

## Tensores em sistemas cartesianos

Transformação de tensor de ordem  $n$ :  $A_{i'_1 i'_2 \dots i'_n} = \alpha_{i'_1 k_1} \alpha_{i'_2 k_2} \dots \alpha_{i'_n k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n}$

$\Delta = \det(\alpha_{i'k}) = 1$  (trf. própria);  $-1$  (trf. imprópria)

Delta de Kronecker:  $\delta_{ik} = 1$  para  $i = k$ ;  $\delta_{ik} = 0$  para  $i \neq k$

Auto-valores  $\lambda$  e auto-vetores  $\vec{A}$  de um tensor  $T$ :  $T_{ik} A_k = \lambda A_i$

$\Rightarrow \det(T - \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots)) = 0$

Eixos principais: eixos na direção dos auto-vetores.

No sistema  $S'$  dos eixos principais  $T$  é da forma:  $T_{i'k'} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

Elipsóide do tensor (em  $S'$ ):  $T_{i'j'} x_{j'}^2 = \lambda_i x_{i'}^2 = 1$  (somar sobre  $i$ ), semi-eixos  $\lambda_i^{-0.5}$

Pseudotensor de ordem  $n$ :  $A_{i'_1 i'_2 \dots i'_n} = \alpha_{i'_1 k_1} \alpha_{i'_2 k_2} \dots \alpha_{i'_n k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n} \Delta$

Pseudotensor ou símbolo de Levi-Civita (ordem  $n$ ):

$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$  caso  $i_1 i_2 \dots i_n$  é uma permutação par de  $1, 2, \dots, n$

$-1$  caso  $i_1 i_2 \dots i_n$  é uma permutação ímpar de  $1, 2, \dots, n$

$0$  nos outros casos (dois índices iguais)

Aplicação para calcular a determinante de uma matriz  $n \times n$ :  $\det(A) = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n}$

caso 3D:  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ ;  $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$ ; os outros  $\varepsilon_{jkl}$  são zero

ou:  $\varepsilon_{jkl} = \vec{i}_j \cdot (\vec{i}_k \times \vec{i}_l)$

Aplicação no produto vetorial:  $(\vec{A} \times \vec{B})_j = \varepsilon_{jkl} A_k B_l$

no produto triplo escalar:  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_j \cdot (\vec{B} \times \vec{C})_j = \varepsilon_{jkl} A_j B_k C_l$

no rotacional:  $(\nabla \times \vec{f})_j = \varepsilon_{jkl} \frac{\partial f_l}{\partial x_k}$

Identidade  $\varepsilon - \delta$ :  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \delta_{il} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - \delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}) + \delta_{in} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl})$

Identidade de  $\varepsilon$  contraída:  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$

Aplicação Tensor de inércia:

$$L_i = \omega_k I_{ik}, \text{ onde } I_{ik} = \sum_{j=1}^n m_j \left( \delta_{ik} r_i^{(j)} r_l^{(j)} - r_i^{(j)} r_k^{(j)} \right) = \begin{pmatrix} I_{r_1} & -I_{r_1 r_2} & -I_{r_1 r_3} \\ -I_{r_1 r_2} & I_{r_2} & -I_{r_2 r_3} \\ -I_{r_1 r_3} & -I_{r_2 r_3} & I_{r_3} \end{pmatrix},$$

onde  $I_{r_i}$  = momento de inércia em relação ao eixo  $i$  e  $I_{r_i r_k}$  = produtos de inércia

No sistema dos eixos principais ( $I = \text{diag}(I_{r_1}, I_{r_2}, I_{r_3})$ ):  $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} (I_{r_1} \omega_1^2 + I_{r_2} \omega_2^2 + I_{r_3} \omega_3^2)$

## Coordenadas Generalizadas

Coordenadas contravariantes:  $q^i$ , covariantes:  $q_i$

Base covariante:  $\vec{e}_i$ , contravariante (recíproca):  $\vec{e}^i$ ,  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^k = \delta_{ik}$

No caso 3D:  $\vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{V}$ ,  $\vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{V}$  e  $\vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{V}$ , onde  $V = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$ ;

$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{V'}$ ,  $\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{V'}$  e  $\vec{e}_3 = \frac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{V'}$ , onde  $V' = \vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3) = \frac{1}{V}$

Tensor métrico:  $g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$ , do sistema recíproco:  $g^{ik} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^k$

Componentes contravariantes de um vetor  $\vec{A}$ :  $A^i = \vec{A} \cdot \vec{e}^i$ ,

covariantes:  $A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i$ , vale  $\vec{A} = A^i \vec{e}_i = A_i \vec{e}^i$

“subir” um índice:  $A^i = g^{ik} A_k$ , “baixar” um índice:  $A_i = g_{ik} A^k$

produto escalar:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i = A^i g_{ik} B^k = A_i B^i = A_i g^{ik} B_k$

Elemento de comprimento de uma curva:  $(ds)^2 = |d\vec{r}|^2 = g_{ik} dq^i dq^k$

ao longo da coordenada  $q^i$ :  $ds_i = |e_i| dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i$  (não somar sobre  $i$ )

Elementos de área em superfícies de coordenadas:  $d\sigma_1 = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} dq^2 dq^3$ ,

$$d\sigma_2 = \sqrt{g_{33}g_{11} - g_{31}^2} dq^3 dq^1, \quad d\sigma_3 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dq^1 dq^2$$

Elemento de volume:  $\frac{G}{\sqrt{|G|}} dq^1 dq^2 dq^3$ , onde  $G = \det(g_{ik})$

Coordenadas ortogonais:  $g_{ik} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, h_3^2)$ ,

onde  $h_i := \sqrt{g_{ii}} = |e_i|$  = coeficientes métricos (não somar sobre  $i$ )

Transformação das componentes de um vetor  $\vec{A}$ :

das componentes contravariantes:  $A^{i'} = \alpha^{i'}_k A^k$ , onde  $\alpha^{i'}_k = \vec{e}^{i'} \cdot \vec{e}_k$

inversa:  $A^k = \alpha^k_{i'} A^{i'}$ , onde  $\alpha^k_{i'} = \vec{e}^k \cdot \vec{e}_{i'} = (\alpha^{i'}_k)^{-1}$

das componentes covariantes:  $A_{i'} = \alpha_{i'}^k A_k$ , onde  $\alpha_{i'}^k = \vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}^k = ((\alpha^{i'}_k)^{-1})^T$

inversa:  $A_k = \alpha_k^{i'} A_{i'}$ , onde  $\alpha_k^{i'} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}^{i'} = (\alpha^{i'}_k)^T$

Transformação de tensor geral:  $A^{l'_1 l'_2 \dots m'_1 m'_2 \dots} = \alpha^{l'_1}_{i_1} \alpha^{l'_2}_{i_2} \dots \alpha_{m'_1}^{k_1} \alpha_{m'_2}^{k_2} \dots A^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots}$

Produto exterior de dois tensores gerais  $A^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots}$  e  $B^{j_1 j_2 \dots l_1 l_2 \dots}$ :

$$(AB)^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots j_1 j_2 \dots l_1 l_2 \dots} = A^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots} B^{j_1 j_2 \dots l_1 l_2 \dots}$$

Contração do tensor  $A^{kl}_{mn}$  sobre  $k$  e  $m$ :  $A^{il}_{in} := \sum_{i=1}^3 A^{il}_{in}$

Produto interior: p. exterior contraído por índices em posições e tensores diferentes

Caso  $q^i$  podem ser escritos como funções de coordenadas ortonormais subjacentes  $x_k$

$q^i = q^i(x_1, x_2, x_3) = q^i(\vec{r})$  com funções inversas  $x_i(q^1, q^2, q^3)$ , ou  $\vec{r}(q^1, q^2, q^3)$ :

base (local):  $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ ,  $g_{ik} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial x_1}{\partial q^i} \frac{\partial x_1}{\partial q^k}$

elemento de comprimento:  $(ds)^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} dq^i dq^k$

ao longo da coordenada  $q^i$ :  $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i$

coeficientes métricos ( $q^i$  ortogonais):  $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q^i}\right)^2}$

gradiente (covariante):  $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial q^1}, \frac{\partial f}{\partial q^2}, \frac{\partial f}{\partial q^3}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x_1} & \frac{\partial q^2}{\partial x_1} & \frac{\partial q^3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q^1}{\partial x_2} & \frac{\partial q^2}{\partial x_2} & \frac{\partial q^3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q^1}{\partial x_3} & \frac{\partial q^2}{\partial x_3} & \frac{\partial q^3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

Derivada Covariante:

de uma função escalar  $f(x^1, x^2, x^3)$  (gradiente):  $f_{;i} := \frac{\partial f}{\partial x^i} =: f_{,i} = (\nabla f)_i$

de uma função vetorial  $\vec{A}(x^1, x^2, x^3)$ :  $A_{i;k} := \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}\right)_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik} A_j$

$$A^i_{;k} := \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k}\right)^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} A^j, \quad (\text{onde } A_{i;k} := \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, A^i_{;k} := \frac{\partial A^i}{\partial x^k})$$

de uma função tensorial de segunda ordem  $T$ :  $T_{ik;l} := \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} T_{mk} - \Gamma^m_{kl} T_{im}$

$$T^{ik}_{;l} := \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} T^{mk} + \Gamma^k_{ml} T^{im}$$

$$T^i_{k;l} := \frac{\partial T^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} T^{mk} - \Gamma^m_{kl} T^i_m$$

onde  $\Gamma^i_{jk} := \{^i_{jk}\} := \vec{e}^i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}$  = símbolo de Christoffel do segundo tipo,

vale  $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$

Operadores diferenciais em coordenadas curvilíneas ortogonais (coef. métr.  $h_1, h_2$  e  $h_3$ ):

gradiente:  $\nabla f = f^{;i} = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q^1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q^2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q^3}\right)$

divergente:  $\nabla \cdot \vec{f} = f^i_{;i} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} (f_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q^2} (f_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q^3} (f_3 h_1 h_2) \right]$

rotacional:  $\nabla \times \vec{f} = [f^3_{;2} - f^2_{;3}, f^1_{;3} - f^3_{;1}, f^2_{;1} - f^1_{;2}] = \left[ \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial q^2} (f_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q^3} (f_2 h_2) \right), \right.$

$$\left. \frac{1}{h_1 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial q^3} (f_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q^1} (f_3 h_3) \right), \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial q^1} (f_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q^2} (f_1 h_1) \right) \right]$$

laplaciano:  $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = f^i_{;i} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q^3} \right) \right]$

## Aplicação: Relatividade Restrita (ou Especial)

Evento:  $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) = (ct, x, y, z)$

Transformação de Lorentz (TL) de um evento

( $S'$  se movimentando com  $\vec{u} = (u, 0, 0)$  em relação a  $S$ ):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda^{\beta'}_{\alpha} x^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ onde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Transformação inversa: A mesma, substituindo  $u$  por  $-u$

Base covariante do espaço-tempo:  $\vec{e}_0 = \vec{i}_0, \vec{e}_1 = \vec{i}_1, \vec{e}_2 = \vec{i}_2, \vec{e}_3 = \vec{i}_3,$

base contravariante:  $\vec{e}^0 = -\vec{i}_0, \vec{e}^1 = \vec{i}_1, \vec{e}^2 = \vec{i}_2, \vec{e}^3 = \vec{i}_3$

Métrica (de Minkovskij):  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

representação covariante de um vetor  $A^\alpha$ :  $A_\alpha = \eta_{\alpha\beta} A^\beta = (-A^0, A^1, A^2, A^3)$

Produto escalar:  $A^\alpha B_\alpha = A^\alpha \eta_{\alpha\beta} B^\beta = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$

Transformação de Lorentz (TL) de um vetor  $A^\alpha$ :  $A^{\beta'} = \Lambda^{\beta'}_{\alpha} A^\alpha$

Norma de  $A^\alpha$  (invariante na TL):  $(A^\alpha)^2 = A^\alpha A_\alpha = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$

Operadores diferenciais

componentes covariantes do gradiente:  $\partial_\alpha = \cdot_{;\alpha} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}) = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$

componentes contravariantes:  $\partial^\alpha = \cdot^{;\alpha} = (-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$

divergente:  $\square \cdot := \frac{\partial \cdot}{\partial x^\alpha} = \cdot^{;\alpha}_{;\alpha} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot$

d'alembertiano (laplaciano 4D):  $\square^{(2)} := \square \cdot \partial^\alpha = \cdot^{;\alpha}_{;\alpha} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$

Quadrivector deslocamento:  $\Delta x^\alpha = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$

Intervalo (norma/invariante do deslocamento):

$$(\Delta s)^2 = (x^\alpha)^2 = x^\alpha x_\alpha = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

Dilatação do tempo:  $\Delta t' = \gamma \Delta \tau$ , onde  $\tau$  = tempo próprio

Contração do comprimento na direção de  $\vec{u}$ :  $L' = \gamma^{-1} L_0$ ,  $L_0$  = comprimento próprio

Quadrivector velocidade:  $v^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma_v (c, \vec{v})$

invariante:  $(v^\alpha)^2 = -c^2$

Quadrivector momento:  $p^\alpha := mv^\alpha = (\gamma_v mc, \gamma_v m\vec{v}) = (E/c, \vec{p})$ ,

onde  $E = \gamma_v mc^2 = mc^2 + E_{\text{cin}}$  é a energia relativística,  $mc^2$  = energia de repouso,

$E_{\text{cin}} = (\gamma_v - 1)mc^2$  e  $\vec{p} = \gamma_v m\vec{v}$  é o momento linear relativístico

invariante:  $(p^\alpha)^2 = -m^2 c^2$

Quadrivector aceleração:  $a^\alpha := \frac{dv^\alpha}{d\tau} = \gamma_v (\vec{a} \cdot \vec{v}, \vec{a})$ , onde  $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\gamma_v \vec{v}) = \frac{dv^i}{dt}$

Quadrivector força ("força de Minkovskij"):  $F^\alpha := \frac{dp^\alpha}{d\tau} = ma^\alpha = \gamma_v (\vec{v} \cdot \vec{F}, \vec{F}) = \gamma_v \frac{dp^\alpha}{dt}$ ,

onde  $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma_v m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$  = força comum,  $\vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma_v mc^2) = \frac{dE}{dt}$

## Eletrromagnetismo Relativístico

Quadrivetor densidade de corrente:  $J^\alpha := (\rho_q, \vec{J}) = (\rho_q, \rho_q \vec{v}) = \frac{\rho_q}{\gamma_v} v^\alpha = \rho_0 v^\alpha$ ,

onde  $\rho_0 = \frac{\rho_q}{\gamma_v}$  = densidade de carga de repouso

invariante:  $(J^\alpha)^2 = -\rho_0^2 c^2$

Equação de continuidade:  $\square \cdot J^\alpha = 0$

Quadrivetor potencial eletromagnético:  $A^\alpha = (\frac{\varphi}{c}, \vec{A})$

Condição de calibre de Lorentz:  $\square \cdot A^\alpha = 0$

Tensor campo eletromagnético (ou de Faraday):

$$F^{\alpha\beta} := \frac{\partial A^\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

TL do tensor campo eletromagnético:  $F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\mu} \Lambda^{\beta'}_{\nu} F^{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha'}_{\mu} F^{\mu\nu} (\Lambda^{\beta'}_{\nu})^T$

$$\Rightarrow E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B}),$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}),$$

onde  $\parallel$  e  $\perp$  são as componentes paralelas respectivamente perpendiculares a  $\vec{u}$

Leis de Maxwell:  $\square \cdot F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\alpha$

$$\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0$$