

CÁLCULO VETORIAL E TENSORIAL - LISTA 2

PROF. ROLDÃO DA ROCHA - CMCC/UFABC

<http://professor.ufabc.edu.br/~roldao.rocha>

1. Mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é solenoidal se \mathbf{u} e \mathbf{v} são ambos irrotacionais.
2. Se \mathbf{u} é irrotacional (ou seja $\nabla \times \mathbf{u} = 0$), sendo $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$ é solenoidal (um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo).
3. Defina o operador de momento angular $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$, onde as componentes são dadas por

$$L_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad L_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad L_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Mostre que $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$. Mostre que $L_x L_y - L_y L_x = iL_z$, $L_z L_x - L_x L_z = iL_y$, $L_y L_z - L_z L_y = iL_x$.

4. A velocidade de um fluido bidimensional é dada por $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\hat{\mathbf{i}} - v(x, y)\hat{\mathbf{j}}$. Supondo que o fluido seja incompressível (ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) e irrotacional, prove que valem as *condições de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

5. Sejam f, g dois campos escalares diferenciáveis. Prove que $(\nabla f) \times (\nabla g)$ é solenoidal. Use o ex.9, letra b), da lista 1.
6. Prove que $\nabla \times (\phi \nabla \phi) = 0$, onde ϕ é um campo escalar diferenciável.
7. Considere o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ e o campo vetorial $\mathbf{u} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{j}}$, se $(x, y) \in S$. Mostre que $\nabla \times \mathbf{u} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}$.
8. Usando o item 1) a), mostre que se \mathbf{u} é um vetor constante, então $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{u}$.
9. (a) Mostre que $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\nabla(u^2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.
(b) Usando o item 9)a) da Lista 1, mostre que se o potencial magnético \mathbf{A} é dado por $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(u\nabla v - v\nabla u)$, então o campo magnético é dado por $\mathbf{B} = \nabla u \times \nabla v$.
10. Se o potencial eletromagnético \mathbf{A} é dado por $\mathbf{A} = \frac{yz}{r(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{i}} - \frac{xz}{r(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{j}}$, calcule a indução magnética \mathbf{B} dada por $\nabla \times \mathbf{A}$. (resp.: $\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$).