

Tensores em sistemas cartesianos

Transformação de tensor de ordem n : $A_{i'_1 i'_2 \dots i'_n} = \alpha_{i'_1 k_1} \alpha_{i'_2 k_2} \dots \alpha_{i'_n k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n}$

$\Delta = \det(\alpha_{i'k}) = 1$ (trf. própria); -1 (trf. imprópria)

Delta de Kronecker: $\delta_{ik} = 1$ para $i = k$; $\delta_{ik} = 0$ para $i \neq k$

Auto-valores λ e auto-vetores \vec{A} de um tensor T : $T_{ik} A_k = \lambda A_i$

$$\Rightarrow \det(T - \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots)) = 0$$

Eixos principais: eixos na direção dos auto-vetores.

No sistema S' dos eixos principais T é da forma: $T_{i'k'} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

Elipsóide do tensor (em S'): $T_{i'i} x_i'^2 = \lambda_i x_i'^2 = 1$ (somar sobre i), semi-eixos $\lambda_i^{-0.5}$

Pseudotensor de ordem n : $A_{i'_1 i'_2 \dots i'_n} = \alpha_{i'_1 k_1} \alpha_{i'_2 k_2} \dots \alpha_{i'_n k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n} \Delta$

Pseudotensor ou símbolo de Levi-Civita (ordem n):

$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$ caso $i_1 i_2 \dots i_n$ é uma permutação par de 1, 2, ..n

-1 caso $i_1 i_2 \dots i_n$ é uma permutação ímpar de 1, 2, ..n

0 nos outros casos (dois índices iguais)

Aplicação para calcular a determinante de uma matriz $n \times n$: $\det(A) = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n}$

caso 3D: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$; $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$; os outros ε_{jkl} são zero

ou: $\varepsilon_{jkl} = \vec{i}_j \cdot (\vec{i}_k \times \vec{i}_l)$

Aplicação no produto vetorial: $(\vec{A} \times \vec{B})_j = \varepsilon_{jkl} A_k B_l$

no produto triplo escalar: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_j \cdot (\vec{B} \times \vec{C})_j = \varepsilon_{jkl} A_j B_k C_l$

no rotacional: $(\nabla \times \vec{f})_j = \varepsilon_{jkl} \frac{\partial f_l}{\partial x_k}$

Identidade $\varepsilon - \delta$: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \delta_{il} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - \delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}) + \delta_{in} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl})$

Identidade de ε contraída: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$

Aplicação Tensor de inércia:

$$L_i = \omega_k I_{ik}, \text{ onde } I_{ik} = \sum_{j=1}^n m_j \left(\delta_{ik} r_i^{(j)} r_l^{(j)} - r_i^{(j)} r_k^{(j)} \right) = \begin{pmatrix} I_{r_1} & -I_{r_1 r_2} & -I_{r_1 r_3} \\ -I_{r_1 r_2} & I_{r_2} & -I_{r_2 r_3} \\ -I_{r_1 r_3} & -I_{r_2 r_3} & I_{r_3} \end{pmatrix},$$

onde I_{r_i} = momento de inércia em relação ao eixo i e $I_{r_i r_k}$ = produtos de inércia

No sistema dos eixos principais ($I = \text{diag}(I_{r_1}, I_{r_2}, I_{r_3})$): $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} (I_{r_1} \omega_1^2 + I_{r_2} \omega_2^2 + I_{r_3} \omega_3^2)$

Coordenadas Generalizadas

Coordenadas contravariantes: q^i , covariantes: q_i

Base covariante: \vec{e}_i , contravariante (recíproco) \vec{e}^i , $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^k = \delta_{ik}$

No caso 3D: $\vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{V}$, $\vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{V}$ e $\vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{V}$, onde $V = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$;

$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{V'}$, $\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{V'}$ e $\vec{e}_3 = \frac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{V'}$, onde $V' = \vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3) = \frac{1}{V}$

Tensor métrico: $g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$, do sistema recíproco: $g^{ik} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^k$

Componentes contravariantes de um vetor \vec{A} : $A^i = \vec{A} \cdot \vec{e}^i$,

covariantes: $A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i$, vale $\vec{A} = A^i \vec{e}_i = A_i \vec{e}^i$

“subir” um índice: $A^i = g^{ik} A_k$, “baixar” um índice: $A_i = g_{ik} A^k$

produto escalar: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i = A^i g_{ik} B^k = A_i B^i = A_i g^{ik} B_k$

Elemento de comprimento de uma curva: $(ds)^2 = |\vec{dr}|^2 = g_{ik} dq^i dq^k$

ao longo da coordenada q^i : $ds_i = |e_i| dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i$ (não somar sobre i)

Elementos de área em superfícies de coordenadas: $d\sigma_1 = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} dq^2 dq^3$,

$$d\sigma_2 = \sqrt{g_{33}g_{11} - g_{31}^2} dq^3 dq^1, d\sigma_3 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dq^1 dq^2$$

Elemento de volume: $\frac{G}{\sqrt{|G|}} dq^1 dq^2 dq^3$, onde $G = \det(g_{ik})$

Coordenadas ortogonais: $g_{ik} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, h_3^2)$,

onde $h_i := \sqrt{g_{ii}} = |e_i|$ = coeficientes métricos (não somar sobre i)

Transformação das componentes de um vetor \vec{A} :

das componentes contravariantes: $A^{i'} = \alpha^{i'}_k A^k$, onde $\alpha^{i'}_k = \vec{e}^{i'} \cdot \vec{e}_k$

inversa: $A^{i'} = \alpha^k_{i'} A^i$, onde $\alpha^k_{i'} = \vec{e}^k \cdot \vec{e}_{i'} = (\alpha^{i'}_k)^{-1}$

das componentes covariantes: $A_{i'} = \alpha_{i'}^k A_k$, onde $\alpha_{i'}^k = \vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}^k = ((\alpha^{i'}_k)^{-1})^T$

inversa: $A_k = \alpha_k^{i'} A_{i'}$, onde $\alpha_k^{i'} = \vec{e}_k \cdot \vec{e}^{i'}$

Transformação de tensor geral: $A^{l'_1 l'_2 \dots m'_1 m'_2 \dots} = \alpha^{l'_1}_{i_1} \alpha^{l'_2}_{i_2} \dots \alpha^{m'_1}_{i_1} \alpha^{m'_2}_{i_2} \dots A^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots}$

Produto exterior de dois tensores gerais $A^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots}$ e $B^{j_1 j_2 \dots l_1 l_2 \dots}$:

$$(AB)^{i_1 i_2 \dots j_1 j_2 \dots k_1 k_2 \dots l_1 l_2 \dots} = A^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots} B^{j_1 j_2 \dots l_1 l_2 \dots}$$

Contração do tensor A^{kl}_{mn} sobre k e m : $A^{il}_{in} := \sum_{i=1}^3 A^{il}_{in}$

Produto interior: p. exterior contraído por índices em posições e tensores diferentes

Caso q^i podem ser escritos como funções de coordenadas ortonormais subjacentes x_k

$q^i = q^i(x_1, x_2, x_3) = q^i(\vec{r})$ com funções inversas $x_i(q^1, q^2, q^3)$, ou $\vec{r}(q^1, q^2, q^3)$:

base (local): $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot g_{ik} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial x_l}{\partial q^i} \frac{\partial x_l}{\partial q^k}$

elemento de comprimento: $(ds)^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} dq^i dq^k$

ao longo da coordenada q^i : $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} dq^i$

coeficientes métricos (q^i ortogonais): $h_i = \sqrt{(\frac{\partial x_1}{\partial q^i})^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial q^i})^2 + (\frac{\partial x_3}{\partial q^i})^2}$

gradiente (covariante): $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial q^1}, \frac{\partial f}{\partial q^2}, \frac{\partial f}{\partial q^3}) \begin{pmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x_1} & \frac{\partial q^2}{\partial x_1} & \frac{\partial q^3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q^1}{\partial x_2} & \frac{\partial q^2}{\partial x_2} & \frac{\partial q^3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q^1}{\partial x_3} & \frac{\partial q^2}{\partial x_3} & \frac{\partial q^3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

Derivada Covariante:

de uma função escalar $f(x^1, x^2, x^3)$ (gradiente): $f_{,i} := \frac{\partial f}{\partial x^i} = (\nabla f)_i$

de uma função vetorial $\vec{A}(x^1, x^2, x^3)$: $A_{i,k} := \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k} \right)_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik} A_j$

$$A^i_{,k} := \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k} \right)^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} A^j$$

de uma função tensorial de segunda ordem T : $T_{ik,l} := \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} T_{mk} - \Gamma^m_{kl} T_{ik}$

$$T^{ik}_{,l} := \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} T^{mk} + \Gamma^k_{ml} T^{ik}$$

$$T^i_{k,l} := \frac{\partial T^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} T_{mk} - \Gamma^m_{kl} T^i_m$$

onde $\Gamma^i_{jk} := \{j^i_k\} := \vec{e}^i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}$ = símbolo de Christoffel do segundo tipo,

$$\text{vale } \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right)$$

Operadores diferenciais em coordenadas curvilíneas ortogonais (coef. métr. h_1, h_2 e h_3):

gradiente: $\nabla f = (\frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q^1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q^2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q^3})$

divergente: $\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} (f_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q^2} (f_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q^3} (f_3 h_1 h_2) \right]$

rotacional: $\nabla \times \vec{f} = \left[\frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} (f_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q^3} (f_2 h_2) \right), \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^3} (f_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q^1} (f_3 h_3) \right), \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} (f_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q^2} (f_1 h_1) \right) \right]$

laplaciano: $\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q^3} \right) \right]$

Aplicação: Relatividade Restrita (ou Especial)

Evento: $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) = (ct, x, y, z)$

Transformação de Lorentz (S' se movimentando com $\vec{u} = (u, 0, 0)$ em relação a S):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda^{\beta'}{}_\alpha x^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ onde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Transformação inversa: A mesma, substituindo u por $-u$

Base covariante do espaço-tempo: $\vec{e}_0 = \vec{i}_0, \vec{e}_1 = \vec{i}_1, \vec{e}_2 = \vec{i}_2, \vec{e}_3 = \vec{i}_3,$

base contravariante: $\vec{e}^0 = -\vec{i}_0, \vec{e}^1 = \vec{i}_1, \vec{e}^2 = \vec{i}_2, \vec{e}^3 = \vec{i}_3$

Métrica (de Minkovskij): $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

representação covariante de um vetor A^α : $A_\alpha = \eta_{\alpha\beta} A^\beta = (-A^0, A^1, A^2, A^3)$

Produto escalar: $A^\alpha B_\alpha = A^\alpha \eta_{\alpha\beta} B^\beta = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$

Transformação de Lorentz (TL) de um vetor A^α : $A^{\beta'} = \Lambda^{\beta'}{}_\alpha A^\alpha$

Norma de A^α (invariante na TL): $(A^\alpha)^2 = A^\alpha A_\alpha = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2$

Operadores diferenciais

componentes covariantes do gradiente: $\partial_\alpha = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}) = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$

componentes contravariantes: $\partial^\alpha = (-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$

divergente: $\square \cdot := \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot$

d'alembertiano (laplaciano 4D): $\square^{(2)} := \square \cdot \partial^\alpha = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$

Quadrivector deslocamento: $\Delta x^\alpha = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$

Intervalo (norma/invariante do deslocamento):

$(\Delta s)^2 = (x^\alpha)^2 = x^\alpha x_\alpha = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$

Dilatação do tempo: $\Delta t' = \gamma \Delta \tau$, onde τ = tempo próprio

Contração do comprimento na direção de \vec{u} : $L' = \gamma^{-1} L_0$, L_0 = comprimento próprio

Quadrivector velocidade: $v^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma_v (c, \vec{v})$

invariante: $(v^\alpha)^2 = -c^2$

Quadrivector momento: $p^\alpha := mv^\alpha = (\gamma_v mc, \gamma_v m\vec{v}) = (E/c, \vec{p})$,

onde $E = \gamma_v mc^2 = mc^2 + E_{\text{cin}}$ é a energia relativística,

mc^2 = energia de repouso, $E_{\text{cin}} = (\gamma_v - 1)mc^2$ e $\vec{p} = \gamma_v m\vec{v}$ é o momento linear relativístico

invariante: $(p^\alpha)^2 = -m^2 c^2$

Quadrivector aceleração: $a^\alpha := \frac{dv^\alpha}{d\tau} = \gamma_v (\vec{a} \cdot \vec{v}, \vec{a})$, onde $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\gamma_v \vec{v}) = \frac{d\vec{v}^i}{dt}$

Quadrivector força (“força de Minkovskij”): $F^\alpha := \frac{dp^\alpha}{d\tau} = ma^\alpha = \gamma_v (\vec{v} \cdot \vec{F}, \vec{F}) = \gamma_v \frac{d\vec{p}^i}{dt}$,

onde $\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma_v m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$ = força comum, $\vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma_v mc^2) = \frac{dE}{dt}$

Eletromagnetismo Relativístico

Quadrivetor densidade de corrente: $J^\alpha := (\rho_q, \vec{J}) = (\rho_q, \rho_q \vec{v}) = \frac{\rho_q}{\gamma_v} v^\alpha = \rho_0 v^\alpha$,

onde $\rho_0 = \frac{\rho_q}{\gamma_v}$ = densidade de carga de repouso
invariante: $(J^\alpha)^2 = -\rho_0^2 c^2$

Equação de continuidade: $\square \cdot J^\alpha = 0$

Quadrivetor potencial eletromagnético: $A^\alpha = (\frac{\varphi}{c}, \vec{A})$

Condição de calibre de Lorentz: $\square \cdot A^\alpha = 0$

Tensor campo eletromagnético (ou de Faraday):

$$F^{\alpha\beta} := \frac{\partial A^\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_x & \frac{1}{c} E_y & \frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{1}{c} E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{1}{c} E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

TL do tensor campo eletromagnético: $F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}{}_\mu \Lambda^{\beta'}{}_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha'}{}_\mu F^{\mu\nu} (\Lambda^{\beta'}{}_\nu)^T$

$$\Rightarrow E'_\parallel = E_\parallel, \vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{u} \times \vec{B}),$$

$$B'_\parallel = B_\parallel, \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c^2} \vec{u} \times \vec{E}),$$

onde \parallel e \perp são as componentes paralelas respectivamente perpendiculares a \vec{u}

Leis de Maxwell: $\square \cdot F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\alpha$

$$\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0$$