{0,\text{halo}}(r/a)^{-3.5}$,

onde $n_{0,\text{halo}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ pc}^{-3}$, $a = \text{alguns kpc}$

Velocidade de rotação: $v(r) = \sqrt{GM(r)/r}$

Massa contida: $M(r) = \int_0^r \rho(r) dV = \int_0^r 4\pi\rho(r)r^2 dr$

Densidade para uma curva de rotação constante: $\rho(r) = \frac{v(r)^2}{4\pi Gr^2}$

Perfil de Navarro-Frenk-White: $\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_0}{(r/a)(1+r/a)^2}$

Galáxias

Tipo Hubble de elípticas: $E(10\varepsilon)$, $\varepsilon \equiv 1 - \frac{\beta}{\alpha}$, α e β : semi-eixos aparentes

Raio de Holmberg r_H : semi-eixo maior da isofota de $\mu_H = 26.5 \text{ mag/arcsec}^2$ em B

Para discos: mesma coisa mas com $\mu = 25 \text{ mag/arcsec}^2$: R_{25}

Raio efetivo, o raio que envolve metade da luz da galáxia, r_e

Magnitude superficial em r_e : μ_e

Perfil de de Vaucouleurs: $\log_{10} \left[\frac{I(r)}{I_e} \right] = c \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right]$, I_e = brilho superficial em r_e ;

bojo da VL: $c = -3.307$, $r_e \sim 0.7 \text{ kpc}$

halo da VL: $r_e \sim 2.7 \text{ kpc}$

em mag arcsec^{-2} : $\mu(r) = \mu_e + 8.3268 \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right]$ (elípticas e bojos)

Perfil dos discos de espirais: $\mu(r) = \mu_0 + 1.09 \left(\frac{r}{h_r} \right)$

Velocidades de rotação v_{max} típicas: Sa: 299 km/s, Sb: 222 km/s, Sc: 175 km/s

Relações massa-luminosidade típicas: Sa: $M/L_B = (6.2 \pm 0.6) \cdot (M/L_B)_{\odot}$, Sb: $M/L_B = (4.5 \pm 0.4) \cdot (M/L_B)_{\odot}$, Sc: $M/L_B = (2.6 \pm 0.2) \cdot (M/L_B)_{\odot}$

Relação Tully-Fisher: Sa: $M_B = -9.95 \cdot \log_{10} v_{\text{max}} [\text{km/s}] + 3.15$,

Sb: $M_B = -10.2 \cdot \log_{10} v_{\text{max}} [\text{km/s}] + 2.71$, Sc: $M_B = -11.0 \cdot \log_{10} v_{\text{max}} [\text{km/s}] + 3.31$

Luminosidade de uma espiral: $\log_{10} R_{25} [\text{kpc}] = -0.249 \cdot M_B - 4.00$

Relação massa do Buraco Negro central - dispersão de velocidades em elípticas ou bojos

de espirais: $M_{\text{bh}} = \alpha(\sigma/\sigma_0)^{\beta}$, onde $\alpha = 1.66 \cdot 10^8 M_{\odot}$, $\sigma_0 = 200 \text{ km/s}$ e $\beta = 4.86$

Relação Faber-Jackson: $L \propto \sigma_0^4$ ou $\log_{10} \sigma_0 = 0.1 \cdot M_B + \text{const.}$

Plano fundamental das elípticas: $L \propto \sigma_0^{2.65} \cdot r_e^{0.65}$

Gradiente de metalicidade em elípticas: $d\log_{10} Z / d\log_{10} r \sim -0.13$

Função de Schechter: $\Phi(L) dL \sim L^{\alpha} e^{-L/L^*} dL$ ou

$\Phi(M) dM \sim 10^{-0.4(\alpha+1)M} \exp(-10^{0.4(M^*-M)}) dM$,

Vizinhança da VL: $M_B^* = -21$, $\alpha = -1.0$; Virgo: $M_B^* = -21 \pm 0.7$, $\alpha = -1.24 \pm 0.02$

Massa de um Aglomerado de galáxias: $M \sim \frac{5\sigma_r^2 R}{G}$,

onde σ_r = dispersão de velocidades radiais das galáxias

Fricção dinâmica: $F_d = C \cdot \frac{G^2 M^2 \rho(r)}{v_M^2} = C \cdot \frac{GM^2}{4\pi r^2}$,

LMC: $C = 23$; aglomerados globulares: $C = 76$; elípticas: $C = 160$

Tempo de captura de uma galáxia satélite: $t_c = \frac{2\pi v_M r_i^2}{CGM}$

Raio máximo de captura: $r_{\max} = \sqrt{\frac{t_{\max} CGM}{2\pi v_M}}$

Função de formação estelar: $B(M, t) dM dt = \Psi(t) \cdot \xi(M) dM dt$,

$\Psi(t)$ = taxa de formação estelar, $\xi(M)$ = função de massa inicial

Especro (síncrotron dos jatos de um AGN): $F_\nu \propto \nu^{-\alpha}$

Tamanho de uma componente esférica expondo variações na radiação:

Transparente: $R \sim c\Delta t/2$, opaca $R \sim c\Delta t$, em redshift z : $R \sim c\Delta t/(1+z)$

Límite de Eddington: $L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi GM m_p c}{\sigma_T} = \frac{4\pi GM c}{\bar{\kappa}}$, onde σ_T = seção de choque Thomson do elétron, $\bar{\kappa} = \frac{\sigma_T}{m_p}$ = opacidade do material acretado

Relatividade

Transformações de Lorentz: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$,

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ fator de Lorentz, $\beta = \frac{u}{c}$

Dilatação do tempo: $\Delta t = \gamma \Delta t' \geq \Delta t'$, t' sendo o tempo próprio

Contração de comprimentos: $L = \gamma^{-1} L' \leq L'$, L' sendo o comprimento próprio

Efeito Doppler pra luz: $\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+u_r/c}$,

onde u_r é a velocidade de afastamento radial entre fonte e observador

Efeito Doppler radial ($u_r = u$, $u_t = 0$): $\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1-u_r/c}{1+u_r/c}}$,

Efeito Doppler transversal ($u_t = u$, $u_r = 0$): $\nu_{\text{obs}} = \nu_0 \sqrt{1 - u_t^2/c^2}$

Momento linear relativístico: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Energia relativística: $E = \gamma mc^2$

Fórmula útil: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

Intervalo no espaço-tempo: $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$

Mudança de frequência na variação de altura: $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{gh}{c^2}$

Entre a superfície de uma massa esférica e um ponto “longe”: $\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_o c^2}}$

Dilatação gravitacional do tempo: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} = \frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_o c^2}}$

Para um campo fraco: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\infty} \simeq 1 - \frac{GM}{r_o c^2}$

Ângulo de defleção de luz por uma massa: $\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 R}$

Raio de Schwarzschild: $R_S = \frac{2GM}{c^2}$

Momento angular máximo de um buraco negro: $L_{\max} = \frac{GM^2}{c}$

Radiação de Hawking: $\frac{dM}{dt} \propto M^{-2}$

$$t_{\text{evap}} = 2560\pi^2 \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{M}{h}\right) \approx 2 \cdot 10^{67} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \text{ anos}$$

Lentes gravitacionais, raio de Einstein: $\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{S}} D_{\text{L}}}}$

Cosmologia

redshift: $\lambda = (1 + z)\lambda_0$

para $z \ll 1$: $v = cz$

Lei de Hubble: $v = H_0 d$, $H_0 \simeq 67.7 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$, para $z \leq 0.13$

até $z \sim 2$: $d \simeq \frac{c}{H_0} \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$

Correção K : $M_X = m_X - (m - M) - K_X$

Tempo de Hubble: $t_H = H_0^{-1} = 13.8$ bi. anos

tempo hoje: t_0 ; Lookback time: $t_L(z) = t_0 - t(z)$

Dilatação cosmológica do tempo: $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = 1 + z$

Fator de escala: $R = (1 + z)^{-1}$, hoje: $R(t_0) = 1$

Distância entre dois pontos: $r(t) = \varpi \cdot R(t)$, ϖ é a coordenada comovente

Distância própria entre um objeto e a Terra: $d_p(t) = R(t) \cdot d_{p,0} = \frac{d_{p,0}}{1+z}$,

hoje: $d_{p,0} = d_p(t_0)$ distância comovente

Distância de luminosidade: $d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = (1 + z) \cdot d_{p,0}$

Distância de diâmetro angular: $d_A \equiv \frac{D}{\theta} = \frac{d_{p,0}}{1+z} = \frac{d_L}{(1+z)^2}$

Distância de horizonte: $d_h(t) = R(t) \int_0^t \frac{c}{R(t')} dt'$

Parâmetro de Hubble: $H(t) = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}$, hoje H_0

Lei de Hubble dependente do tempo: $v(t) = H(t) \cdot r(t) = H(t)R(t) \cdot d_{p,0}$,

Curvatura do Universo: $K(t) := 1/r(t) = \frac{k}{R^2(t)}$,

$r(t)$ = raio da curvatura, hoje $K(t_0) = k$:

$k = 0$: plano; $k > 0$: fechado, $k < 0$: aberto

ρ_m = densidade de matéria,

ρ_b = densidade de matéria bariônica,

$\rho_{rel} = u_{rel}/c^2$ = densidade de componentes relativísticos,

$\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$ = densidade de Energia Escura.

$\rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$ densidade crítica, hoje $\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

Parâmetro de densidade (componente X): $\Omega_X(t) = \rho_X(t)/\rho_c(t)$,

hoje $\Omega_{X,0} = \rho_{X,0}/\rho_{c,0}$

Parâmetro de densidade total: $\Omega(t) \equiv \Omega_m(t) + \Omega_{rel}(t) + \Omega_\Lambda(t)$,

hoje $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{rel,0} + \Omega_{\Lambda,0}$

Parâmetro de desaceleração: $q(t) \equiv -\frac{R(t)[d^2 R(t)/dt^2]}{[dR(t)/dt]^2} = 0.5 \cdot \Omega_m(t) + \Omega_{rel}(t) - \Omega_\Lambda(t)$

hoje $q_0 = 0.5 \cdot \Omega_{m,0} + \Omega_{rel,0} - \Omega_{\Lambda,0}$

Variações da equação de Friedmann:

$$\left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{1}{3}\Lambda c^2 \right] R^2 = -kc^2$$

$$\left[\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8}{3}\pi G(\rho_m + \rho_{rel} + \rho_\Lambda) \right] R^2 = -kc^2$$

$$H^2(t)[1 - (\Omega_m(t) + \Omega_{rel}(t) + \Omega_\Lambda(t))]R^2(t) = H^2(t)[1 - \Omega(t)]R^2(t) = -kc^2$$

$$H_0^2[1 - (\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0})] = H_0^2[1 - \Omega_0] = -kc^2$$

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{R} + \frac{\Omega_{rel,0}}{R^2} + \Omega_{\Lambda,0}R^2 + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{rel,0} - \Omega_{\Lambda,0} \right)$$

$$H(z) = H_0(1 + z) \left[\Omega_{m,0}(1 + z) + \Omega_{rel,0}(1 + z)^2 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{(1+z)^2} + 1 - \Omega_0 \right]^{1/2}$$

Evolução com z :

$$\rho_m(z) = (1+z)^3 \rho_{m,0} = R^{-3} \rho_{m,0},$$

$$\rho_{\text{rel}}(z) = (1+z)^4 \rho_{\text{rel},0} = R^{-4} \rho_{\text{rel},0}$$

$$\rho_\Lambda = \Lambda c^2 / 8\pi G = \text{const.}$$

$$\text{temperatura: } T = R^{-1} T_0 = (1+z) \cdot T_0$$

Universo plano ($k=0$) só de matéria ($\rho_m(t) = \rho_c(t)$, $\rho_{\text{rel}}(t) = \rho_\Lambda(t) = 0$):

$$R_{\text{plano}} = (6\pi G \rho_{c,0})^{1/3} t^{2/3} = (3/2)^{2/3} (t/t_H)^{2/3},$$

$$\rho_m(t) \propto t^{-2}$$

$$\text{idade do Universo: } t_{\text{plano},0} = 2/3 \cdot t_H$$

$$\text{evolução de } \Omega: \Omega = 1 + \frac{\Omega_0 - 1}{1 + \Omega_0 z}$$

Universo só de componentes relativísticos ($\rho_m(t) = \rho_\Lambda(t) = 0$):

$$R(t) \propto t^{1/2},$$

$$\rho_{\text{rel}}(t) \propto t^{-2},$$

$$T(t) \propto t^{-1/2}$$

Universo de Energia Escura ($\rho_m(t) = \rho_{\text{rel}}(t) = 0$):

$$R(t) \simeq \left(\frac{\Omega_{m,0}}{4\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} e^{H_0 t \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}$$

Composição química de gás primordial: H: $\sim 76\%$, He: 23 a 24%, D $\sim 0.01\%$, Li $< 0.01\%$

Astrobiologia

Equação de Drake: $N = R \cdot F_p \cdot N_e \cdot F_l \cdot F_i \cdot F_c \cdot L$, onde

N = no. de civilizações na VL capazes de emitirem sinais inteligentes,

R = no. de estrelas semelhantes ao Sol formados por ano na VL (estimativa: 1 a 10),

F_p = percentual destas estrelas com planetas ($\sim 50\%$),

N_e = no. de planetas por sistema com ambiente adequado pra vida (1 a 3),

F_l = percentual destas onde a vida se desenvolveu (1 a 100%),

F_i = percentual destas onde a inteligência evoluiu (1 a 100%),

F_c = percentual destas que desenvolveram tecnologia para comunicação (1 a 100%),

L = tempo de existência desta civilizações (10 000 anos)