

Operações com Vetores

Produto escalar de dois vetores (n -dim): $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = xy \cos \theta$

“Quadrado” de um vetor: $\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$

Valor absoluto, módulo: $x := |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2} \rightarrow x^2 = \vec{x}^2$

Produto vetorial de dois vetores (3-dim): $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x),$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab |\sin \theta|$$

Produto escalar triplo (3-dim): $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$

Produto vetorial triplo (3-dim): $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$

Operadores Diferenciais

Derivadas parciais: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(a_1, \dots, a_j+h, \dots, a_n) - f_i(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(\vec{a}+h\vec{e}_j) - f_i(\vec{a})}{h}$

Matriz Jacobiana: $\vec{f}' = (\nabla \vec{f})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Regra da cadeia: $(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x})) \vec{g}'(\vec{x}) = \nabla \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) \nabla \vec{g}(\vec{x})$

Gradiente de um campo escalar: $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$

Regra do produto para campos escalares: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

Divergente de um campo vetorial (n -dim $\rightarrow n$ -dim): $\nabla \cdot \vec{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \text{tr}\{\nabla \vec{f}\}$

Definição alternativa: $\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$, onde $S = \partial V$

Regra do produto (campo escalar com campo vetorial): $\nabla \cdot (g\vec{f}) = \vec{f} \cdot \nabla g + g\nabla \cdot \vec{f}$

Rotacional de um campo vetorial (3-dim \rightarrow 3-dim): $\nabla \times \vec{f} = (\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y})$

Definições alternativas: $(\nabla \times \vec{f})_x = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{C_+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ ($S \parallel$ plano yz),

$$(\nabla \times \vec{f})_y = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{C_+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \text{ (} S \parallel \text{ plano } xz), (\nabla \times \vec{f})_z = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{C_+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \text{ (} S \parallel \text{ plano } xy)$$

$$\nabla \times \vec{f} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S d\vec{S} \times \vec{f}, \text{ onde } S = \partial V$$

Regras do produto: $\nabla \times (f\vec{g}) = f\nabla \times \vec{g} + (\nabla f) \times \vec{g}$,

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g})$$

Segundas derivadas parciais de campos escalares: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{\partial f}{\partial x_i})$

Teorema de Clairaut (campos “bem comportados”): $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Matriz Hessiana: $H(\vec{x}) = \nabla \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$

Operador Laplaciano: $(\Delta f :=) \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \text{tr}\{H(\vec{x})\}$

Laplaciano de um campo vetorial: $(\Delta \vec{f} :=) \nabla^2 \vec{f} = (\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2, \dots, \nabla^2 f_n)$

Identidades (funções escalares ou vetoriais no espaço 3-dim): $\nabla \times (\nabla f) = 0$,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0,$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}$$

Integrais ao longo de curvas e sobre superfícies

Derivada (em t) de uma curva parametrizada $\vec{s}(t)$: $\vec{s}'(t) = \frac{d\vec{s}}{dt} = \left(\frac{\partial s_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial s_n}{\partial t}\right)$

Regra da cadeia para troca da parametrização ($\vec{u}(t) = \vec{s}(g(t))$): $d\vec{u} = \vec{s}'(g)dg = \vec{s}'(g)g'dt$

Regra da cadeia p. funções escalares ao longo de curvas: $\frac{\partial f \circ \vec{s}(t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\vec{s}(t))}{\partial t} = \nabla f(\vec{s}(t)) \cdot \vec{s}'(t)$

Elemento de uma curva C parametrizada por $\vec{s}(t)$ ($[a, b] \rightarrow n$ -dim): $d\vec{s} = \vec{s}'dt$,

comprimento: $ds = |d\vec{s}| = |\vec{s}'dt| = |\vec{s}'|dt$

Comprimento da curva C : $\int_C ds = \int_a^b |\vec{s}'|dt$

Integral de uma função escalar com respeito ao comprimento de arco: $\int_C f ds = \int_a^b f |\vec{s}'|dt$

Integral de linha de uma função vetorial: $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f} \cdot \vec{s}'dt$

Circulação de \vec{f} ao longo de uma curva fechada C : $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$

Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha: $\int_a^b \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \varphi(\vec{b}) - \varphi(\vec{a})$

Para caminhos fechados: $\oint_C \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = 0$

Parametrização de uma superfície S ($T \rightarrow 3$ -dim): $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

Elemento de S direcionado: $d\vec{S} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$, ou

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du dv \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right) du dv = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) du dv \end{aligned}$$

Regra da cadeia para troca da parametrização ($\vec{R}(s, t) = \vec{r}(\vec{G}(s, t))$ ou $\vec{G}(s, t) = (u, v)$):

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$$

Elemento de área: $dS = |d\vec{S}| du dv = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \sin \theta du dv$

Área de S : $A(S) = \iint_S dS = \iint_T \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$

Integrais de uma função escalar com respeito à área: $\iint_S f dS = \iint_T f(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv$

Elemento de fluxo (fluxo através de dS) de uma função vetorial: $d\Phi := \vec{f} \cdot d\vec{S}$

Integral de superfície de uma função vetorial (fluxo através S):

$$\iint_S d\Phi = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_T \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Superfícies com representação explícita ($z = z(x, y)$, T : projeção de S):

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}), \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}), d\vec{S} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) dx dy,$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, A(S) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_T \vec{f}(x, y, z(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) dx dy = \iint_T -\frac{\partial z}{\partial x} f_x - \frac{\partial z}{\partial y} f_y + f_z dx dy$$

Teoremas

Teorema de Green: $\oint_{C_+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$, onde $C = \partial D$

Aplicações: Área delimitada pela curva C ($P = -y$, $Q = x$): $\frac{1}{2} \int_{C_+} -y dx + x dy$

“Stokes no plano” ($P = f_x$, $Q = f_y$, $f_z = 0$): $\oint_{C_+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{e}_z dA$

“T. do divergente 2D” ($\vec{n} = \frac{y'(t), -x'(t)}{\sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2}}$, $P = -f_y$, $Q = f_x$): $\oint_{C_+} \vec{f} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \nabla \cdot \vec{f} dA$

Teorema de Stokes: $\iint_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{S} = \oint_{C_+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$, onde $C = \partial S$

Teorema do divergente: $\iiint_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$, onde $dV = dx dy dz$, $S = \partial V$

Teorema de Helmholtz: Todo campo vetorial pode ser decomposto em um campo irrotacional (com $\nabla \times = 0$) e um campo incompressível (com $\nabla \cdot = 0$) (decomposição de Helmholtz). Se o campo tende a zero no infinito mais rapidamente que $1/r$, a decomposição é singular.

Aplicações

Fluido com densidade ρ e velocidade \vec{v}

Densidade de corrente: $\rho\vec{v}$

Integral de corrente ao longo de C : $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\vec{s}(t)) \cdot \vec{s}'(t) dt$

Circulação (int. de corr. ao longo de uma curva fechada): $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$

Equação de continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$

Trabalho aplicado numa partícula de massa m percorrendo um caminho $s(t)$ por uma força $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{v}' = m\vec{s}''$:

$W := \int_{\vec{s}(a)}^{\vec{s}(b)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{s}(t)) \cdot \vec{v}(t) dt = \frac{1}{2}mv^2(a) - \frac{1}{2}mv^2(b)$

Se a força for ligada a uma energia potencial U : $\vec{F} = -\nabla U$

Campo/Potencial gravitacional: $\vec{g} = -\nabla\varphi_g$

Eletromagnetismo: Densidade de carga ρ_q , de corrente $\vec{J} = \rho_q\vec{v}$, campo elétrico \vec{E} , campo magnético \vec{B} , potencial escalar φ , potencial vetorial \vec{A} ,

fluxo de \vec{E}/\vec{B} através da superfície S : $\Phi_{E/B,S}$, carga total no volume V : Q_{tot} ,

corrente total atravessando S : I_S , permissividade elétrica $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m,

permeabilidade magn. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A², v. da luz $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2} = 2.9979 \cdot 10^8$ m/s:

Equação de continuidade: $\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_q\vec{v}) = \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$

Relações potenciais-campos: $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Condição de calibre de Lorenz: $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

Lei de Gauss para o campo elétrico (forma diferencial): $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}$

Forma integral: $\Phi_{E,S} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$, onde $S = \partial V$

Lei de Gauss para o campo magnético (forma diferencial): $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Forma integral: $\Phi_{E,S} = 0$, onde $S = \partial V$

Lei de Faraday (forma diferencial): $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Forma integral: $\oint_{C_+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$, onde $C = \partial S$

Lei de Ampère-Maxwell (forma diferencial): $\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Forma integral: $\oint_{C_+} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_S + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$, onde $C = \partial S$

Lei de Gauss para o campo elétrico em termos de φ : $\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_q}{\epsilon_0}$

Lei de Ampère-Maxwell em termos de \vec{A} : $\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$

Na ausência de cargas: $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{E} = 0$, $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{B} = 0$,

$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi = 0$, $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = 0 \Rightarrow$ Equações de ondas